平成25年度　東京大学2次試験前期日程 (数学問題)150分
理科 (一類，二類，三類)　数 I・II・III・A・B・C

1 実数 a，b に対し平面上の点 $\mathrm{P}_n(x_n,\ y_n)$ を

$$(x_0,\ y_0) = (1,\ 0)$$
$$(x_{n+1},\ y_{n+1}) = (ax_n - by_n,\ bx_n + ay_n) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

によって定める．このとき，次の条件 (i)，(ii) がともに成り立つような $(a,\ b)$ をすべて求めよ．

(i) $\mathrm{P}_0 = \mathrm{P}_6$

(ii) P_0，P_1，P_2，P_3，P_4，P_5 は相異なる．

2 a を実数とし，$x > 0$ で定義された関数 $f(x)$，$g(x)$ を次のように定める．

$$f(x) = \frac{\cos x}{x}$$
$$g(x) = \sin x + ax$$

このとき $y = f(x)$ のグラフと $y = g(x)$ のグラフが $x > 0$ において共有点をちょうど3つ持つような a をすべて求めよ．

3 A，B の2人がいる．投げたとき表裏の出る確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ のコインが1枚あり，最初は A がそのコインを持っている．次の操作を繰り返す．

(i) A がコインを持っているときは，コインを投げ，表が出れば A に1点を与え，コインは A がそのまま持つ．裏が出れば，両者に点を与えず，A はコインを B に渡す．

(ii) B がコインを持っているときは，コインを投げ，表が出れば B に1点を与え，コインは B がそのまま持つ．裏が出れば，両者に点を与えず，B はコインを A に渡す．

そして A，B のいずれかが2点を獲得した時点で，2点を獲得した方の勝利とする．たとえば，コインが表，裏，表，表と出た場合，この時点で A は1点，B は2点を獲得しているので B の勝利となる．

(1) A，B あわせてちょうど n 回コインを投げ終えたときに A の勝利となる確率 $p(n)$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} p(n)$ を求めよ．

4 $\triangle$ABC において $\angle \mathrm{BAC} = 90^\circ$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 1$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = \sqrt{3}$ とする．$\triangle$ABC の内部の点 P が

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|} + \frac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|} + \frac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|} = \vec{0}$$

を満たすとする．

(1) $\angle$APB，$\angle$APC を求めよ．

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|$ を求めよ．

5 次の命題 P を証明したい．

命題 P　次の条件 (a)，(b) をともに満たす自然数 (1 以上の整数) A が存在する．

(a) A は連続する 3 つの自然数の積である．

(b) A を 10 進法で表したとき，1 が連続して 99 回以上現れるところがある．

以下の問いに答えよ．

(1) y を自然数とする．このとき不等式

$$x^3 + 3yx^2 < (x+y-1)(x+y)(x+y+1) < x^3 + (3y+1)x^2$$

が成り立つような正の実数 x の範囲を求めよ．

(2) 命題 P を証明せよ．

6 座標空間において，xy 平面内で不等式 $|x| \leqq 1$，$|y| \leqq 1$ により定まる正方形 S の 4 つの頂点を A$(-1,\ 1,\ 0)$，B$(1,\ 1,\ 0)$，C$(1, -1,\ 0)$，D$(-1, -1,\ 0)$ とする．正方形 S を，直線 BD を軸として回転させてできる立体を V_1，直線 AC を軸として回転させてできる立体を V_2 とする．

(1) $0 \leqq t < 1$ を満たす実数 t に対し，平面 $x = t$ による V_1 の切り口の面積を求めよ．

(2) V_1 と V_2 の共通部分の体積を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ $r=\sqrt{a^2+b^2},\ \cos\theta=\dfrac{a}{r},\ \sin\theta=\dfrac{b}{r}$ とおくと $(r \geqq 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

$\mathrm{P}_6=\mathrm{P}_0$ より $\quad r^6\begin{pmatrix} \cos 6\theta & -\sin 6\theta \\ \sin 6\theta & \cos 6\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

ゆえに $\quad r^6\cos 6\theta=1$，$r^6\sin 6\theta=0$ $\quad$ すなわち $\quad r=1$，$6\theta=2k\pi$ (k は整数)

