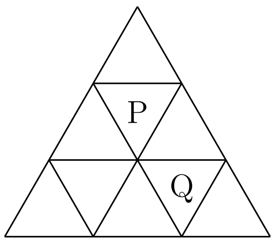
平成24年度　東京大学2次試験前期日程 (数学問題)150分
理科 (一類，二類，三類)　数 I・II・III・A・B・C

1 次の連立不等式で定まる座標平面上の領域 D を考える．

$$x^2+(y-1)^2 \leqq 1, \quad x \geqq \frac{\sqrt{2}}{3}$$

直線 ℓ は原点を通り，D との共通部分が線分となるものとする．その線分の長さ L の最大値を求めよ．また，L が最大値をとるとき，x 軸と ℓ のなす角 $\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の余弦 $\cos\theta$ を求めよ．

2 図のように，正三角形を9つの部屋に辺で区切り，部屋P，Qを定める．1つの球が部屋Pを出発し，1秒ごとに，そのままその部屋にとどまることなく，辺を共有する隣の部屋に等確率で移動する．球が n 秒後に部屋Qにある確率を求めよ．



3 座標平面上で2つの不等式

$$y \geqq \frac{1}{2}x^2, \quad \frac{x^2}{4}+4y^2 \leqq \frac{1}{8}$$

によって定まる領域を S とする．S を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を V_1 とし，y 軸のまわりに回転してできる立体の体積を V_2 とする．

(1) V_1 と V_2 の値を求めよ．

(2) $\dfrac{V_2}{V_1}$ の値と1の大小を判定せよ．

4 n を2以上の整数とする．自然数 (1以上の整数) の n 乗になる数を n 乗数と呼ぶことにする．以下の問いに答えよ．

(1) 連続する2個の自然数の積は n 乗数でないことを示せ．

(2) 連続する n 個の自然数の積は n 乗数でないことを示せ．

$\boxed{5}$ 行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が次の条件 (D) を満たすとする．

(D) A の成分 a，b，c，d は整数である．また，平面上の 4 点 $(0,\ 0)$，$(a,\ b)$，$(a+c,\ b+d)$，$(c,\ d)$ は，面積 1 の平行四辺形の 4 つの頂点をなす．

$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) 行列 BA と $B^{-1}A$ も条件 (D) を満たすことを示せ．

(2) $c=0$ ならば，A に B，B^{-1} のどちらかを左から次々にかけることにより，4 個の行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ のどれかにできることを示せ．

(3) $|a| \geqq |c| > 0$ とする．BA，$B^{-1}A$ の少なくともどちらか一方は，それを $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ とすると

$$|x|+|z|<|a|+|c|$$

を満たすことを示せ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ 2×2 行列 $P=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ に対して

$$\mathrm{Tr}(P)=p+s$$

と定める．

a，b，c は $a \geqq b > 0$，$0 \leqq c \leqq 1$ を満たす実数とする．行列 A，B，C，D を次で定める．

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} a^c & 0 \\ 0 & b^c \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} b^{1-c} & 0 \\ 0 & a^{1-c} \end{pmatrix}$$

また実数 x に対し $U(x)=\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$ とする．

このとき以下の問いに答えよ．

(1) 各実数 t に対して，x の関数

$$f(x)=\mathrm{Tr}\left((U(t)AU(-t)-B)U(x)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}U(-x)\right)$$

の最大値 $m(t)$ を求めよ．(ただし，最大値をとる x を求める必要はない．)

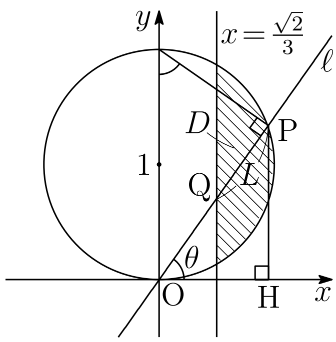
(2) すべての実数 t に対し

$$2\mathrm{Tr}(U(t)CU(-t)D) \geqq \mathrm{Tr}(U(t)AU(-t)+B)-m(t)$$

が成り立つことを示せ．

解答例

$\boxed{1}$ ℓ と円 $x^2+(y-1)^2=1$ および直線 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ との交点をそれぞれ P，Q とし，P から x 軸に垂線 PH を引くと



