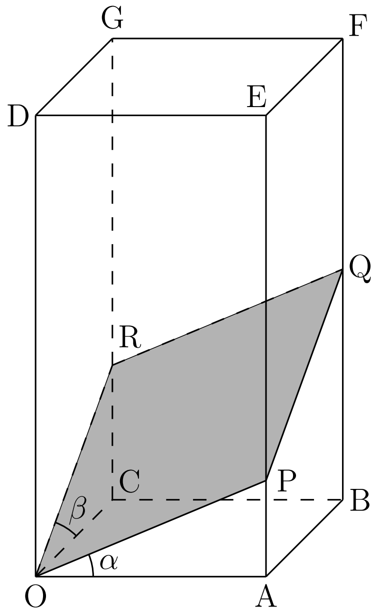
平成 26 年度　東京大学 2 次試験前期日程 (数学問題)150 分
理科 (一類，二類，三類)　数 I・II・III・A・B・C

$\boxed{1}$ 1 辺の長さが 1 の正方形を底面とする四角柱 OABC-DEFG を考える．3 点 P，Q，R を，それぞれ辺 AE，辺 BF，辺 CG 上に，4 点 O，P，Q，R が同一平面上にあるようにとる．四角形 OPQR の面積を S とおく．また，$\angle$AOP を α，$\angle$COR を β とおく．

(1) S を $\tan\alpha$ と $\tan\beta$ を用いて表せ．

(2) $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{4}$，$S = \dfrac{7}{6}$ であるとき，$\tan\alpha + \tan\beta$ の値を求めよ．さらに，$\alpha \leqq \beta$ のとき，$\tan\alpha$ の値を求めよ．



$\boxed{2}$ a を自然数 (すなわち 1 以上の整数) の定数とする．
白球と赤球があわせて 1 個以上入っている袋 U に対して，次の操作 $(*)$ を考える．

$(*)$ 袋 U から球を 1 個取り出し，

(i) 取り出した球が白球のときは，袋 U の中身が白球 a 個，赤球 1 個となるようにする．

(ii) 取り出した球が赤球のときは，その球を袋 U へ戻すことなく，袋 U の中身はそのままにする．

はじめに袋 U の中に，白球が $a+2$ 個，赤球が 1 個入っているとする．この袋 U に対して操作 $(*)$ を繰り返し行う．

たとえば，1 回目の操作で白球が出たとすると，袋 U の中身は白球 a 個，赤球 1 個となり，さらに 2 回目の操作で赤球が出たとすると，袋 U の中身は白球 a 個のみとなる．

n 回目に取り出した球が赤球である確率を p_n とする．ただし，袋 U の中の個々の球の取り出される確率は等しいものとする．

(1) p_1，p_2 を求めよ．

(2) $n \geqq 3$ に対して p_n を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m}p_n$ を求めよ．

3 u を実数とする．座標平面上の 2 つの放物線

$$C_1 : \quad y = -x^2 + 1$$
$$C_2 : \quad y = (x-u)^2 + u$$

を考える．C_1 と C_2 が共有点をもつような u の値の範囲は，ある実数 a，b により，$a \leqq u \leqq b$ と表される．

(1) a，b の値を求めよ．

(2) u が $a \leqq u \leqq b$ をみたすとき，C_1 と C_2 の共有点を $\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{P}_2(x_2,\ y_2)$ とする．ただし，共有点が 1 点のみのときは，P_1 と P_2 は一致し，ともにその共有点を表すとする．

$$2|x_1 y_2 - x_2 y_1|$$

を u の式で表せ．

(3) (2) で得られる u の式を $f(u)$ とする．定積分

$$I = \int_a^b f(u)\,du$$

を求めよ．

4 p，q は実数の定数で，$0 < p < 1$，$q > 0$ をみたすとする．関数

$$f(x) = (1-p)x + (1-x)(1-e^{-qx})$$

を考える．

以下の問いに答えよ．必要であれば，不等式 $1 + x \leqq e^x$ がすべての実数 x に対して成り立つことを証明なしに用いてよい．

(1) $0 < x < 1$ のとき，$0 < f(x) < 1$ であることを示せ．

(2) x_0 は $0 < x_0 < 1$ をみたす実数とする．数列 $\{x_n\}$ の各項 x_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を，

$$x_n = f(x_{n-1})$$

によって順次定める．$p > q$ であるとき，

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 0$$

となることを示せ．

(3) $p < q$ であるとき，

$$c = f(c), \quad 0 < c < 1$$

をみたす実数 c が存在することを示せ．

5 r を 0 以上の整数とし，数列 $\{a_n\}$ を次のように定める．

$$a_1 = r, \quad a_2 = r + 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1}(a_n + 1) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