$\theta=\dfrac{k\pi}{3}$ より，条件 (ii) を満たす k は $\quad k=1,\ 5$

$\theta=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi$ より $\quad \boldsymbol{(a,\ b)=\left(\dfrac{1}{2},\ \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}$ ■

$\boxed{\mathbf{2}}$ $f(x)=g(x)$ とすると $(x>0)$

$$\frac{\cos x}{x}=\sin x+ax \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\cos x}{x^2}-\frac{\sin x}{x}=a$$

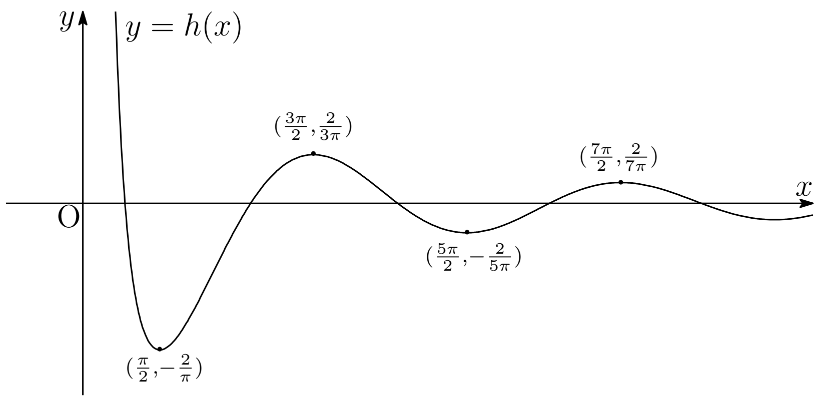
$h(x)=\dfrac{\cos x}{x^2}-\dfrac{\sin x}{x}$ とおくと　$h'(x)=-\dfrac{(x^2+2)\cos x}{x^3}$

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{5\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{7\pi}{2}$	$\cdots$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$		$\searrow$	$-\frac{2}{\pi}$	$\nearrow$	$\frac{2}{3\pi}$	$\searrow$	$-\frac{2}{5\pi}$	$\nearrow$	$\frac{2}{7\pi}$	$\searrow$

n を自然数とすると，次の極値をとる．

$$\text{極小値}\ h\left(\frac{4n-3}{2}\pi\right)=-\frac{2}{(4n-3)\pi},\quad \text{極大値}\ h\left(\frac{4n-1}{2}\pi\right)=\frac{2}{(4n-1)\pi}$$

また　$\displaystyle\lim_{x\to+0}h(x)=\infty,\quad \lim_{x\to\infty}h(x)=0$



$x>0$ において $y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフの共有点がちょうど 3 個あることと，$y=h(x)$ のグラフと $y=a$ のグラフの共有点がちょうど 3 個あることと同値である．よって，上のグラフから，求める a は

$$\boldsymbol{\frac{2}{7\pi}<a<\frac{2}{3\pi},\quad a=-\frac{2}{5\pi}}$$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 3回コインを投げ終えたとき，AとBの勝敗は次のようになる．

$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	
表	表		$\cdots$ (2回目にAの勝利)
	裏	表	$\cdots$ A : 1 − 1 : B
		裏	$\cdots$ A : 1 − 0 : B
裏	表	表	$\cdots$ (3回目にBの勝利)
		裏	$\cdots$ A : 0 − 1 : B
	裏	表	$\cdots$ A : 1 − 0 : B
		裏	$\cdots$ A : 0 − 0 : B

したがって　$p(1)=0$，$p(2)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$，$p(3)=0 \quad \cdots(*)$

コインをちょうどn回投げ終え$(n \geqq 4)$，Aが勝利するとき，AとBの得点の推移は，次の(i)〜(iii)である．

(i) n回目よりも前にAだけが得点するのは奇数回目で，nは偶数．

$$\begin{array}{cccc} \text{A B}\cdots\text{A B} & \text{A} & \text{A B}\cdots\text{A B} & \text{A}\\ \underbrace{\text{裏裏}\cdots\text{裏裏}}_{\text{偶数個}} & \text{表} & \underbrace{\text{裏裏}\cdots\text{裏裏}}_{\text{偶数個}} & \text{表}\end{array}$$

