平成25年度　東京大学2次試験前期日程(数学問題)150分
理科(一類，二類，三類)　数I・II・III・A・B・C

問題 1 2 3 4 5 6

1 実数 a，b に対し平面上の点 $\mathrm{P}_n(x_n,\ y_n)$ を

$$(x_0,\ y_0) = (1,\ 0)$$
$$(x_{n+1},\ y_{n+1}) = (ax_n - by_n,\ bx_n + ay_n) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

によって定める．このとき，次の条件 (i)，(ii) がともに成り立つような $(a,\ b)$ をすべて求めよ．

(i) $\mathrm{P}_0 = \mathrm{P}_6$

(ii) P_0，P_1，P_2，P_3，P_4，P_5 は相異なる．

2 a を実数とし，$x > 0$ で定義された関数 $f(x)$，$g(x)$ を次のように定める．

$$f(x) = \frac{\cos x}{x}$$
$$g(x) = \sin x + ax$$

このとき $y = f(x)$ のグラフと $y = g(x)$ のグラフが $x > 0$ において共有点をちょうど3つ持つような a をすべて求めよ．

3 A，B の2人がいる．投げたとき表裏の出る確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ のコインが1枚あり，最初は A がそのコインを持っている．次の操作を繰り返す．

(i) A がコインを持っているときは，コインを投げ，表が出れば A に1点を与え，コインは A がそのまま持つ．裏が出れば，両者に点を与えず，A はコインを B に渡す．

(ii) B がコインを持っているときは，コインを投げ，表が出れば B に1点を与え，コインは B がそのまま持つ．裏が出れば，両者に点を与えず，B はコインを A に渡す．

そして A，B のいずれかが2点を獲得した時点で，2点を獲得した方の勝利とする．たとえば，コインが表，裏，表，表と出た場合，この時点で A は1点，B は2点を獲得しているので B の勝利となる．

(1) A，B あわせてちょうど n 回コインを投げ終えたときに A の勝利となる確率 $p(n)$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} p(n)$ を求めよ．

4 $\triangle$ABC において $\angle$BAC $= 90^\circ$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 1$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = \sqrt{3}$ とする．$\triangle$ABC の内部の点 P が

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|} + \frac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|} + \frac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|} = \vec{0}$$

を満たすとする．

(1) $\angle$APB，$\angle$APC を求めよ．

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|$ を求めよ．

5 次の命題 P を証明したい．

命題 P　次の条件 (a)，(b) をともに満たす自然数 (1 以上の整数) A が存在する．

(a) A は連続する 3 つの自然数の積である．

(b) A を 10 進法で表したとき，1 が連続して 99 回以上現れるところがある．

以下の問いに答えよ．

(1) y を自然数とする．このとき不等式

$$x^3 + 3yx^2 < (x+y-1)(x+y)(x+y+1) < x^3 + (3y+1)x^2$$

が成り立つような正の実数 x の範囲を求めよ．

(2) 命題 P を証明せよ．

6 座標空間において，xy 平面内で不等式 $|x| \leqq 1$，$|y| \leqq 1$ により定まる正方形 S の 4 つの頂点を A$(-1,\ 1,\ 0)$，B$(1,\ 1,\ 0)$，C$(1, -1,\ 0)$，D$(-1, -1,\ 0)$ とする．正方形 S を，直線 BD を軸として回転させてできる立体を V_1，直線 AC を軸として回転させてできる立体を V_2 とする．

(1) $0 \leqq t < 1$ を満たす実数 t に対し，平面 $x = t$ による V_1 の切り口の面積を求めよ．

(2) V_1 と V_2 の共通部分の体積を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ $r=\sqrt{a^2+b^2},\ \cos\theta=\dfrac{a}{r},\ \sin\theta=\dfrac{b}{r}$ とおくと $(r \geqq 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

$\mathrm{P}_6=\mathrm{P}_0$ より $\quad r^6\begin{pmatrix} \cos 6\theta & -\sin 6\theta \\ \sin 6\theta & \cos 6\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

ゆえに $\quad r^6\cos 6\theta=1$，$r^6\sin 6\theta=0$ $\quad$ すなわち $\quad r=1$，$6\theta=2k\pi$ (k は整数)