また，素数 p を 1 つとり，a_n を p で割った余りを b_n とする．ただし，0 を p で割った余りは 0 とする．

(1) 自然数 n に対し，b_{n+2} は $b_{n+1}(b_n + 1)$ を p で割った余りと一致することを示せ．

(2) $r = 2$，$p = 17$ の場合に，10 以下のすべての自然数 n に対して，b_n を求めよ．

(3) ある 2 つの相異なる自然数 n，m に対して，

$$b_{n+1} = b_{m+1} > 0, \quad b_{n+2} = b_{m+2}$$

が成り立ったとする．このとき，$b_n = b_m$ が成り立つことを示せ．

(4) a_2，a_3，a_4，$\cdots$ に p で割り切れる数が現れないとする．このとき，a_1 も p で割り切れないことを示せ．

6 座標平面の原点を O で表す．
線分 $y = \sqrt{3}x$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ 上の点 P と，線分 $y = -\sqrt{3}x$ $(-2 \leqq x \leqq 0)$ 上の点 Q が，線分 OP と線分 OQ の長さの和が 6 となるように動く．このとき，線分 PQ の通過する領域を D とする．

(1) s を $0 \leqq s \leqq 2$ をみたす実数とするとき，点 $(s,\ t)$ が D に入るような t の範囲を求めよ．

(2) D を図示せよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) 座標空間において，O を原点とし，A(1, 0, 0)，B(1, 1, 0)，C(0, 1, 0)，P(1, 0, $\tan\alpha$)，R(0, 1, $\tan\beta$) とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1,\ 1,\ \tan\alpha+\tan\beta)$$

であるから，このベクトルの x 成分と y 成分に注意すると

$$\mathrm{Q}(1,\ 1,\ \tan\alpha+\tan\beta)$$

四角形 OPQR は，平行四辺形であるから

$$\begin{aligned}S&=\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}})^2}\\&=\sqrt{(1+\tan^2\alpha)(1+\tan^2\beta)-(\tan\alpha\tan\beta)^2}\\&=\boldsymbol{\sqrt{1+\tan^2\alpha+\tan^2\beta}}\end{aligned}$$

別解 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1,\ 0,\ \tan\alpha)$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(0,\ 1,\ \tan\beta)$ の外積 (ベクトル積) を $\vec{v}$ とすると (p.7 を参照)

$$\vec{v}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\times\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(-\tan\alpha, -\tan\beta,\ 1)$$

平面 OABC の法線ベクトルを $\vec{n}=(0,\ 0,\ 1)$ とする．
$\vec{v}$ と $\vec{n}$ のなす角を θ とすると

$$\cos\theta=\frac{\vec{v}\cdot\vec{n}}{|\vec{v}||\vec{n}|}=\frac{1}{\sqrt{\tan^2\alpha+\tan^2\beta+1}}$$

正方形 OABC の面積が 1 であるから，求める面積を S とすると

$$S\cos\theta=1 \quad よって \quad S=\frac{1}{\cos\theta}=\sqrt{\tan^2\alpha+\tan^2\beta+1}$$

(2) $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$ より，$\tan(\alpha+\beta)=1$ であるから

$\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=1$ ゆえに $\tan\alpha\tan\beta=1-\tan\alpha-\tan\beta$ $\cdots$①

$S=\dfrac{7}{6}$ より，(1) の結果から

$\sqrt{1+\tan^2\alpha+\tan^2\beta}=\dfrac{7}{6}$ ゆえに $\tan^2\alpha+\tan^2\beta=\dfrac{13}{36}$ $\cdots$②

①，② を $\tan^2\alpha+\tan^2\beta=(\tan\alpha+\tan\beta)^2-2\tan\alpha\tan\beta$ に代入すると

$$\frac{13}{36}=(\tan\alpha+\tan\beta)^2-2(1-\tan\alpha-\tan\beta)$$

したがって $(\tan\alpha+\tan\beta+1)^2=\dfrac{121}{36}$

$\tan\alpha+\tan\beta>0$ であるから $\boldsymbol{\tan\alpha+\tan\beta=\dfrac{5}{6}}$

これを ① に代入して $\tan\alpha\tan\beta=\dfrac{1}{6}$

上の 2 式から，$\tan\alpha$，$\tan\beta$ を解とする 2 次方程式は

$$x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}=0 \quad \text{これを解いて} \quad x=\frac{1}{3},\ \frac{1}{2}$$

