# 平成 24 年度　東京大学 2 次試験前期日程 (数学問題)150 分
# 理科 (一類，二類，三類)　数 I・II・III・A・B・C

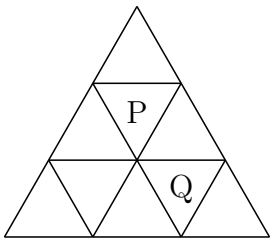
**問題** 1 2 3 4 5 6

**1** 次の連立不等式で定まる座標平面上の領域 $D$ を考える．

$$x^2+(y-1)^2 \leqq 1, \quad x \geqq \frac{\sqrt{2}}{3}$$

直線 $\ell$ は原点を通り，$D$ との共通部分が線分となるものとする．その線分の長さ $L$ の最大値を求めよ．また，$L$ が最大値をとるとき，$x$ 軸と $\ell$ のなす角 $\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の余弦 $\cos\theta$ を求めよ．

**2** 図のように，正三角形を 9 つの部屋に辺で区切り，部屋 P，Q を定める．1 つの球が部屋 P を出発し，1 秒ごとに，そのままその部屋にとどまることなく，辺を共有する隣の部屋に等確率で移動する．球が $n$ 秒後に部屋 Q にある確率を求めよ．




**3** 座標平面上で 2 つの不等式

$$y \geqq \frac{1}{2}x^2, \quad \frac{x^2}{4}+4y^2 \leqq \frac{1}{8}$$

によって定まる領域を $S$ とする．$S$ を $x$ 軸のまわりに回転してできる立体の体積を $V_1$ とし，$y$ 軸のまわりに回転してできる立体の体積を $V_2$ とする．

(1) $V_1$ と $V_2$ の値を求めよ．

(2) $\dfrac{V_2}{V_1}$ の値と 1 の大小を判定せよ．

**4** $n$ を 2 以上の整数とする．自然数 (1 以上の整数) の $n$ 乗になる数を $n$ 乗数と呼ぶことにする．以下の問いに答えよ．

(1) 連続する 2 個の自然数の積は $n$ 乗数でないことを示せ．

(2) 連続する $n$ 個の自然数の積は $n$ 乗数でないことを示せ．

**5** 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が次の条件 (D) を満たすとする．

(D) $A$ の成分 $a$，$b$，$c$，$d$ は整数である．また，平面上の 4 点 $(0,\ 0)$，$(a,\ b)$，$(a+c,\ b+d)$，$(c,\ d)$ は，面積 1 の平行四辺形の 4 つの頂点をなす．

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) 行列 $BA$ と $B^{-1}A$ も条件 (D) を満たすことを示せ．

(2) $c = 0$ ならば，$A$ に $B$，$B^{-1}$ のどちらかを左から次々にかけることにより，4 個の行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ のどれかにできることを示せ．

(3) $|a| \geqq |c| > 0$ とする．$BA$，$B^{-1}A$ の少なくともどちらか一方は，それを $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ とすると

$$|x| + |z| < |a| + |c|$$

を満たすことを示せ．

**6** $2\times 2$ 行列 $P=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ に対して

$$\mathrm{Tr}(P)=p+s$$

と定める．

$a$，$b$，$c$ は $a\geqq b>0$，$0\leqq c\leqq 1$ を満たす実数とする．行列 $A$，$B$，$C$，$D$ を次で定める．

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} a^c & 0 \\ 0 & b^c \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} b^{1-c} & 0 \\ 0 & a^{1-c} \end{pmatrix}$$

また実数 $x$ に対し $U(x)=\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$ とする．

このとき以下の問いに答えよ．

(1) 各実数 $t$ に対して，$x$ の関数

$$f(x)=\mathrm{Tr}\left((U(t)AU(-t)-B)U(x)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}U(-x)\right)$$

の最大値 $m(t)$ を求めよ．(ただし，最大値をとる $x$ を求める必要はない．)