$\theta=\dfrac{k\pi}{3}$ より，条件 (ii) を満たす k は $\quad k=1,\ 5$

$\theta=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi$ より $\quad \boldsymbol{(a,\ b)=\left(\dfrac{1}{2},\ \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}$ ■

2 $f(x) = g(x)$ とすると $(x > 0)$

$$\frac{\cos x}{x} = \sin x + ax \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x} = a$$

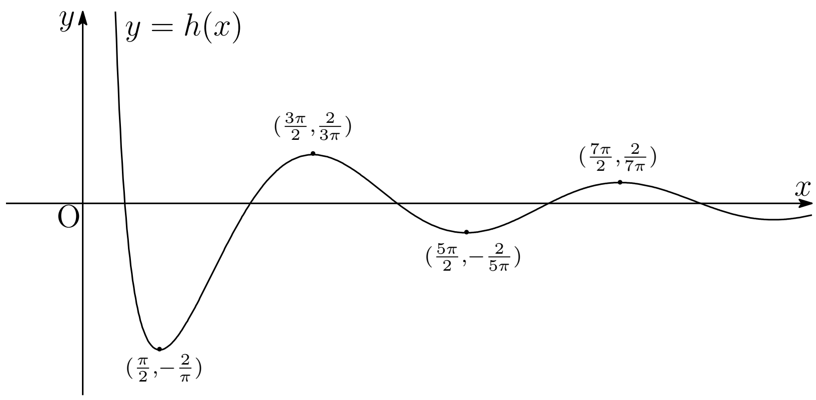
$h(x) = \dfrac{\cos x}{x^2} - \dfrac{\sin x}{x}$ とおくと $h'(x) = -\dfrac{(x^2+2)\cos x}{x^3}$

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{5\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{7\pi}{2}$	$\cdots$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$		$\searrow$	$-\frac{2}{\pi}$	$\nearrow$	$\frac{2}{3\pi}$	$\searrow$	$-\frac{2}{5\pi}$	$\nearrow$	$\frac{2}{7\pi}$	$\searrow$

n を自然数とすると，次の極値をとる．

$$\text{極小値}\, h\left(\frac{4n-3}{2}\pi\right) = -\frac{2}{(4n-3)\pi}, \quad \text{極大値}\, h\left(\frac{4n-1}{2}\pi\right) = \frac{2}{(4n-1)\pi}$$

また $\displaystyle\lim_{x\to+0} h(x) = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} h(x) = 0$



$x > 0$ において $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフの共有点がちょうど 3 個あることと，$y = h(x)$ のグラフと $y = a$ のグラフの共有点がちょうど 3 個あることとと同値である．よって，上のグラフから，求める a は

$$\boldsymbol{\frac{2}{7\pi} < a < \frac{2}{3\pi}, \quad a = -\frac{2}{5\pi}}$$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 3 回コインを投げ終えたとき，A と B の勝敗は次のようになる．

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$

表 ─ 表 $\cdots$ (2 回目に A の勝利)
表 ─ 裏 ─ 表 $\cdots$ $\mathrm{A}:1-1:\mathrm{B}$
表 ─ 裏 ─ 裏 $\cdots$ $\mathrm{A}:1-0:\mathrm{B}$
裏 ─ 表 ─ 表 $\cdots$ (3 回目に B の勝利)
裏 ─ 表 ─ 裏 $\cdots$ $\mathrm{A}:0-1:\mathrm{B}$
裏 ─ 裏 ─ 表 $\cdots$ $\mathrm{A}:1-0:\mathrm{B}$
裏 ─ 裏 ─ 裏 $\cdots$ $\mathrm{A}:0-0:\mathrm{B}$

したがって　$p(1)=0$，$p(2)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$，$p(3)=0 \quad \cdots(*)$

コインをちょうど n 回投げ終え $(n \geqq 4)$，A が勝利するとき，A と B の得点の推移は，次の (i)〜(iii) である．

(i) n 回目よりも前に A だけが得点するのは奇数回目で，n は偶数．

$$\begin{array}{c} \mathrm{A\,B}\cdots\mathrm{A\,B}\ \mathrm{A}\ \mathrm{A\,B}\cdots\mathrm{A\,B}\ \mathrm{A} \\ \underbrace{\text{裏裏}\cdots\text{裏裏}}_{\text{偶数個}}\ \text{表}\ \underbrace{\text{裏裏}\cdots\text{裏裏}}_{\text{偶数個}}\ \text{表} \end{array}$$