$0<\alpha\leqq\beta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ であるから $\tan\alpha\leqq\tan\beta$ より $\boldsymbol{\tan\alpha=\dfrac{1}{3}}$

別解 ① より，$1-\tan\alpha\tan\beta=\tan\alpha+\tan\beta$ の両辺を平方すると

$$(1-\tan\alpha\tan\beta)^2=(\tan\alpha+\tan\beta)^2$$

整理すると $\tan^2\alpha\tan^2\beta-4\tan\alpha\tan\beta+1=\tan^2\alpha+\tan^2\beta$

上式に ② を代入して，整理すると

$$\tan^2\alpha\tan^2\beta-4\tan\alpha\tan\beta+\frac{23}{36}=0$$

$$\left(\tan\alpha\tan\beta-\frac{1}{6}\right)\left(\tan\alpha\tan\beta-\frac{23}{6}\right)=0$$

$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$ より，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{4}$ であるから $0<\tan\alpha\tan\beta<1$

したがって $\tan\alpha\tan\beta=\dfrac{1}{6}$ ① より $\tan\alpha+\tan\beta=\dfrac{5}{6}$ 以下同様

外積 (ベクトル積)

2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ が平行でないとき，ベクトル

$$(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$$

は，$\vec{a}$ および $\vec{b}$ に直交する．このベクトルを，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**外積 (ベクトル積)** と言い，$\boldsymbol{\vec{a}\times\vec{b}}$ で表し (内積をスカラー積とも言う)，その成分は

$$\boldsymbol{\vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)}$$

であるから，$\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$ が成り立つ．また，その大きさについて

$$\begin{aligned}|\vec{a}\times\vec{b}|^2&=(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2\\&=({a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2)({b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\\&=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2\end{aligned}$$

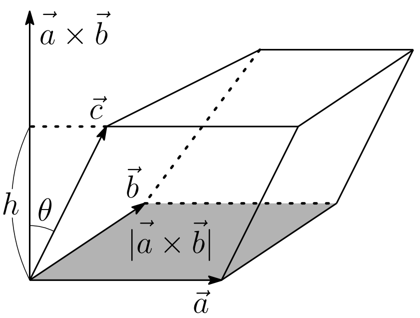
であるから，$\vec{a}\times\vec{b}$ の大きさは，$\vec{a}$，$\vec{b}$ の張る平行四辺形の面積に等しい．

$\vec{a}\times\vec{b}$ と $\vec{c}$ のなす角を θ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とすると

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=|\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}|\cos\theta$$

絶対値をとると

$$|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|=|\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}||\cos\theta|$$



$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の張る平行六面体について，$\vec{a}$，$\vec{b}$ の張る平面を底面とすると，$|\vec{c}||\cos\theta|$ は，その高さ h であるから，この平行六面体の体積 V_1 は

$$\boldsymbol{V_1=|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とすると，四面体 OABC の体積 V は

$$\boldsymbol{V=\frac{1}{6}|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|}$$

また，対称性により，次式が成立する．

$$|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|=|(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}|=|(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}|$$

■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 1 回目の袋 U の中には白球が $a+2$ 個，赤球が 1 個入っているから

$$p_1 = \frac{1}{(a+2)+1} = \boldsymbol{\frac{1}{a+3}}$$

1 回目に赤球が出ると，2 回目に球を取り出すとき，袋 U の中には赤球はない．1 回目に白球が出て，2 回目 (袋 U の中に白球 a 個，赤球が 1 個) に赤球が出る確率であるから

$$p_2 = (1-p_1)\times\frac{1}{a+1} = \left(1-\frac{1}{a+3}\right)\frac{1}{a+1} = \boldsymbol{\frac{a+2}{(a+1)(a+3)}}$$

(2) (i) n 回目 ($n \geqq 1$) の試行で赤球が出たとき (確率 p_n)，$n+1$ 回目の試行 (袋 U の中に赤球は 0 個) で赤球が出る確率は　0