$$\mathrm{OP}=2\sin\theta,\quad \mathrm{OQ}=\frac{\sqrt{2}}{3\cos\theta},$$

$$\mathrm{OH}=\mathrm{OP}\cos\theta=2\sin\theta\cos\theta=\sin 2\theta$$

$\sin 2\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ を満たす θ を α，β とすると $\left(0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{\sqrt{2}}{3}\quad \text{ゆえに}\quad \tan^2\theta-3\sqrt{2}\tan\theta+1=0$$

すなわち $\quad \tan\alpha=\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{14}}{2},\ \tan\beta=\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{14}}{2}$

したがって $\quad L=\mathrm{OP}-\mathrm{OQ}=2\sin\theta-\dfrac{\sqrt{2}}{3\cos\theta}\quad (\alpha<\theta<\beta)$

$$\begin{aligned}\frac{dL}{d\theta}&=2\cos\theta-\frac{\sqrt{2}\sin\theta}{3\cos^2\theta}\\&=-\frac{\sqrt{2}}{3}\cos\theta\{\tan\theta(1+\tan^2\theta)-3\sqrt{2}\}\\&=-\frac{\sqrt{2}}{3}\cos\theta(\tan\theta-\sqrt{2})(\tan^2\theta+\sqrt{2}\tan\theta+3)\end{aligned}$$

$\tan\theta_0=\sqrt{2}$ とおくと $\left(0<\theta_0<\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\alpha<\theta_0<\beta$ であるから

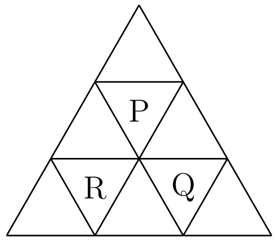
θ	(α)	$\cdots$	θ_0	$\cdots$	(β)
$\frac{dL}{d\theta}$		$+$	0	$-$	
L		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

L を最大にする θ は

$$\tan\theta=\sqrt{2}\quad \text{これから}\quad \boldsymbol{\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}},\quad \sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

このとき $\quad L=2\sin\theta-\dfrac{\sqrt{2}}{3\cos\theta}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$ ■

$\boxed{2}$ 右の図のように部屋 R をとると，n 秒後の球は，n が偶数のとき，部屋 P，Q，R にあり，n が奇数のとき，P，Q，R 以外の部屋にある．
したがって，n が奇数のとき，部屋 Q にある確率は



$$0$$

n が偶数のとき，$n=2k$ 秒後に，P，Q，R にある確率を p_k，q_k，r_k とすると

$$\begin{aligned}
p_{k+1} &= p_k \times \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) + q_k \times \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + r_k \times \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} \\
q_{k+1} &= q_k \times \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) + r_k \times \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + p_k \times \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} \\
r_{k+1} &= r_k \times \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) + p_k \times \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + q_k \times \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

したがって，k を 0 以上の整数とすると，次の確率漸化式が成立する．

$$\begin{aligned}
&p_0 = 1,\quad q_0 = r_0 = 0 \\
&p_{k+1} = \frac{2}{3}p_k + \frac{1}{6}q_k + \frac{1}{6}r_k \quad \cdots ① \\
&q_{k+1} = \frac{1}{6}p_k + \frac{2}{3}q_k + \frac{1}{6}r_k \quad \cdots ② \\
&r_{k+1} = \frac{1}{6}p_k + \frac{1}{6}q_k + \frac{2}{3}r_k \quad \cdots ③
\end{aligned}$$

①，②，③ の辺々を加えると

$$p_{k+1}+q_{k+1}+r_{k+1} = p_k+q_k+r_k \quad \text{ゆえに} \quad p_k+q_k+r_k = 1 \quad \cdots ④$$

① − ② より　$p_{k+1}-q_{k+1} = \dfrac{1}{2}(p_k-q_k)$　ゆえに　$p_k-q_k = \dfrac{1}{2^k}$　$\cdots$ ⑤