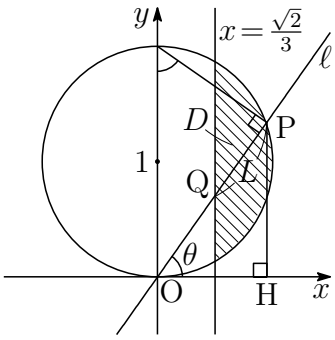
(2) すべての実数 $t$ に対し

$$2\mathrm{Tr}(U(t)CU(-t)D)\geqq \mathrm{Tr}(U(t)AU(-t)+B)-m(t)$$

が成り立つことを示せ．

**解答例**

**1** $\ell$ と円 $x^2+(y-1)^2=1$ および直線 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ との交点をそれぞれ P，Q とし，P から $x$ 軸に垂線 PH を引くと




$$\mathrm{OP}=2\sin\theta,\quad \mathrm{OQ}=\frac{\sqrt{2}}{3\cos\theta},$$

$$\mathrm{OH}=\mathrm{OP}\cos\theta=2\sin\theta\cos\theta=\sin 2\theta$$

$\sin 2\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ を満たす $\theta$ を $\alpha$，$\beta$ とすると $\left(0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{\sqrt{2}}{3}\quad \text{ゆえに}\quad \tan^2\theta-3\sqrt{2}\tan\theta+1=0$$

すなわち $\quad \tan\alpha=\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{14}}{2},\ \tan\beta=\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{14}}{2}$

領域 $D$ と共有点を持つ条件から，$\alpha<\theta<\beta$ において

$$L=\mathrm{OP}-\mathrm{OQ}=2\sin\theta-\frac{\sqrt{2}}{3\cos\theta}$$

$$\begin{aligned}\frac{dL}{d\theta}&=2\cos\theta-\frac{\sqrt{2}\sin\theta}{3\cos^2\theta}\\&=-\frac{\sqrt{2}}{3}\cos\theta\{\tan\theta(1+\tan^2\theta)-3\sqrt{2}\}\\&=-\frac{\sqrt{2}}{3}\cos\theta(\tan\theta-\sqrt{2})(\tan^2\theta+\sqrt{2}\tan\theta+3)\end{aligned}$$

$\tan\theta_0=\sqrt{2}$ とおくと $\left(0<\theta_0<\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\alpha<\theta_0<\beta$ であるから

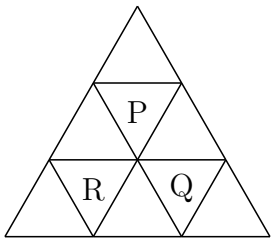
| $\theta$ | $(\alpha)$ | $\cdots$ | $\theta_0$ | $\cdots$ | $(\beta)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{dL}{d\theta}$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $L$ | | ↗ | 極大 | ↘ | |

$L$ を最大にする $\theta$ は

$$\tan\theta=\sqrt{2}\quad \text{これから}\quad \boldsymbol{\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}},\quad \sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

このとき $\quad L=2\sin\theta-\dfrac{\sqrt{2}}{3\cos\theta}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$ ■

**2** 右の図のように部屋Rをとると，$n$ 秒後の球は，$n$ が偶数のとき，部屋P，Q，Rにあり，$n$ が奇数のとき，P，Q，R以外の部屋にある．
したがって，$n$ が奇数のとき，部屋Qにある確率は




$$0$$

$n$ が偶数のとき，$n=2k$ 秒後に，P，Q，Rにある確率を $p_k$，$q_k$，$r_k$ とすると

$$p_{k+1}=p_k\times\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+q_k\times\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+r_k\times\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}$$
$$q_{k+1}=q_k\times\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+r_k\times\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+p_k\times\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}$$
$$r_{k+1}=r_k\times\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+p_k\times\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+q_k\times\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}$$