(ii) n 回目 ($n \geqq 1$) の試行で白球が出たとき (確率 $1-p_n$)，$n+1$ 回目の試行 (袋 U の中に白球 a 個，赤球 1 個) で赤球が出る確率は

$$(1-p_n)\times\frac{1}{a+1}$$

(i)，(ii) より　$p_{n+1} = 0 + (1-p_n)\times\frac{1}{a+1} = \frac{1}{a+1}(1-p_n)$

したがって　$p_{n+1} - \frac{1}{a+2} = -\frac{1}{a+1}\left(p_n - \frac{1}{a+2}\right)$

よって，$n \geqq 1$ のとき

$$p_n - \frac{1}{a+2} = \left(p_1 - \frac{1}{a+2}\right)\left(-\frac{1}{a+1}\right)^{n-1}$$

$$\boldsymbol{p_n = \frac{1}{a+2} - \frac{1}{(a+2)(a+3)}\left(-\frac{1}{a+1}\right)^{n-1}}$$

(3) (2) の結果から，$r = -\frac{1}{a+1}$ とおくと

$$\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} p_n = \frac{1}{a+2} - \frac{1}{m(a+2)(a+3)}\sum_{n=1}^{m} r^{n-1}$$

$$= \frac{1}{a+2} - \frac{1}{m}\cdot\frac{1}{(a+2)(a+3)}\cdot\frac{1-r^{m-1}}{1-r}$$

$|r| < 1$ であるから，$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m} = 0$，$\lim_{m\to\infty} r^{m-1} = 0$ より

$$\boldsymbol{\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} p_n = \frac{1}{a+2}}$$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $C_1 : y = -x^2 + 1$，$C_2 : y = (x-u)^2 + u$

C_1 と C_2 から y を消去すると，x に関する 2 次方程式

$$-x^2 + 1 = (x-u)^2 + u \quad \text{すなわち} \quad 2x^2 - 2ux + u^2 + u - 1 = 0 \quad \cdots (*)$$

を得る．$(*)$ が実数解をもつから，係数について

$$D/4 = (-u)^2 - 2(u^2 + u - 1) = -u^2 - 2u + 2 \geqq 0$$

ゆえに　$u^2 + 2u - 2 \leqq 0$　これを解いて　$-1 - \sqrt{3} \leqq u \leqq -1 + \sqrt{3}$

よって　$\boldsymbol{a = -1 - \sqrt{3},\ b = -1 + \sqrt{3}}$

(2) x_1，x_2 は 2 次方程式 $(*)$ の解であるから，解と係数の関係により

$$x_1 + x_2 = u, \quad x_1 x_2 = \frac{u^2 + u - 1}{2}$$

よって

$$\begin{aligned} 2|x_1 y_2 - x_2 y_1| &= 2|x_1(-x_2{}^2 + 1) - x_2(-x_1{}^2 + 1)| \\ &= 2|x_1 x_2 + 1||x_1 - x_2| \\ &= 2\left|\frac{u^2 + u - 1}{2} + 1\right| \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} \\ &= (u^2 + u + 1)\sqrt{u^2 - 2(u^2 + u - 1)} \\ &= \boldsymbol{(u^2 + u + 1)\sqrt{-u^2 - 2u + 2}} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から　$f(u) = (u^2 + u + 1)\sqrt{-u^2 - 2u + 2}$

$$I = \int_a^b f(u)\,du = \int_a^b \{(u+1)^2 - (u+1) + 1\}\sqrt{3 - (u+1)^2}\,du$$

$u + 1 = \sqrt{3}\sin\theta$ とおくと　$\dfrac{du}{d\theta} = \sqrt{3}\cos\theta$

u	$a \longrightarrow b$
θ	$-\frac{\pi}{2} \longrightarrow \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{3\sin^2\theta + \sqrt{3}\sin\theta + 1\}\cdot 3\cos^2\theta\,d\theta \\ &= 6\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\sin^2\theta\cos^2\theta + \cos^2\theta)\,d\theta \\ &= 6\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\frac{3}{8}(1 - \cos 4\theta) + \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)\right\} d\theta \\ &= 6\left[\frac{3}{8}\left(\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta\right) + \frac{1}{2}\left(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{\frac{21}{8}\pi} \end{aligned}$$

ウォリス (Wallis) の積分

m を 0 以上の整数とする．定積分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m \theta \, d\theta$$

を $\theta = \dfrac{\pi}{2} - u$ とおくと　$\dfrac{d\theta}{du} = -1$

θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$
u	$\frac{\pi}{2} \longrightarrow 0$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m \theta \, d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^m \left(\frac{\pi}{2} - u\right) (-du) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m u \, du$$