1 から $n-1$ の整数の中に奇数は $\dfrac{n}{2}$ 個で，この確率は　$\dfrac{n}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=\dfrac{n}{2^{n+1}}$

(ii) n 回目よりも前に A，B の順に得点するのは奇数回目で，n は奇数．

$$\begin{array}{c} \mathrm{A\,B}\cdots\mathrm{A\,B}\ \mathrm{A}\ \mathrm{A\,B}\cdots\mathrm{A}\ \mathrm{B}\ \mathrm{B\,A}\cdots\mathrm{B}\ \mathrm{A} \\ \underbrace{\text{裏裏}\cdots\text{裏裏}}_{\text{偶数個}}\ \text{表}\ \underbrace{\text{裏裏}\cdots\text{裏}}_{\text{奇数個}}\ \text{表}\ \underbrace{\text{裏裏}\cdots\text{裏}}_{\text{奇数個}}\ \text{表} \end{array}$$

1 から $n-1$ の整数の中に奇数は $\dfrac{n-1}{2}$ 個で，この確率は

$$_{\frac{n-1}{2}}\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{(n-1)(n-3)}{2^{n+3}}$$

(iii) n 回目よりも前に B，A の順に得点するのは偶数回目で，n は奇数．

$$\begin{array}{c} \mathrm{A\,B}\cdots\mathrm{A}\ \mathrm{B}\ \mathrm{B\,A}\cdots\mathrm{B}\ \mathrm{A}\ \mathrm{A\,B}\cdots\mathrm{A\,B}\ \mathrm{A} \\ \underbrace{\text{裏裏}\cdots\text{裏}}_{\text{奇数個}}\ \text{表}\ \underbrace{\text{裏裏}\cdots\text{裏}}_{\text{奇数個}}\ \text{表}\ \underbrace{\text{裏裏}\cdots\text{裏裏}}_{\text{偶数個}}\ \text{表} \end{array}$$

1 から $n-1$ の整数の中に偶数は $\dfrac{n-1}{2}$ 個で，この確率は

$$_{\frac{n-1}{2}}\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{(n-1)(n-3)}{2^{n+3}}$$

n が偶数のとき，(i) より　　$p(n)=\dfrac{n}{2^{n+1}}\quad(n \geqq 4)$

n が奇数のとき，(ii)，(iii) より

$$p(n)=\frac{(n-1)(n-3)}{2^{n+3}}+\frac{(n-1)(n-3)}{2^{n+3}}=\frac{(n-1)(n-3)}{2^{n+2}}\quad(n \geqq 5)$$

$(*)$ に注意すると，上の 2 式は $n=1,2,3$ のときも成立するから

$$\boldsymbol{p(n)=\begin{cases}\dfrac{(n-1)(n-3)}{2^{n+2}} & (n\ \text{が奇数})\\[2mm] \dfrac{n}{2^{n+1}} & (n\ \text{が偶数})\end{cases}}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}p(n)&=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\{(2k-1)-1\}\{(2k-1)-3\}}{2^{(2k-1)+2}}+\frac{2k}{2^{2k+1}}\right)\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k^2-5k+4}{2^{2k}}\\&=\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{\infty}k(k-1)\left(\frac{1}{4}\right)^{k-2}-\frac{3}{4}\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}\\&=\frac{1}{8}\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)\left(\frac{1}{4}\right)^{k-2}-\frac{3}{4}\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{k}\end{aligned}$$

ここで，$f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}x^k=\frac{1}{1-x}$ とすると $(0<|x|<1)$

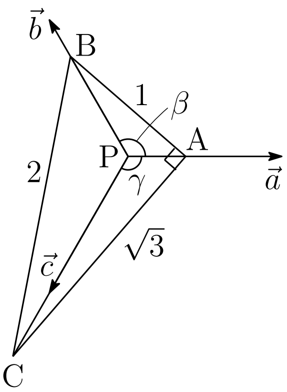
$$\begin{aligned}f'(x)&=\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}=\frac{1}{(1-x)^2}\\f''(x)&=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)x^{k-2}=\frac{2}{(1-x)^3}\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}p(n)&=\frac{1}{8}f''\left(\frac{1}{4}\right)-\frac{3}{4}f'\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{1}{4}\right)\\&=\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^3}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2}+\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\\&=\frac{16}{27}-\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\boldsymbol{\frac{16}{27}}\end{aligned}$$