したがって，$k$ を0以上の整数とすると，次の確率漸化式が成立する．

$$p_0=1,\quad q_0=r_0=0$$
$$p_{k+1}=\frac{2}{3}p_k+\frac{1}{6}q_k+\frac{1}{6}r_k\quad\cdots①$$
$$q_{k+1}=\frac{1}{6}p_k+\frac{2}{3}q_k+\frac{1}{6}r_k\quad\cdots②$$
$$r_{k+1}=\frac{1}{6}p_k+\frac{1}{6}q_k+\frac{2}{3}r_k\quad\cdots③$$

①，②，③の辺々を加えると

$$p_{k+1}+q_{k+1}+r_{k+1}=p_k+q_k+r_k\quad\text{ゆえに}\quad p_k+q_k+r_k=1\quad\cdots④$$

①$-$②より　$p_{k+1}-q_{k+1}=\dfrac{1}{2}(p_k-q_k)$　ゆえに　$p_k-q_k=\dfrac{1}{2^k}$　$\cdots⑤$

②$-$③より　$q_{k+1}-r_{k+1}=\dfrac{1}{2}(q_k-r_k)$　ゆえに　$q_k-r_k=0$　$\cdots⑥$

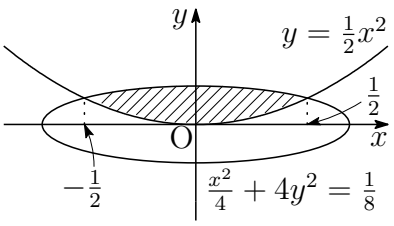
④，⑤，⑥より　　$q_k=\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{2^k}\right)$

よって，求める確率は　**$n$ が奇数のとき　$0$,**

**$n$ が偶数のとき　$\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}}\right)$**

■

**3** (1) $y=\dfrac{1}{2}x^2\cdots①,\quad \dfrac{x^2}{4}+4y^2=\dfrac{1}{8}\cdots②$




①，② から $y$ を消去すると

$$\frac{x^2}{4}+x^4=\frac{1}{8}$$

ゆえに　$(2x^2+1)(4x^2-1)=0$　　これを解いて　$x=\pm\dfrac{1}{2}$

① より $y^2=\dfrac{1}{4}x^4$，② より $y^2=\dfrac{1}{32}(1-2x^2)$ であるから

$$V_1=2\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{32}(1-2x^2)-\frac{1}{4}x^4\right\}dx$$
$$=2\pi\left[\frac{1}{32}\left(x-\frac{2}{3}x^3\right)-\frac{1}{20}x^5\right]_0^{\frac{1}{2}}=\boldsymbol{\frac{11}{480}\pi}$$

① および ② の $x$ 軸の上側の方程式が $y=\dfrac{1}{8}\sqrt{2-4x^2}$ であるから

$$V_2=2\pi\int_0^{\frac{1}{2}}x\left(\frac{1}{8}\sqrt{2-4x^2}-\frac{1}{2}x^2\right)dx$$
$$=2\pi\left[-\frac{1}{96}(2-4x^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{8}x^4\right]_0^{\frac{1}{2}}=\boldsymbol{\frac{8\sqrt{2}-7}{192}\pi}$$

(2) (1) の結果から

$$\frac{V_2}{V_1}-1=\frac{8\sqrt{2}-7}{192}\cdot\frac{480}{11}-1=\frac{5(8\sqrt{2}-7)}{22}-1$$
$$=\frac{40\sqrt{2}-57}{22}=\frac{\sqrt{3200}-\sqrt{3249}}{22}<0$$

よって　　$\boldsymbol{\dfrac{V_2}{V_1}<1}$

**補足** 一般に，$a \leqq x \leqq b$ において $f(x) \geqq 0$ であるとき，$y = f(x)$ と $x$ 軸で囲まれた図形 $S$ を $x$ 軸および $y$ 軸のまわりに回転してできる立体の体積をそれぞれ $V_1$，$V_2$ とすると

$$V_1 = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 \, dx, \quad V_2 = 2\pi \int_a^b x f(x) \, dx$$