ウォリス積分は次式で定義される (m は 0 以上の整数).

$$I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m \theta \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m \theta \, d\theta$$

部分積分法により

$$\begin{aligned} I_{m+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m+2} \theta \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)' \cos^{m+1} \theta \, d\theta \\ &= \Big[\sin\theta \cos^{m+1} \theta \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + (m+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos^m \theta \, d\theta \\ &= (m+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 \theta) \cos^m \, d\theta \\ &= (m+1)(I_m - I_{m+2}) \end{aligned}$$

したがって，漸化式 $I_{m+2} = \dfrac{m+1}{m+2} I_m$ を得る．これから

$$I_0 = \frac{\pi}{2}, \quad I_2 = \frac{1}{2} I_0 = \frac{\pi}{4}, \quad I_4 = \frac{3}{4} I_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} I_0 = \frac{3}{16}\pi$$

本題の途中計算から

$$\begin{aligned} \frac{I}{6} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\sin^2\theta\cos^2\theta + \cos^2\theta) \, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\cos^2\theta - 3\cos^4\theta) \, d\theta \\ &= 4I_2 - 3I_4 = 4 \cdot \frac{\pi}{4} - 3 \cdot \frac{3}{16}\pi = \frac{7}{16}\pi \end{aligned}$$

よって　　$I = \dfrac{21}{8}\pi$

n を自然数とすると

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{I_{2k}}{I_{2k-2}}=\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}=\prod_{k=1}^{n}\frac{2k(2k-1)}{(2k)^2}$$

$$\frac{I_{2n}}{I_0}=\prod_{k=1}^{n}\frac{2k(2k-1)}{2^2k^2}=\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}=\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{2^{2n}}$$

上式は，$n=0$ のときも成立する．$I_0=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta=\frac{\pi}{2}$ より

$$\boldsymbol{I_{2n}=\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{2^{2n+1}}\pi\quad(n=0,1,2,\cdots)}$$

n を自然数とすると

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{I_{2k+1}}{I_{2k-1}}=\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k+1}=\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)^2}{(2k+1)\cdot 2k}$$

$$\frac{I_{2n+1}}{I_1}=\prod_{k=1}^{n}\frac{2^2k^2}{(2k+1)\cdot 2k}$$

$$=\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}=\frac{2^{2n}}{(2n+1)\cdot{}_{2n}\mathrm{C}_n}$$

上式は，$n=0$ のときも成立する．$I_1=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta=1$ より

$$\boldsymbol{I_{2n+1}=\frac{2^{2n}}{(2n+1)\cdot{}_{2n}\mathrm{C}_n}\quad(n=0,1,2,\cdots)}$$

発展

積分公式

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

が成り立つ[1]．これに $m=n=\dfrac{1}{2}$，$\alpha=-1$，$\beta=1$ を代入すると

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\left(\frac{1}{2}!\right)^2}{2!}\cdot 2^2$$

左辺は，中心を原点とする半径 1 の円の x 軸の上側にある半円の面積であるから

$$\frac{\pi}{2} = 2\left(\frac{1}{2}!\right)^2 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{2}! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

さらに，$\dfrac{3}{2}! = \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{2}! = \dfrac{3}{4}\sqrt{\pi}$，$\dfrac{5}{2}! = \dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{2}! = \dfrac{15}{8}\sqrt{\pi}$，$\cdots$ となる．

$$\begin{aligned}
I &= \int_a^b f(u)\,du = \int_a^b \{-(-u^2-2u+2)-(u+1)+4\}\sqrt{-u^2-2u+2}\,du \\
&= -\int_a^b (u-a)^{\frac{3}{2}}(b-u)^{\frac{3}{2}}\,du + \frac{1}{3}\Big[\,(-u^2-2u+2)^{\frac{3}{2}}\Big]_a^b \\
&\qquad\qquad\qquad + 4\int_a^b (u-a)^{\frac{1}{2}}(b-u)^{\frac{1}{2}}\,du \\
&= -\frac{\left(\frac{3}{2}!\right)^2}{4!}(2\sqrt{3})^4 + 0 + 4\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}!\right)^2}{2!}(2\sqrt{3})^2 \\
&= -6\left(\frac{3}{4}\sqrt{\pi}\right)^2 + 24\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2 = \frac{21}{8}\pi
\end{aligned}$$