■

4 (1) $\beta = \angle\mathrm{APB}$, $\gamma = \angle\mathrm{APC}$,



$\vec{a} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|}$，$\vec{b} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}$，$\vec{c} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|}$ とおくと

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は単位ベクトルであるから

$$\vec{a} = (1,\ 0),\quad \vec{b} = (\cos\beta,\ \sin\beta),$$
$$\vec{c} = (\cos\gamma, -\sin\gamma)$$

とすると，$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ より $\quad (*)\begin{cases} 1+\cos\beta+\cos\gamma = 0 \\ \sin\beta - \sin\gamma = 0 \end{cases}$

$(*)$ の第 2 式より $\quad \gamma = \beta \quad$ または $\quad \gamma = 180^\circ - \beta$

$\gamma = 180^\circ - \beta$ のとき，$(*)$ の第 1 式の左辺は 1 となり，不適.

$\gamma = \beta$ を $(*)$ の第 1 式に代入すると $\qquad 1 + 2\cos\beta = 0$

これを解いて $\quad \beta = 120^\circ \quad$ よって $\quad \boldsymbol{\angle\mathrm{APB} = \angle\mathrm{APC} = 120^\circ}$

別解 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ より $\quad |\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2$，$|\vec{a}+\vec{c}|^2 = |\vec{b}|^2$

$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$ であるから $\quad \vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{c} = -\dfrac{1}{2} \quad$ ゆえに $\quad \beta = \gamma = 120^\circ$

(2) $x = |\overrightarrow{\mathrm{PA}}|$，$y = |\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$，$z = |\overrightarrow{\mathrm{PC}}|$ とおくと，(1) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}} = x\vec{a} = x(1,\ 0) = (x,\ 0),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PB}} = y\vec{b} = y\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(-\frac{y}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}y\right),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PC}} = z\vec{c} = z\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(-\frac{z}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)$$

ゆえに $\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \left(-x-\dfrac{y}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}y\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \left(-x-\dfrac{z}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}z\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を 90° 回転させ，$\sqrt{3}$ 倍したものであるから

$$-x-\frac{z}{2} = -\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}y,\quad -\frac{\sqrt{3}}{2}z = \sqrt{3}\left(-x-\frac{y}{2}\right)$$

上の 2 式から $\quad y = 2x$，$z = 4x \quad$ このとき $\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-2x,\ \sqrt{3}x)$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 1$ であるから，$x > 0$ に注意して $\quad x = \dfrac{1}{\sqrt{7}}$

よって $\qquad \boldsymbol{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}| = \dfrac{1}{\sqrt{7}}}$，$\boldsymbol{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}| = \dfrac{2}{\sqrt{7}}}$，$\boldsymbol{|\overrightarrow{\mathrm{PC}}| = \dfrac{4}{\sqrt{7}}}$

別解 1 (1) の結果から　$\angle\mathrm{APB} = \angle\mathrm{BPC} = 120^\circ$　$\cdots$①

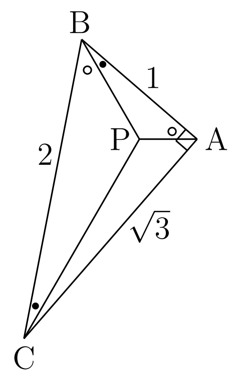
ゆえに　$\angle\mathrm{PAB} + \angle\mathrm{PBA} = 60^\circ$　$\cdots$②

$\angle\mathrm{ABC} = 60^\circ$ であるから

$$\angle\mathrm{PBC} + \angle\mathrm{PBA} = 60^\circ \quad \cdots ③$$

②，③ より　$\angle\mathrm{PAB} = \angle\mathrm{PBC}$　$\cdots$④

①，④ より　$\triangle\mathrm{PAB} \backsim \triangle\mathrm{PBC}$



相似比は $1:2$ であるから，$x = \mathrm{PA}$ とおくと

$$\mathrm{PB} = 2x, \quad \mathrm{PC} = 4x$$

$\triangle\mathrm{PAB}$ に余弦定理を適用すると

$$1^2 = x^2 + (2x)^2 - 2\cdot x\cdot 2x\cos 120^\circ \quad これを解いて \quad x = \frac{1}{\sqrt{7}}$$