$S$ を $x$ 軸を元に $y$ 軸方向に $k$ 倍に拡大した図形を $x$ 軸および $y$ 軸のまわりに回転してできる立体の体積をそれぞれ $V_x$，$V_y$ とすると

$$V_k = \pi \int_a^b \{kf(x)\}^2 \, dx = k^2 V_1,$$
$$V_y = 2\pi \int_a^b x\{kf(x)\} \, dx = kV_2$$

①，② の図形をそれぞれ $x$ 軸を元に $y$ 軸方向に 4 倍に拡大すると

$$y = 2x^2, \quad x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$$

これらの図形によって囲まれる部分を $x$ 軸および $y$ 軸のまわりに回転してできる立体の体積をそれぞれ $V_x$，$V_y$ とすると

$$\begin{aligned} V_x &= 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{2} - x^2 - (2x^2)^2 \right\} dx \\ &= 2\pi \left[ \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{5}x^5 \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{11}{30}\pi, \\ V_y &= 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} x \left( \sqrt{\frac{1}{2} - x^2} - 2x^2 \right) dx \\ &= 2\pi \left[ -\frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} - x^2 \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^4 \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{8\sqrt{2} - 7}{48}\pi \end{aligned}$$

このとき，$V_x = 4^2 V_1$，$V_y = 4V_2$ であるから

$$V_1 = \frac{1}{16}V_x = \frac{1}{16} \cdot \frac{11}{30}\pi = \frac{11}{480}\pi,$$
$$V_2 = \frac{1}{4}V_y = \frac{1}{4} \cdot \frac{8\sqrt{2} - 7}{48}\pi = \frac{8\sqrt{2} - 7}{192}\pi$$

■

**4** (1) 連続する自然数 $k,\ k+1$ は互いに素である．この 2 数の積が $n$ 乗数であるから，$k,\ k+1$ は整数 $l,\ m$ を用いて

$$k = l^n,\ k+1 = m^n$$

とおける $(1 \leqq l < m)$．上の 2 式から　$1 = m^n - l^n \quad \cdots (*)$

上式の右辺は　$m^n - l^n = (m-l)\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m^{n-i}l^{i-1} \geqq \sum_{i=1}^{n} m^{n-i} \geqq 2$

これは $(*)$ に反するので，連続する 2 個の自然数の積は $n$ 乗数ではない．

(2) $n > 2$ に対して，連続する $n$ 個の自然数 $k,\ k+1,\ \cdots, k+n-1$ の積が $n$ 乗数であると仮定すると，次式を満たす整数 $N$ が存在する．

$$k(k+1)\cdots(k+n-1) = N^n \quad (k < N < k+n-1)$$

上式から，$N = k+j-1$ を満たす自然数 $j$ $(1 < j < n)$ が存在するので

$$k(k+1)\cdots(k+j-2)(k+j)\cdots(k+n-1) = (k+j-1)^{n-1}$$

これから，$k+j$ が $(k+j-1)^{n-1}$ の約数となるが，$k+j-1$ と $k+j$ は互いに素であるから，矛盾を生じる．

よって，連続する $n$ 個の自然数の積は $n$ 乗数ではない．　■

**5** (1) (D) の条件は，$|\det(A)| = 1 \cdots (*)$ を満たすことである．

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ より　$\det(B) = 1$，$\det(B^{-1}) = 1$

したがって　$|\det(BA)| = |\det(B)\det(A)| = 1$，

$|\det(B^{-1}A)| = |\det(B^{-1})\det(A)| = 1$

よって，行列 $BA$ と $B^{-1}A$ も条件 (D) を満たす．

(2) $c = 0$ のとき，$(*)$ より　$|ad| = 1$

$a$，$d$ は整数であるから　$a = \pm 1$，$d = \pm 1$

$B^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$(B^{-1})^n = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ より

$$B^nA = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b+nd \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

$$(B^{-1})^nA = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b-nd \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