1から$n-1$の整数の中に奇数は$\dfrac{n}{2}$個で，この確率は　$\dfrac{n}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=\dfrac{n}{2^{n+1}}$

(ii) n回目よりも前にA，Bの順に得点するのは奇数回目で，nは奇数．

$$\begin{array}{cccccc} \text{A B}\cdots\text{A B} & \text{A} & \text{A B}\cdots\text{A} & \text{B} & \text{B A}\cdots\text{B} & \text{A}\\ \underbrace{\text{裏裏}\cdots\text{裏裏}}_{\text{偶数個}} & \text{表} & \underbrace{\text{裏裏}\cdots\text{裏}}_{\text{奇数個}} & \text{表} & \underbrace{\text{裏裏}\cdots\text{裏}}_{\text{奇数個}} & \text{表}\end{array}$$

1から$n-1$の整数の中に奇数は$\dfrac{n-1}{2}$個で，この確率は

$${}_{\frac{n-1}{2}}\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{(n-1)(n-3)}{2^{n+3}}$$

(iii) n回目よりも前にB，Aの順に得点するのは偶数回目で，nは奇数．

$$\begin{array}{cccccc} \text{A B}\cdots\text{A} & \text{B} & \text{B A}\cdots\text{B} & \text{A} & \text{A B}\cdots\text{A B} & \text{A}\\ \underbrace{\text{裏裏}\cdots\text{裏}}_{\text{奇数個}} & \text{表} & \underbrace{\text{裏裏}\cdots\text{裏}}_{\text{奇数個}} & \text{表} & \underbrace{\text{裏裏}\cdots\text{裏裏}}_{\text{偶数個}} & \text{表}\end{array}$$

1から$n-1$の整数の中に偶数は$\dfrac{n-1}{2}$個で，この確率は

$${}_{\frac{n-1}{2}}\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{(n-1)(n-3)}{2^{n+3}}$$

n が偶数のとき，(i) より　$p(n) = \dfrac{n}{2^{n+1}} \quad (n \geqq 4)$

n が奇数のとき，(ii)，(iii) より

$$p(n) = \frac{(n-1)(n-3)}{2^{n+3}} + \frac{(n-1)(n-3)}{2^{n+3}} = \frac{(n-1)(n-3)}{2^{n+2}} \quad (n \geqq 5)$$

$(*)$ に注意すると，上の 2 式は $n = 1, 2, 3$ のときも成立するから

$$\boldsymbol{p(n) = \begin{cases} \dfrac{(n-1)(n-3)}{2^{n+2}} & (n\ \text{が奇数}) \\ \dfrac{n}{2^{n+1}} & (n\ \text{が偶数}) \end{cases}}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} p(n) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\{(2k-1)-1\}\{(2k-1)-3\}}{2^{(2k-1)+2}} + \frac{2k}{2^{2k+1}} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2 - 5k + 4}{2^{2k}} \\ &= \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)\left(\frac{1}{4}\right)^{k-2} - \frac{3}{4}\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{8}\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\left(\frac{1}{4}\right)^{k-2} - \frac{3}{4}\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{k}\end{aligned}$$

ここで，$f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ とすると $(0 < |x| < 1)$

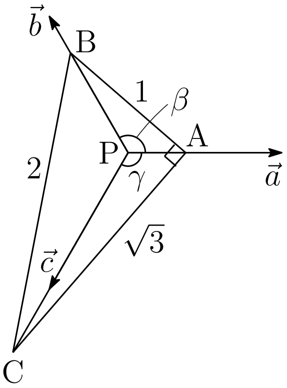
$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \\ f''(x) &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} p(n) &= \frac{1}{8}f''\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{3}{4}f'\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^3} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2} + \frac{1}{1-\frac{1}{4}} \\ &= \frac{16}{27} - \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \boldsymbol{\frac{16}{27}}\end{aligned}$$

■

4 (1) $\beta = \angle\mathrm{APB}$, $\gamma = \angle\mathrm{APC}$,



$\vec{a} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|}$，$\vec{b} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}$，$\vec{c} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|}$ とおくと

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は単位ベクトルであるから

$$\vec{a} = (1,\ 0),\quad \vec{b} = (\cos\beta,\ \sin\beta),$$
$$\vec{c} = (\cos\gamma, -\sin\gamma)$$

とすると，$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ より $(*)\begin{cases} 1+\cos\beta+\cos\gamma = 0 \\ \sin\beta - \sin\gamma = 0 \end{cases}$

$(*)$ の第 2 式より　$\gamma = \beta$　または　$\gamma = 180^\circ - \beta$

$\gamma = 180^\circ - \beta$ のとき，$(*)$ の第 1 式の左辺は 1 となり，不適.