よって　$\mathrm{PA} = \dfrac{1}{\sqrt{7}},\ \mathrm{PB} = \dfrac{2}{\sqrt{7}},\ \mathrm{PC} = \dfrac{4}{\sqrt{7}}$

別解 2 $x = \mathrm{PA},\ y = \mathrm{PB},\ z = \mathrm{PC}$ とし，複素数平面上において P を原点，$\mathrm{A}(x)$，$\mathrm{B}(y\omega)$，$\mathrm{C}(z\omega^2)$ とする $\left(\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)$.

$y\omega - x$ を $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転し，$\sqrt{3}$ 倍に拡大したものが $z\omega^2 - x$ であるから

$$\sqrt{3}i(y\omega - x) = z\omega^2 - x$$

ゆえに　$-\dfrac{3}{2}y + \left(-\sqrt{3}x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}y\right)i = -\dfrac{2x+z}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}zi$

x，y，z は実数であるから

$$-\frac{3}{2}y = -\frac{2x+z}{2}, \quad -\sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y = -\frac{\sqrt{3}}{2}z$$

上の 2 式から　$y = 2x,\ z = 4x$

このとき，$\mathrm{A}(x)$，$\mathrm{B}(x(-1+\sqrt{3}i))$，$\mathrm{AB} = 1$ より

$$|x(-1+\sqrt{3}i) - x| = 1 \quad ゆえに \quad x = \frac{1}{\sqrt{7}}$$

よって　$\mathrm{PA} = \dfrac{1}{\sqrt{7}},\ \mathrm{PB} = \dfrac{2}{\sqrt{7}},\ \mathrm{PC} = \dfrac{4}{\sqrt{7}}$　■

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1)

$$\begin{aligned}(x+y-1)(x+y)(x+y+1) &= (x+y)\{(x+y)^2-1\}\\ &= (x+y)^3-(x+y)\end{aligned}$$

不等式 $x^3+3yx^2 < (x+y-1)(x+y)(x+y+1) < x^3+(3y+1)x^2$ より

$$x^3+3yx^2 < (x+y)^3-(x+y) < x^3+(3y+1)x^2$$
$$0 < 3y^2x+y^3-(x+y) < x^2$$

したがって $\quad (*)\begin{cases}(3y^2-1)x+(y^3-y)>0\\ x^2-(3y^2-1)x-(y^3-y)>0\end{cases}$

y は自然数であるから，$3y^2-1>0$，$y^3-y=y(y+1)(y-1) \geqq 0$
ゆえに，すべての自然数 x について，$(*)$ の第 1 式は成立する．
よって，$x>0$ に注意して，$(*)$ の第 2 式を解くことにより

$$\boldsymbol{x > \frac{3y^2-1+\sqrt{(3y^2-1)^2+4(y^3-y)}}{2}}$$

(2) 1 桁から 99 桁まで 1 が連続する数は，各位の数の和が 99 より，3 の倍数であるから，次式を満たす自然数 y が存在する．

$$3y = \sum_{k=1}^{99} 10^{k-1}$$

$x=10^n$ $(n \geqq 99)$ とし，上の y に対して，n を十分に大きくとることで，(1) の結果を満たす x がとれる．

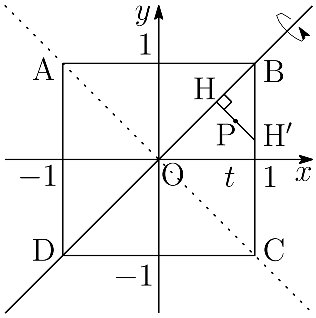
$$\begin{aligned}x^3+3yx^2+1 &= 10^{3n}+\sum_{k=1}^{99}10^{2n+k-1}+1,\\ x^3+(3y+1)x^2-1 &= x^3+3yx^2+x^2-1\\ &= 10^{3n}+\sum_{k=1}^{99}10^{2n+k-1}+10^{2n}-1\\ &= 10^{3n}+\sum_{k=1}^{99}10^{2n+k-1}+9\sum_{k=1}^{2n-1}10^k\end{aligned}$$