② − ③ より　$q_{k+1}-r_{k+1} = \dfrac{1}{2}(q_k-r_k)$　ゆえに　$q_k-r_k = 0$　$\cdots$ ⑥

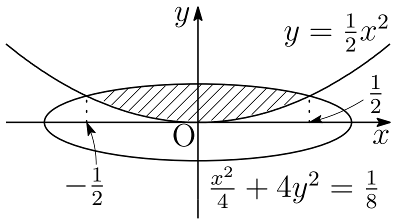
④，⑤，⑥ より　$q_k = \dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{2^k}\right)$

よって，求める確率は　**n が奇数のとき　0,**

n が偶数のとき　$\boldsymbol{\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}}\right)}$

■

3 (1) $y=\dfrac{1}{2}x^2\cdots$①，$\dfrac{x^2}{4}+4y^2=\dfrac{1}{8}\cdots$②



①，② から y を消去すると

$$\frac{x^2}{4}+x^4=\frac{1}{8}$$

ゆえに　$(2x^2+1)(4x^2-1)=0$　これを解いて　$x=\pm\dfrac{1}{2}$

① より $y^2=\dfrac{1}{4}x^4$，② より $y^2=\dfrac{1}{32}(1-2x^2)$ であるから

$$\begin{aligned}V_1&=2\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{32}(1-2x^2)-\frac{1}{4}x^4\right\}dx\\&=2\pi\Big[\frac{1}{32}\left(x-\frac{2}{3}x^3\right)-\frac{1}{20}x^5\Big]_0^{\frac{1}{2}}=\boldsymbol{\frac{11}{480}\pi}\end{aligned}$$

① および ② の x 軸の上側の方程式が $y=\dfrac{1}{8}\sqrt{2-4x^2}$ であるから

$$\begin{aligned}V_2&=2\pi\int_0^{\frac{1}{2}}x\left(\frac{1}{8}\sqrt{2-4x^2}-\frac{1}{2}x^2\right)dx\\&=2\pi\Big[-\frac{1}{96}(2-4x^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{8}x^4\Big]_0^{\frac{1}{2}}=\boldsymbol{\frac{8\sqrt{2}-7}{192}\pi}\end{aligned}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}\frac{V_2}{V_1}-1&=\frac{8\sqrt{2}-7}{192}\cdot\frac{480}{11}-1=\frac{5(8\sqrt{2}-7)}{22}-1\\&=\frac{40\sqrt{2}-57}{22}=\frac{\sqrt{3200}-\sqrt{3249}}{22}<0\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{\dfrac{V_2}{V_1}<1}$

補足 一般に，$a \leqq x \leqq b$ において $f(x) \geqq 0$ であるとき，$y=f(x)$ と x 軸で囲まれた図形 S を x 軸および y 軸のまわりに回転してできる立体の体積をそれぞれ V_1，V_2 とすると

$$V_1 = \pi\int_a^b \{f(x)\}^2\,dx, \quad V_2 = 2\pi\int_a^b xf(x)\,dx$$

S を x 軸を元に y 軸方向に k 倍に拡大した図形を x 軸および y 軸のまわりに回転してできる立体の体積をそれぞれ V_x，V_y とすると

$$V_k = \pi\int_a^b \{kf(x)\}^2\,dx = k^2V_1,$$
$$V_y = 2\pi\int_a^b x\{kf(x)\}\,dx = kV_2$$

①，② の図形をそれぞれ x 軸を元に y 軸方向に 4 倍に拡大すると

$$y = 2x^2, \quad x^2+y^2 = \frac{1}{2}$$

これらの図形によって囲まれる部分を x 軸および y 軸のまわりに回転してできる立体の体積をそれぞれ V_x，V_y とすると

$$\begin{aligned} V_x &= 2\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{2} - x^2 - (2x^2)^2\right\}dx \\ &= 2\pi\Big[\,\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{5}x^5\,\Big]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{11}{30}\pi, \\ V_y &= 2\pi\int_0^{\frac{1}{2}} x\left(\sqrt{\frac{1}{2}-x^2} - 2x^2\right)dx \\ &= 2\pi\Big[-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-x^2\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^4\,\Big]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{8\sqrt{2}-7}{48}\pi \end{aligned}$$