■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf の $\boxed{1}$ を参照．

$\boxed{4}$ (1) $0<p<1$，$q>0$ より，$0<x<1$ のとき

$$0<(1-p)x, \quad 0<1-x<1, \quad 0<1-e^{-qx}<1$$

ゆえに　$0<(1-p)x<(1-p)x+(1-x)(1-e^{-qx})$,

また　$(1-p)x+(1-x)(1-e^{-qx})<(1-p)x+(1-x)\cdot 1$
$=1-px<1$

よって　$0<x<1$ のとき　$0<f(x)<1$

(2) (1) の結果から，$0<x_{k-1}<1$ のとき

$$0<f(x_{k-1})<1 \quad \text{すなわち} \quad 0<x_k<1$$

$0<x_0<1$ であるから　$0<x_n<1 \quad (n=1,2,3,\cdots)$

また，$1+(-qx_n) \leqq e^{-qx_n}$ であるから，$1-e^{-qx_n} \leqq qx_n$ より

$$\begin{aligned} x_{n+1}=f(x_n)&=(1-p)x_n+(1-x_n)(1-e^{-qx_n}) \\ &<(1-p)x_n+1\cdot qx_n=(1-p+q)x_n \end{aligned}$$

したがって　$0<x_n<(1-p+q)^n x_0$

$0<q<p<1$ より，$0<1-p<1-p+q<1$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}(1-p+q)^n=0$$

はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=0$

補足 平均値の定理により

$$\frac{f(x_n)-f(0)}{x_n-0}=f'(c_n), \quad 0<c_n<x_n$$

をみたす c_n が存在する．

$f''(x)<0 \ (0<x<1)$ より (次頁参照)，$f'(x)$ は単調減少．

また，$x_{n+1}=f(x_n)$，$f(0)=0$ であるから

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=f'(c_n)<f'(0)=1-p+q$$

したがって　$x_{n+1}<(1-p+q)x_n$

(3) $f(x) = (1-p)x + (1-x)(1-e^{-qx})$ より

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1-p-(1-e^{-qx}) + q(1-x)e^{-qx} \\ &= -p + e^{-qx} + q(1-x)e^{-qx}, \\ f''(x) &= -qe^{-qx} - qe^{-qx} - q^2(1-x)e^{-qx} \\ &= -q\{2+q(1-x)\}e^{-qx} < 0 \quad (0 < x < 1) \end{aligned}$$

ゆえに　$f'(0) = 1-p+q > 1$，$f'(1) = -p+e^{-q} < 1$

$f'(x)$ は，$0 < x < 1$ で単調減少であるから

$$f'(\alpha) = 1, \quad (0 < \alpha < 1)$$

をみたす α が唯一存在する．

$$g(x) = \int_0^\alpha \{f'(t)-1\}\,dt + \int_\alpha^x \{f'(t)-1\}\,dt$$

とおくと　$g(\alpha) > 0$，$g(1) = f(1) - f(0) - 1 = (1-p) - 0 - 1 = -p < 0$

中間値の定理により，$g(c) = 0$ をみたす $\alpha < c < 1$ が存在するから

$$\begin{aligned} g(c) &= \int_0^c \{f'(t)-1\}\,dt = \Big[\, f(t) - t \,\Big]_0^c \\ &= f(c) - f(0) - c = f(c) - c = 0 \end{aligned}$$

よって，$c = f(c)$, $0 < c < 1$ をみたす実数 c が存在する．

補足 $g'(x) = f'(x) - 1$ であるから，$\alpha < x < 1$ において

$$g'(x) < 0$$

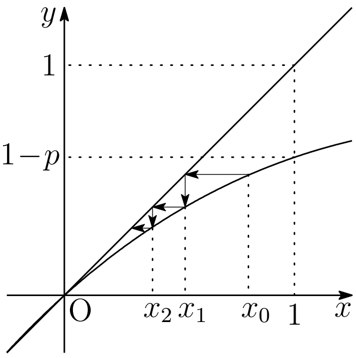
したがって，$\alpha < x < 1$ において，$g'(x)$ は単調減少．
よって，$g(c) = 0$，すなわち

$$f(c) = c, \quad \alpha < c < 1$$

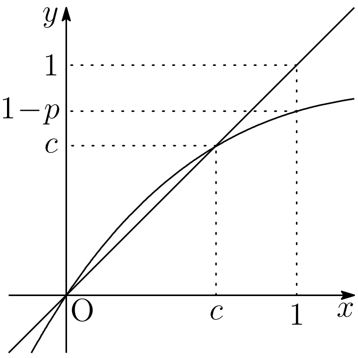
をみたす c はただ一つ存在する．

解説 $f'(x)$ は $0<x<1$ で単調減少，$f'(0)=1-p+q>0$，$f'(1)=-p+e^{-q}<1$ であるから，$y=f(x)$ と $y=x$ のグラフは，(2) $p>q$，(3) $p<q$ のとき，次のようになる．