このとき，$N=(x+y-1)(x+y)(x+y+1)$ とおくと

$$x^3+3yx^2+1 \leqq N \leqq x^3+(3y+1)x^2-1$$

よって，N の 10^{2n} の位から 10^{2n+98} の位まで 1 が連続して 99 回現れる．■

6 (1) 立体 V_1 の点 $\mathrm{Q}(x,\ y,\ z)$ に対し，S 上に点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ 0)$，$\mathrm{H}\left(\dfrac{x+y}{2},\ \dfrac{x+y}{2},\ 0\right)$ をとると



$$\mathrm{OH}=\frac{|x+y|}{\sqrt{2}},\quad \mathrm{HP}=\frac{|x-y|}{\sqrt{2}},\quad \mathrm{PQ}=|z|$$

直線 PH と線分 BC との交点を H′ とすると

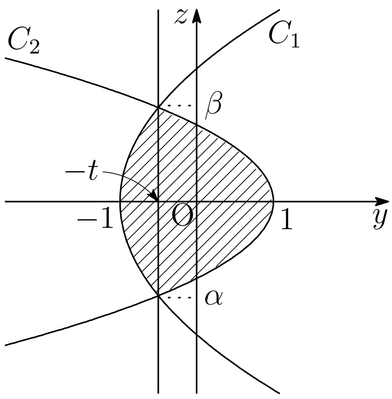
$$\mathrm{HH'}=\mathrm{HB}=\sqrt{2}-\mathrm{OH}$$

$\mathrm{HP}^2+\mathrm{PQ}^2\leqq \mathrm{HH'}^2$ であるから

$$\frac{1}{2}(x-y)^2+z^2\leqq\left(\sqrt{2}-\frac{|x+y|}{\sqrt{2}}\right)^2$$

よって，V_1 の表す領域は　$z^2-2xy\leqq 2-2|x+y|\quad\cdots(*)$

$(*)$ と平面 $x=t$ との切り口を表す領域は



$$z^2-2ty\leqq 2-2|t+y|$$

$y\geqq -t$ のとき　$z^2-2ty\leqq 2-2(t+y)$

$y\leqq -t$ のとき　$z^2-2ty\leqq 2+2(t+y)$

ゆえに

$$\frac{z^2}{2(1+t)}-1\leqq y\leqq -\frac{z^2}{2(1-t)}+1$$

2 曲線　$C_1: y=\dfrac{z^2}{2(1+t)}-1$，

$C_2: y=-\dfrac{z^2}{2(1-t)}+1$

の交点の z 座標を $\alpha,\ \beta(\alpha<\beta)$ とすると

$$\alpha=-\sqrt{2(1+t)(1-t)},\quad \beta=\sqrt{2(1+t)(1-t)}$$

C_1，C_2 は放物線であるから，求める面積を S とすると [1]

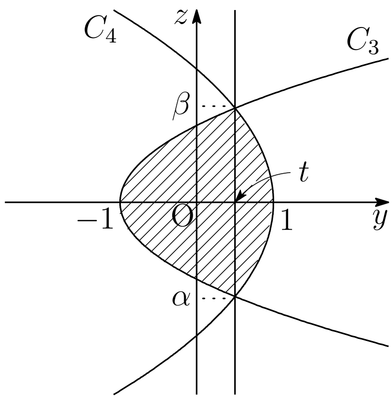
$$S=\frac{2}{3}\cdot 2\cdot 2\sqrt{2(1+t)(1-t)}=\boldsymbol{\frac{8\sqrt{2}}{3}\sqrt{(1+t)(1-t)}}$$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/temp/2021_12_18.pdf

(2) V_2 の表す領域は V_1 の表す領域と yz 平面に関して対称であるから，$(*)$ により，V_2 の表す領域は

$$z^2 + 2xy \leqq 2 - 2|-x+y| \quad \cdots (**)$$

これと平面 $x = t$ との切り口を表す領域は



$$z^2 + 2ty \leqq 2 - 2|-t+y|$$

$y \geqq t$ のとき　$z^2 + 2ty \leqq 2 - 2(-t+y)$

$y \leqq t$ のとき　$z^2 + 2ty \leqq 2 + 2(-t+y)$

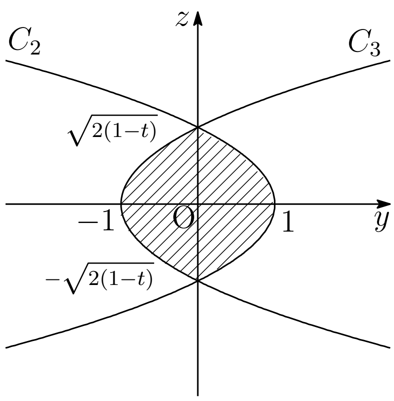
ゆえに　$\dfrac{z^2}{2(1-t)} - 1 \leqq y \leqq -\dfrac{z^2}{2(1+t)} + 1$