$\gamma = \beta$ を $(*)$ の第 1 式に代入すると　　$1 + 2\cos\beta = 0$

これを解いて　$\beta = 120^\circ$　よって　$\boldsymbol{\angle\mathrm{APB} = \angle\mathrm{APC} = 120^\circ}$

別解 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ より　$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2$，$|\vec{a}+\vec{c}|^2 = |\vec{b}|^2$

$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$ であるから　$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{c} = -\dfrac{1}{2}$　ゆえに　$\beta = \gamma = 120^\circ$

(2) $x = |\overrightarrow{\mathrm{PA}}|$，$y = |\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$，$z = |\overrightarrow{\mathrm{PC}}|$ とおくと，(1) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}} = x\vec{a} = x(1,\ 0) = (x,\ 0),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PB}} = y\vec{b} = y\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(-\frac{y}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}y\right),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PC}} = z\vec{c} = z\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(-\frac{z}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)$$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \left(-x-\dfrac{y}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}y\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \left(-x-\dfrac{z}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}z\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を 90° 回転させ，$\sqrt{3}$ 倍したものであるから

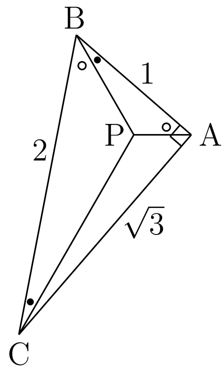
$$-x-\frac{z}{2} = -\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}y,\quad -\frac{\sqrt{3}}{2}z = \sqrt{3}\left(-x-\frac{y}{2}\right)$$

上の 2 式から　$y = 2x$，$z = 4x$　このとき　$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-2x,\ \sqrt{3}x)$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 1$ であるから，$x > 0$ に注意して　$x = \dfrac{1}{\sqrt{7}}$

よって　　$\boldsymbol{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}| = \dfrac{1}{\sqrt{7}}}$，$\boldsymbol{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}| = \dfrac{2}{\sqrt{7}}}$，$\boldsymbol{|\overrightarrow{\mathrm{PC}}| = \dfrac{4}{\sqrt{7}}}$

別解 1 (1) の結果から　$\angle\mathrm{APB} = \angle\mathrm{BPC} = 120^\circ$　$\cdots$①



ゆえに　$\angle\mathrm{PAB} + \angle\mathrm{PBA} = 60^\circ$　$\cdots$②

$\angle\mathrm{ABC} = 60^\circ$ であるから

$$\angle\mathrm{PBC} + \angle\mathrm{PBA} = 60^\circ \quad \cdots ③$$

②，③ より　$\angle\mathrm{PAB} = \angle\mathrm{PBC}$　$\cdots$④

①，④ より　$\triangle\mathrm{PAB} \backsim \triangle\mathrm{PBC}$

相似比は $1:2$ であるから，$x = \mathrm{PA}$ とおくと

$$\mathrm{PB} = 2x,\quad \mathrm{PC} = 4x$$

$\triangle\mathrm{PAB}$ に余弦定理を適用すると

$$1^2 = x^2 + (2x)^2 - 2{\cdot}x{\cdot}2x\cos 120^\circ \quad \text{これを解いて} \quad x = \frac{1}{\sqrt{7}}$$

よって　$\mathrm{PA} = \dfrac{1}{\sqrt{7}},\ \ \mathrm{PB} = \dfrac{2}{\sqrt{7}},\ \ \mathrm{PC} = \dfrac{4}{\sqrt{7}}$

別解 2 $x = \mathrm{PA},\ y = \mathrm{PB},\ z = \mathrm{PC}$ とし，複素数平面上において P を原点，$\mathrm{A}(x)$，$\mathrm{B}(y\omega)$，$\mathrm{C}(z\omega^2)$ とする $\left(\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)$.