$p>q$ のとき



$p<q$ のとき



$p<q$ のとき，$\mathrm{C}(c,\ c)$，$\mathrm{P}_n(x_n,\ f(x_n))$ とし，直線 CP_n の傾きから

$$0<\frac{f(x_n)-c}{x_n-c}<1 \quad \text{ゆえに} \quad 0<\frac{x_{n+1}-c}{x_n-c}<1$$

ゆえに　$0<x_0<c$ のとき　$0<x_n<x_{n+1}<c$　$\cdots$①

　　　　$c<x_0<1$ のとき　$c<x_{n+1}<x_n<1$　$\cdots$②

① から，上に有界な単調増加列 $\{x_n\}$ は収束し，② から，下に有界な単調減少列 $\{x_n\}$ は収束する．$\dfrac{x_{n+1}-c}{x_n-c}$ の上限を m とすると [2]

$$0<\prod_{k=0}^{n-1}\frac{x_{k+1}-c}{x_k-c}<m^n \quad \text{すなわち} \quad 0<\frac{x_n-c}{x_0-c}<m^n$$

$0<m<1$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} m^n=0$　よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n=c$　■

5 (1) a_n を素数 p で割った余りが b_n であるから

$$a_{n+2}\equiv b_{n+2},\quad a_{n+1}\equiv b_{n+1},\quad a_n\equiv b_n \qquad (\mathrm{mod}\ p)$$

また，$a_{n+2}=a_{n+1}(a_n+1)$ であるから　$b_{n+2}\equiv b_{n+1}(b_n+1)\ \ (\mathrm{mod}\ p)$

よって，b_{n+2} は $b_{n+1}(b_n+1)$ を p で割った余りと一致する．

---

[2] 上限 m は，$0<x_0<c$ のとき $m=\dfrac{x_1-c}{x_0-c}$，$c<x_0<1$ のとき $m=f'(c)$

(2) $r=2$ のとき，$a_1=2$，$a_2=3$ であるから，(1) の結果を用いると

$$b_1 \equiv 2,\ \ b_2 \equiv 3,\ \ b_{n+2}=b_{n+1}(b_n+1) \pmod{17}$$

したがって，法 17 について

$$\begin{aligned}
b_3 &\equiv b_2(b_1+1) \equiv 3(2+1) \equiv 9\\
b_4 &\equiv b_3(b_2+1) \equiv 9(3+1) \equiv 36 \equiv 2\\
b_5 &\equiv b_4(b_3+1) \equiv 2(9+1) \equiv 20 \equiv 3\\
b_6 &\equiv b_5(b_4+1) \equiv 3(2+1) \equiv 9\\
b_7 &\equiv b_6(b_5+1) \equiv 9(3+1) \equiv 36 \equiv 2\\
b_8 &\equiv b_7(b_6+1) \equiv 2(9+1) \equiv 20 \equiv 3\\
b_9 &\equiv b_8(b_7+1) \equiv 3(2+1) \equiv 9\\
b_{10} &\equiv b_9(b_8+1) \equiv 9(3+1) \equiv 36 \equiv 2
\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{b_1=2,\ \ b_2=3,\ \ b_3=9,\ \ b_4=2,\ \ b_5=3,}$
$\boldsymbol{b_6=9,\ \ b_7=2,\ \ b_8=3,\ \ b_9=9,\ \ b_{10}=2}$

(3) (1) の結果を用いると

$$b_{n+2} \equiv b_{n+1}(b_n+1),\quad b_{m+2} \equiv b_{m+1}(b_m+1) \pmod{p}$$

$b_{n+2}=b_{m+2}$ より　$b_{n+1}(b_n+1) \equiv b_{m+1}(b_m+1) \pmod{p}$

$q=b_{n+1}=b_{m+1}$ とおくと $(q>0)$

$$q(b_n+1) \equiv q(b_m+1) \quad \text{ゆえに} \quad q(b_n-b_m) \equiv 0 \pmod{p}$$

$q \not\equiv 0 \pmod{p}$ であるから　$b_n-b_m \equiv 0$　すなわち　$b_n \equiv b_m \pmod{p}$