$b$ は整数，$d = \pm 1$ であるから

$$b + nd = 0 \quad \text{または} \quad b - nd = 0$$

を満たす整数 $n$ が存在するので，このとき，$B^nA$ または $(B^{-1})^nA$ は

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

となる．$a = \pm 1$，$d = \pm 1$ であるから，題意は成立する．

(3) $BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}$

$B^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ c & d \end{pmatrix}$

$|a| \geqq |c| > 0$ より　$ac > 0$ のとき　$|a-c| = |a| - |c|$

$ac < 0$ のとき　$|a+c| = |a| - |c|$

ゆえに　$ac > 0$ のとき　$|a-c| + |c| = |a| < |a| + |c|$

$ac < 0$ のとき　$|a+c| + |c| = |a| < |a| + |c|$

よって，$BA$，$B^{-1}A$ の少なくともどちらか一方を $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ としたとき，

$|x| + |z| < |a| + |c|$ が成立する． ■

**6** (1) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ とおくと，$A = \dfrac{a+b}{2}E + \dfrac{a-b}{2}F$,
$B = \dfrac{a+b}{2}E - \dfrac{a-b}{2}F$ であるから

$$U(t)AU(-t) - B = U(t)\left(\frac{a+b}{2}E + \frac{a-b}{2}F\right)U(-t) - \left(\frac{a+b}{2}E - \frac{a-b}{2}F\right)$$
$$= \frac{a-b}{2}\{U(t)FU(-t) + F\}$$

したがって, 対角和の線形性および互換性により

$$f(x) = \frac{a-b}{2}\mathrm{Tr}\big((U(t)FU(-t) + F)U(x)FU(-x)\big)$$
$$= \frac{a-b}{2}\mathrm{Tr}\big(U(-x)(U(t)FU(-t) + F)U(x)F\big)$$
$$= \frac{a-b}{2}\left\{\mathrm{Tr}\big(U(-x+t)FU(x-t)F\big) + \mathrm{Tr}\big(U(-x)FU(x)F\big)\right\}$$

ここで，$G(x) = U(-x)FU(x)F$ とおくと

$$G(x) = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ -\sin x & -\cos x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & -\cos x \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -\sin 2x & \cos 2x \end{pmatrix}$$

上の結果より，$\mathrm{Tr}(G(x)) = 2\cos 2x$ であるから

$$f(x) = \frac{a-b}{2}\{\mathrm{Tr}(G(x-t)) + \mathrm{Tr}(G(x))\}$$
$$= \frac{a-b}{2}\{2\cos 2(x-t) + 2\cos 2x\}$$
$$= 2(a-b)\cos t\cos(2x-t)$$

$a \geqq b$ に注意して　　$\boldsymbol{m(t) = 2(a-b)|\cos t|}$

**補足** $\mathrm{Tr}(kA) = k\mathrm{Tr}(A)$，$\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$ が成立する (線形性).
互換性により次が成立する (① と ② は必ずしも一致しない).

$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA),$$
$$\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(CAB) = \mathrm{Tr}(BCA) \quad \cdots ①,$$
$$\mathrm{Tr}(ACB) = \mathrm{Tr}(BAC) = \mathrm{Tr}(CBA) \quad \cdots ②$$

(2) $C=\dfrac{a^c+b^c}{2}E+\dfrac{a^c-b^c}{2}F$, $D=\dfrac{b^{1-c}+a^{1-c}}{2}E+\dfrac{b^{1-c}-a^{1-c}}{2}F$ であるから

$$p=\frac{a^c+b^c}{2},\quad q=\frac{a^c-b^c}{2},\quad r=\frac{b^{1-c}+a^{1-c}}{2},\quad s=\frac{b^{1-c}-a^{1-c}}{2}$$