$y\omega - x$ を $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転し，$\sqrt{3}$ 倍に拡大したものが $z\omega^2 - x$ であるから

$$\sqrt{3}i(y\omega - x) = z\omega^2 - x$$

ゆえに　$-\dfrac{3}{2}y + \left(-\sqrt{3}x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}y\right)i = -\dfrac{2x+z}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}zi$

x，y，z は実数であるから

$$-\frac{3}{2}y = -\frac{2x+z}{2},\quad -\sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y = -\frac{\sqrt{3}}{2}z$$

上の 2 式から　$y = 2x,\ z = 4x$

このとき，$\mathrm{A}(x)$，$\mathrm{B}(x(-1+\sqrt{3}i))$，$\mathrm{AB} = 1$ より

$$|x(-1+\sqrt{3}i) - x| = 1 \quad \text{ゆえに} \quad x = \frac{1}{\sqrt{7}}$$

よって　$\mathrm{PA} = \dfrac{1}{\sqrt{7}},\ \ \mathrm{PB} = \dfrac{2}{\sqrt{7}},\ \ \mathrm{PC} = \dfrac{4}{\sqrt{7}}$　■

$\boxed{5}$ (1)
$$\begin{aligned}(x+y-1)(x+y)(x+y+1) &= (x+y)\{(x+y)^2-1\}\\ &= (x+y)^3-(x+y)\end{aligned}$$

不等式 $x^3+3yx^2<(x+y-1)(x+y)(x+y+1)<x^3+(3y+1)x^2$ より

$$\begin{gathered}x^3+3yx^2<(x+y)^3-(x+y)<x^3+(3y+1)x^2\\ 0<3y^2x+y^3-(x+y)<x^2\end{gathered}$$

したがって $\quad (*)\begin{cases}(3y^2-1)x+(y^3-y)>0\\ x^2-(3y^2-1)x-(y^3-y)>0\end{cases}$

y は自然数であるから，$3y^2-1>0$，$y^3-y=y(y+1)(y-1)\geqq 0$
ゆえに，すべての自然数 x について，$(*)$ の第 1 式は成立する．
よって，$x>0$ に注意して，$(*)$ の第 2 式を解くことにより

$$\boldsymbol{x>\frac{3y^2-1+\sqrt{(3y^2-1)^2+4(y^3-y)}}{2}}$$

(2) 1 桁から 99 桁まで 1 が連続する数は，各位の数の和が 99 より，3 の倍数であるから，次式を満たす自然数 y が存在する．

$$3y=\sum_{k=1}^{99}10^{k-1}$$

$x=10^n$ $(n\geqq 99)$ とし，上の y に対して，n を十分に大きくとることで，(1) の結果を満たす x がとれる．

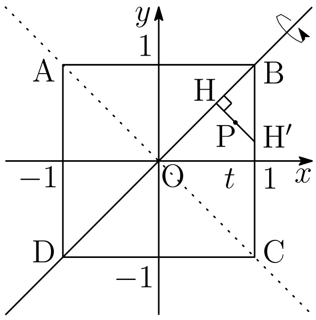
$$\begin{aligned}x^3+3yx^2+1 &= 10^{3n}+\sum_{k=1}^{99}10^{2n+k-1}+1,\\ x^3+(3y+1)x^2-1 &= x^3+3yx^2+x^2-1\\ &= 10^{3n}+\sum_{k=1}^{99}10^{2n+k-1}+10^{2n}-1\\ &= 10^{3n}+\sum_{k=1}^{99}10^{2n+k-1}+9\sum_{k=1}^{2n-1}10^k\end{aligned}$$