よって，$b_n=b_m$ が成り立つ．

(4) 1 から $p-1$ までの $p-1$ 個の数から重複を許して 2 個並べる順列の総数は $(p-1)^2$ であるから，n，m を $(p-1)^2+1$ 以下の自然数とするとき

$$b_n=b_m,\quad b_{n+1}=b_{m+1} \quad (n \neq m)$$

をみたす自然数 n，m が存在する．(3) の結果から，$|m-n|$ 個の数が巡回する．このとき，巡回する数に 0 を含まないから　$b_1 \neq 0$

したがって　$a_1 \equiv b_1 \neq 0 \pmod{p}$

よって，a_1 は p で割り切れない．■

6 (1) $\mathrm{P}(p,\ \sqrt{3}p)$，$\mathrm{Q}(q, -\sqrt{3}q)$ とすると $(0 \leqq p \leqq 2, -2 \leqq q \leqq 0)$，

$$\mathrm{OP} = 2p, \quad \mathrm{OQ} = -2q$$

$\mathrm{OP} + \mathrm{OQ} = 6$ であるから　$2p + (-2q) = 6$　ゆえに　$q = p - 3$

したがって　$0 \leqq p \leqq 2,\ -2 \leqq p - 3 \leqq 0$　すなわち　$1 \leqq p \leqq 2$

2 点 $\mathrm{P}(p,\ \sqrt{3}p)$，$\mathrm{Q}(p-3, -\sqrt{3}(p-3))$ を通る直線は

$$y - \sqrt{3}p = \frac{2p-3}{\sqrt{3}}(x - p)$$

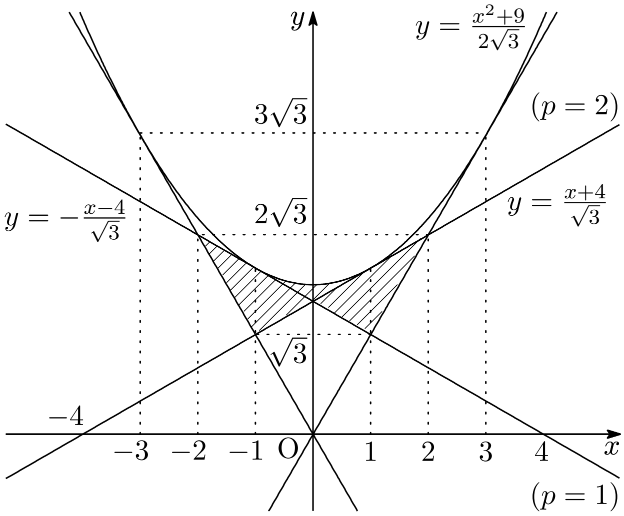
すなわち　$$y = \frac{(2p-3)x - 2p^2 + 6p}{\sqrt{3}} \quad \cdots ①$$

直線 ① の x を固定し，y が極値をとる点では，$\dfrac{dy}{dp} = 0$ であるから

$$\frac{dy}{dp} = \frac{1}{\sqrt{3}}(2x - 4p + 6) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad x = 2p - 3 \quad \cdots ②$$

①，② から p を消去すると　$$y = \frac{x^2 + 9}{2\sqrt{3}} \quad \cdots (*)$$

D は，$1 \leqq p \leqq 2$ のとき，2 点 $\mathrm{P}(p,\ \sqrt{3}p)$，$\mathrm{Q}(p-3, -\sqrt{3}(p-3))$ を結ぶ線分 PQ(直線 ①) が通過する領域であるから，$(*)$ が直線 PQ の包絡線であることに注意すると，その領域は，下の図の斜線部分で，境界線を含む.



よって，$0 \leqq s \leqq 2$ をみたす点 $(s,\ t)$ が D にあるとき

$$\boldsymbol{0 \leqq s \leqq 1} \ \textbf{のとき} \quad \boldsymbol{-\frac{s-4}{\sqrt{3}} \leqq t \leqq \frac{s^2+9}{2\sqrt{3}}}$$

$$\boldsymbol{1 \leqq s \leqq 2} \ \textbf{のとき} \quad \boldsymbol{\sqrt{3}s \leqq t \leqq \frac{s+4}{\sqrt{3}}}$$

(2) 領域 D は (1) で示した領域. ■