2 曲線　$C_3 : y = \dfrac{z^2}{2(1-t)} - 1$，

$C_4 : y = -\dfrac{z^2}{2(1+t)} + 1$

によって囲まれた図形が，V_2 を平面 $x = t$ で切った切り口である．

したがって，平面 $x = t$ において V_1 と V_2 の共通部分は 2 曲線 C_2，C_3 で囲まれ部分である．C_2，C_3 が放物線であるから，この切り口の面積を $S(t)$ とすると



$$S(t) = \frac{2}{3}\cdot 2\sqrt{2(1-t)}\cdot 2 = \frac{8\sqrt{2}}{3}\sqrt{1-t}$$

よって，求める体積を V とすると

$$V = 2\int_0^1 S(t)\,dt = \frac{16\sqrt{2}}{3}\int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{2}}\,dt$$
$$= \frac{16\sqrt{2}}{3}\left[-\frac{2}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{32\sqrt{2}}{9}}$$

別解

$(*)$ より，$x+y \geqq 0$ のとき，$(x-1)(y-1) \geqq \dfrac{z^2}{2}$ より

$$y \leqq \frac{z^2}{2(x-1)}+1 \quad (-1 \leqq x < 1)$$

$x+y \leqq 0$ のとき，$(x+1)(y+1) \geqq \dfrac{z^2}{2}$ より

$$y \geqq \frac{z^2}{2(x+1)}-1 \quad (-1 < x \leqq 1)$$

したがって，V_1 の xy 平面と平行な面による断面は (z を固定)

$$\frac{z^2}{2(x+1)}-1 \leqq y \leqq \frac{z^2}{2(x-1)}+1$$

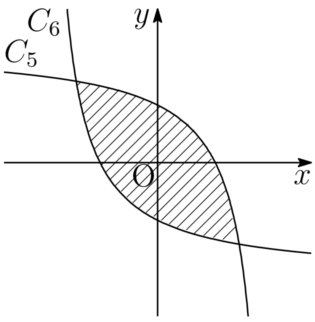
$(**)$ から同様にして，V_1 の xy 平面と平行な面による断面は (z を固定)

$$-\frac{z^2}{2(x-1)}-1 \leqq y \leqq -\frac{z^2}{2(x+1)}+1$$

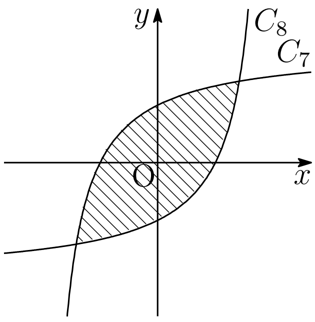
曲線の方程式を

$$C_5 : y = \frac{z^2}{2(x-1)}+1, \qquad C_6 : y = \frac{z^2}{2(x+1)}-1,$$
$$C_7 : y = -\frac{z^2}{2(x+1)}+1, \qquad C_8 : y = -\frac{z^2}{2(x-1)}-1$$

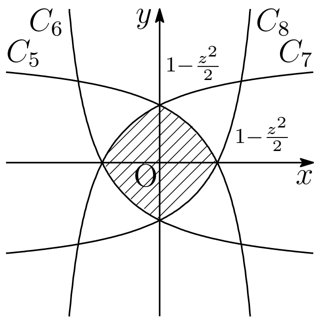
とすると，これらの断面は次のようになる $(-\sqrt{2} \leqq z \leqq \sqrt{2})$．