このとき，$N=(x+y-1)(x+y)(x+y+1)$ とおくと

$$x^3+3yx^2+1\leqq N\leqq x^3+(3y+1)x^2-1$$

よって，N の 10^{2n} の位から 10^{2n+98} の位まで 1 が連続して 99 回現れる．■

6 (1) 立体 V_1 の点 $\mathrm{Q}(x,\ y,\ z)$ に対し，S 上に点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ 0)$，$\mathrm{H}\left(\dfrac{x+y}{2},\ \dfrac{x+y}{2},\ 0\right)$ をとると



$$\mathrm{OH}=\frac{|x+y|}{\sqrt{2}},\quad \mathrm{HP}=\frac{|x-y|}{\sqrt{2}},\quad \mathrm{PQ}=|z|$$

直線 PH と線分 BC との交点を H′ とすると

$$\mathrm{HH'}=\mathrm{HB}=\sqrt{2}-\mathrm{OH}$$

$\mathrm{HP}^2+\mathrm{PQ}^2 \leqq \mathrm{HH'}^2$ であるから

$$\frac{1}{2}(x-y)^2+z^2 \leqq \left(\sqrt{2}-\frac{|x+y|}{\sqrt{2}}\right)^2$$

よって，V_1 の表す領域は　$z^2-2xy \leqq 2-2|x+y|$　$\cdots(*)$

$(*)$ と平面 $x=t$ との切り口を表す領域は

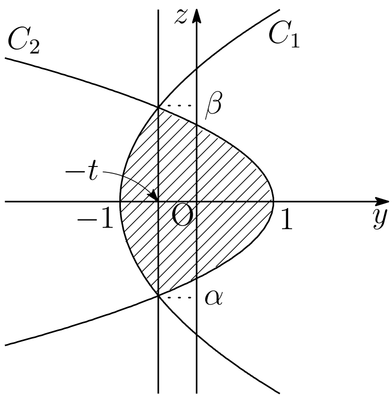
$$z^2-2ty \leqq 2-2|t+y|$$

$y \geqq -t$ のとき　$z^2-2ty \leqq 2-2(t+y)$

$y \leqq -t$ のとき　$z^2-2ty \leqq 2+2(t+y)$

ゆえに

$$\frac{z^2}{2(1+t)}-1 \leqq y \leqq -\frac{z^2}{2(1-t)}+1$$



2 曲線　$C_1 : y=\dfrac{z^2}{2(1+t)}-1$，

$C_2 : y=-\dfrac{z^2}{2(1-t)}+1$

の交点の z 座標を $\alpha,\ \beta(\alpha<\beta)$ とすると

$$\alpha=-\sqrt{2(1+t)(1-t)},\quad \beta=\sqrt{2(1+t)(1-t)}$$

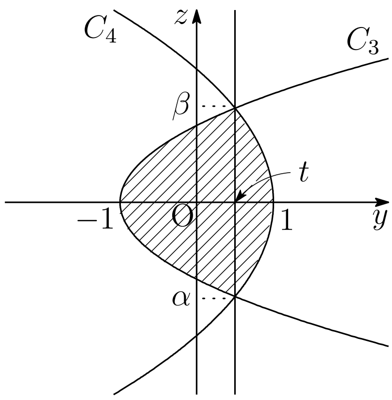
C_1，C_2 は放物線であるから，求める面積を S とすると，

$$S=\frac{2}{3}\cdot 2\cdot 2\sqrt{2(1+t)(1-t)}=\boldsymbol{\frac{8\sqrt{2}}{3}\sqrt{(1+t)(1-t)}}$$

(2) V_2 の表す領域は V_1 の表す領域と yz 平面に関して対称であるから，$(*)$ により，V_2 の表す領域は

$$z^2+2xy \leqq 2-2|-x+y| \quad \cdots(**)$$

これと平面 $x=t$ との切り口を表す領域は



$$z^2+2ty \leqq 2-2|-t+y|$$

$y \geqq t$ のとき　$z^2+2ty \leqq 2-2(-t+y)$

$y \leqq t$ のとき　$z^2+2ty \leqq 2+2(-t+y)$

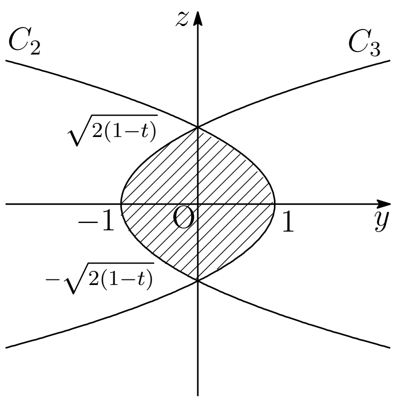
ゆえに　$\dfrac{z^2}{2(1-t)}-1 \leqq y \leqq -\dfrac{z^2}{2(1+t)}+1$