とおくと，$C=pE+qF$，$D=rE+sF$ であるから

$$\begin{aligned}U(t)CU(-t)D&=U(t)(pE+qF)U(-t)(rE+sF)\\&=prE+psF+qrU(t)FU(-t)+qsU(t)FU(-t)F\end{aligned}$$

このとき

$$\begin{aligned}U(t)FU(-t)&=\begin{pmatrix}\cos t&-\sin t\\ \sin t&\cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos t&\sin t\\-\sin t&\cos t\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\cos 2t&\sin 2t\\ \sin 2t&-\cos 2t\end{pmatrix},\\U(t)FU(-t)F&=\begin{pmatrix}\cos 2t&\sin 2t\\ \sin 2t&-\cos 2t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\cos 2t&-\sin 2t\\ \sin 2t&\cos 2t\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\mathrm{Tr}(E)=2$，$\mathrm{Tr}(F)=0$ および

$$\mathrm{Tr}(U(t)FU(-t))=0,\quad \mathrm{Tr}(U(t)FU(-t)F)=2\cos 2t$$

であるから

$$\begin{aligned}2\mathrm{Tr}(U(t)CU(-t)D)&=2pr\mathrm{Tr}(E)+2qs\mathrm{Tr}(U(t)FU(-t)F)\\&=4pr+4qs\cos 2t\quad\cdots(*)\end{aligned}$$

また，(1) と同様にして

$$\begin{aligned}U(t)AU(-t)+B&=U(t)\left(\frac{a+b}{2}E+\frac{a-b}{2}F\right)U(-t)+\left(\frac{a+b}{2}E-\frac{a-b}{2}F\right)\\&=(a+b)E+\frac{a-b}{2}\{U(t)FU(-t)-F\}\end{aligned}$$

ゆえに　$\mathrm{Tr}(U(t)AU(-t)+B)=(a+b)\mathrm{Tr}(E)=2(a+b)$

これと (1) の結果により

$$\mathrm{Tr}(U(t)AU(-t)+B)-m(t)=2(a+b)-2(a-b)|\cos t|\quad\cdots(**)$$

したがって

$$\begin{aligned}(*) &= 4pr + 4qs\cos 2t \\ &= 4pr + 4qs(2\cos^2 t - 1) \\ &= 4pr - 4qs + 8qs\cos^2 t \\ &= (a^c + b^c)(b^{1-c} + a^{1-c}) - (a^c - b^c)(b^{1-c} - a^{1-c}) \\ &\qquad + 2(a^c - b^c)(b^{1-c} - a^{1-c})\cos^2 t \\ &= 2(a+b) - 2(a^c - b^c)(a^{1-c} - b^{1-c})|\cos t|^2\end{aligned}$$

$a \geqq b > 0$ に注意して

$$\begin{aligned}(*) - (**) &= -2(a^c - b^c)(a^{1-c} - b^{1-c})|\cos t|^2 + 2(a-b)|\cos t| \\ &= 2|\cos t|\{a - b - (a^c - b^c)(a^{1-c} - b^{1-c})|\cos t|\} \\ &\geqq 2|\cos t|\{a - b - (a^c - b^c)(a^{1-c} - b^{1-c})\} \\ &= 2|\cos t|(a^c b^{1-c} + a^{1-c}b^c - 2b) \\ &\geqq 2|\cos t|(2\sqrt{a^c b^{1-c} \cdot a^{1-c} b^c} - 2b) \\ &= 4|\cos t|(\sqrt{ab} - b) = 4|\cos t|\sqrt{b}(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \geqq 0\end{aligned}$$

よって，すべての実数 $t$ に対し

$$2\mathrm{Tr}(U(t)CU(-t)D) \geqq \mathrm{Tr}(U(t)AU(-t) + B) - m(t)$$

が成り立つ．

■