V_1 の断面



V_2 の断面



V_1 と V_2 の共通の断面

V_1 と V_2 の共通の断面積を $S(z)$ とすると，C_5 と x 軸，y 軸で囲まれ部分の面積から

$$\frac{S(z)}{4} = \int_0^{1-\frac{z^2}{2}} \left\{ \frac{z^2}{2(x-1)} + 1 \right\} dx$$
$$= \left[\frac{z^2}{2} \log|x-1| + x \right]_0^{1-\frac{z^2}{2}} = \frac{z^2}{2}\log\frac{z^2}{2} + 1 - \frac{z^2}{2}$$

$V_\varepsilon = 2\displaystyle\int_\varepsilon^{\sqrt{2}} S(z)\,dz$ とおくと

$$\frac{V_\varepsilon}{8} = \int_\varepsilon^{\sqrt{2}} \left(\frac{z^2}{2}\log\frac{z^2}{2} + 1 - \frac{z^2}{2} \right) dz$$
$$= \left[\frac{z^3}{6}\log\frac{z^2}{2} + z - \frac{5}{18}z^3 \right]_\varepsilon^{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{4\sqrt{2}}{9} - \left(\frac{\varepsilon^3}{6}\log\frac{\varepsilon^2}{2} + \varepsilon - \frac{5}{18}\varepsilon^3 \right)$$

ここで，$\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log x = 0$ であるから (次の補題を参照)

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \frac{\varepsilon^3}{6}\log\frac{\varepsilon^2}{2} = \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{\varepsilon}{3}\cdot\frac{\varepsilon^2}{2}\log\frac{\varepsilon^2}{2} = 0$$

よって，求める体積を V とすると　$V = \displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0} V_\varepsilon = \frac{32\sqrt{2}}{9}$

補題 まず，$0 < x \leqq 1$ のとき，$-\dfrac{2}{\sqrt{x}} < \log x$ を示す.

$g(x) = \log x + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ $(0 < x \leqq 1)$ とおくと

$$0 < x < 1 \text{ のとき} \quad g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}} < 0$$

$g(x)$ は単調減少で，$g(1) = 2$ であるから

$$g(x) > 0 \quad \text{ゆえに} \quad \log x + \frac{2}{\sqrt{x}} > 0$$

よって　$0 < x < 1$ のとき　$-\dfrac{2}{\sqrt{x}} < \log x < 0$

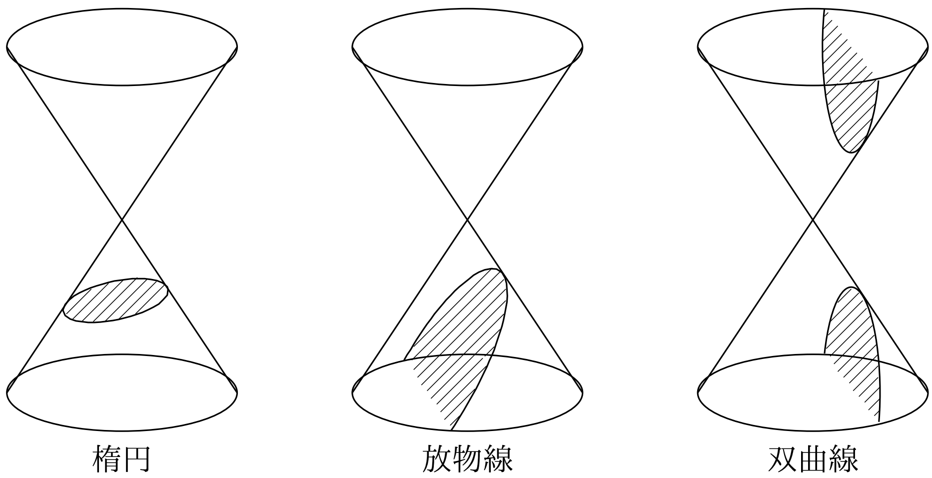
したがって　$0 < x < 1$ のとき　$-2\sqrt{x} < x\log x < 0$

$\displaystyle\lim_{x\to+0}(-2\sqrt{x}) = 0$ であるから，はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log x = 0$

解説

平面による円錐面の切り口は楕円・放物線 (本題)・双曲線 (別解) などの 2 次曲線である．そのため，2 次曲線を円錐曲線ともいう．

とくに，放物線となるのは，平面が母線と平行な場合である．また，直線となるのは，平面が頂点を通り，母線に平行な場合である．とくに，平面が頂点のみを共有するとき，円錐曲線は 1 点に退化する．



■