2 曲線　$C_3: y=\dfrac{z^2}{2(1-t)}-1$，

$C_4: y=-\dfrac{z^2}{2(1+t)}+1$

によって囲まれた図形が，V_2 を平面 $x=t$ で切った切り口である．

したがって，平面 $x=t$ において V_1 と V_2 の共通部分は 2 曲線 C_2，C_3 で囲まれ部分である．C_2，C_3 が放物線であるから，この切り口の面積を $S(t)$ とすると



$$S(t)=\frac{2}{3}\cdot 2\sqrt{2(1-t)}\cdot 2=\frac{8\sqrt{2}}{3}\sqrt{1-t}$$

よって，求める体積を V とすると

$$\begin{aligned} V &= 2\int_0^1 S(t)\,dt=\frac{16\sqrt{2}}{3}\int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{2}}\,dt \\ &= \frac{16\sqrt{2}}{3}\left[-\frac{2}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\boldsymbol{\frac{32\sqrt{2}}{9}} \end{aligned}$$

別解

$(*)$ より，$x+y \geqq 0$ のとき，$(x-1)(y-1) \geqq \dfrac{z^2}{2}$ より

$$y \leqq \frac{z^2}{2(x-1)}+1 \quad (-1 \leqq x < 1)$$

$x+y \leqq 0$ のとき，$(x+1)(y+1) \geqq \dfrac{z^2}{2}$ より

$$y \geqq \frac{z^2}{2(x+1)}-1 \quad (-1 < x \leqq 1)$$

したがって，V_1 の xy 平面と平行な面による断面は (z を固定)

$$\frac{z^2}{2(x+1)}-1 \leqq y \leqq \frac{z^2}{2(x-1)}+1$$

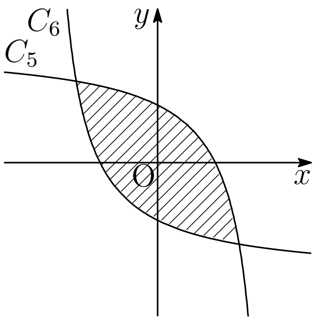
$(**)$ から同様にして，V_1 の xy 平面と平行な面による断面は (z を固定)

$$-\frac{z^2}{2(x-1)}-1 \leqq y \leqq -\frac{z^2}{2(x+1)}+1$$

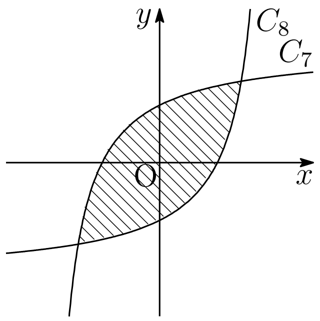
曲線の方程式を

$$C_5 : y = \frac{z^2}{2(x-1)}+1, \qquad C_6 : y = \frac{z^2}{2(x+1)}-1,$$
$$C_7 : y = -\frac{z^2}{2(x+1)}+1, \qquad C_8 : y = -\frac{z^2}{2(x-1)}-1$$

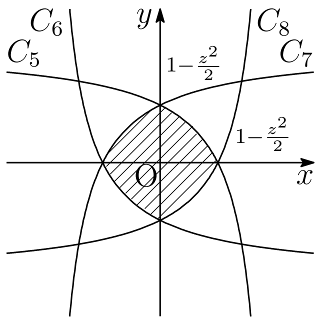
とすると，これらの断面は次のようになる $(-\sqrt{2} \leqq z \leqq \sqrt{2})$．



V_1 の断面



V_2 の断面



V_1 と V_2 の共通の断面

V_1 と V_2 の共通の断面積を $S(z)$ とすると，C_5 と x 軸，y 軸で囲まれ部分の面積から

$$\begin{aligned}\frac{S(z)}{4} &= \int_0^{1-\frac{z^2}{2}} \left\{\frac{z^2}{2(x-1)}+1\right\} dx \\ &= \left[\ \frac{z^2}{2}\log|x-1|+x\ \right]_0^{1-\frac{z^2}{2}} = \frac{z^2}{2}\log\frac{z^2}{2}+1-\frac{z^2}{2}\end{aligned}$$

$V_\varepsilon = 2\displaystyle\int_\varepsilon^{\sqrt{2}} S(z)\,dz$ とおくと

$$\begin{aligned}\frac{V_\varepsilon}{8} &= \int_\varepsilon^{\sqrt{2}} \left(\frac{z^2}{2}\log\frac{z^2}{2}+1-\frac{z^2}{2}\right) dz \\ &= \left[\ \frac{z^3}{6}\log\frac{z^2}{2}+z-\frac{5}{18}z^3\ \right]_\varepsilon^{\sqrt{2}} \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{9}-\left(\frac{\varepsilon^3}{6}\log\frac{\varepsilon^2}{2}+\varepsilon-\frac{5}{18}\varepsilon^3\right)\end{aligned}$$

ここで，$\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log x = 0$ であるから (次の補題を参照)

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\varepsilon^3}{6}\log\frac{\varepsilon^2}{2} = \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\varepsilon}{3}\cdot\frac{\varepsilon^2}{2}\log\frac{\varepsilon^2}{2} = 0$$

よって，求める体積を V とすると　　$V = \displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0} V_\varepsilon = \frac{32\sqrt{2}}{9}$

補題 まず，$0 < x \leqq 1$ のとき，$-\dfrac{2}{\sqrt{x}} < \log x$ を示す．

$g(x) = \log x + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ $(0 < x \leqq 1)$ とおくと

$$0 < x < 1 \text{ のとき}\quad g'(x) = \frac{1}{x}-\frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}} < 0$$

$g(x)$ は単調減少で，$g(1) = 2$ であるから

$$g(x) > 0 \quad \text{ゆえに} \quad \log x + \frac{2}{\sqrt{x}} > 0$$

よって　　$0 < x < 1$ のとき　$-\dfrac{2}{\sqrt{x}} < \log x < 0$

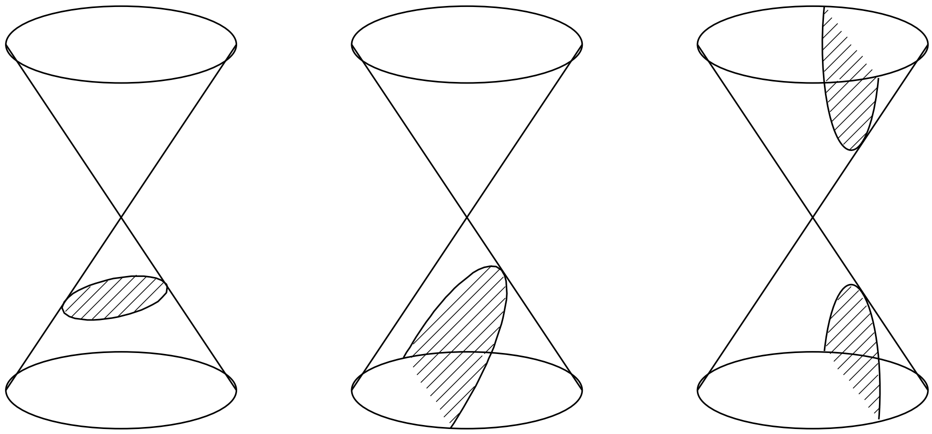
したがって　$0 < x < 1$ のとき　$-2\sqrt{x} < x\log x < 0$

$\displaystyle\lim_{x\to+0}(-2\sqrt{x}\,) = 0$ であるから，はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log x = 0$

解説

平面による円錐面の切り口は楕円・放物線 (本題)・双曲線 (別解) などの 2 次曲線である．そのため，2 次曲線を円錐曲線ともいう．

とくに，放物線となるのは，平面が母線と平行な場合である．また，直線となるのは，平面が頂点を通り，母線に平行な場合である．とくに，平面が頂点のみを共有するとき，円錐曲線は 1 点に退化する．



楕円　　　　放物線　　　　双曲線