このとき，$V_x = 4^2V_1$，$V_y = 4V_2$ であるから

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{16}V_x = \frac{1}{16}\cdot\frac{11}{30}\pi = \frac{11}{480}\pi, \\ V_2 &= \frac{1}{4}V_y = \frac{1}{4}\cdot\frac{8\sqrt{2}-7}{48}\pi = \frac{8\sqrt{2}-7}{192}\pi \end{aligned}$$

■

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 連続する自然数 k, $k+1$ は互いに素である．この 2 数の積が n 乗数であるから，k, $k+1$ は整数 l, m を用いて

$$k = l^n,\ k+1 = m^n$$

とおける $(1 \leqq l < m)$．上の 2 式から　$1 = m^n - l^n \quad \cdots (*)$

上式の右辺は　$m^n - l^n = (m-l)\sum_{i=1}^{n} m^{n-i} l^{i-1} > \sum_{i=1}^{n} m^{n-i} \geqq 2$

これは $(*)$ に反するので，連続する 2 個の自然数の積は n 乗数ではない．

(2) $n > 2$ に対して，連続する n 個の自然数 k, $k+1$, $\cdots, k+n-1$ の積が n 乗数である仮定とすると，次式を満たす整数 N が存在する．

$$k(k+1)\cdots(k+n-1) = N^n \quad (k < N < k+n-1)$$

上式から，$N = k+j-1$ を満たす自然数 j $(1 < j < n)$ が存在するので

$$k(k+1)\cdots(k+j-2)(k+j)\cdots(k+n-1) = (k+j-1)^{n-1}$$

これから，$k+j$ が $(k+j-1)^{n-1}$ の約数となるが，$k+j-1$ と $k+j$ は互いに素であるから，矛盾を生じる．

よって，連続する n 個の自然数の積は n 乗数ではない．　■

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) (D) の条件は，$|\det(A)|=1$ を満たすことである．

$B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$，$B^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$ より　$\det(B)=1$，$\det(B^{-1})=1$

したがって　$|\det(BA)|=|\det(B)\det(A)|=1$,

$|\det(B^{-1}A)|=|\det(B^{-1})\det(A)|=1$

よって，行列 BA と $B^{-1}A$ も条件 (D) を満たす．

(2) $c=0$ のとき，$(*)$ より　$|ad|=1$

a, d は整数であるから　$a=\pm1$, $d=\pm1$

$B^n=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}$，$(B^{-1})^n=\begin{pmatrix}1&-n\\0&1\end{pmatrix}$ より

$$B^nA=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\0&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b+nd\\0&d\end{pmatrix},$$
$$(B^{-1})^nA=\begin{pmatrix}1&-n\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\0&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b-nd\\0&d\end{pmatrix}$$

b は整数，$d=\pm1$ であるから

$$b+nd=0\quad \text{または}\quad b-nd=0$$

を満たす整数 n が存在するので，このとき，B^nA または $(B^{-1})^nA$ は

$$\begin{pmatrix}a&0\\0&d\end{pmatrix}$$

となる．$a=\pm1$, $d=\pm1$ であるから，題意は成立する．

(3) $BA=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+c&b+d\\c&d\end{pmatrix}$

$B^{-1}A=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-c&b-d\\c&d\end{pmatrix}$

$|a|\geqq|c|>0$ より　$ac>0$ のとき　$|a-c|=|a|-|c|$

$ac<0$ のとき　$|a+c|=|a|-|c|$

ゆえに　$ac>0$ のとき　$|a-c|+|c|=|a|<|a|+|c|$

$ac<0$ のとき　$|a+c|+|c|=|a|<|a|+|c|$

よって，BA，$B^{-1}A$ の少なくともどちらか一方を $\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}$ としたとき，

$|x|+|z|<|a|+|c|$ が成立する．■

$\boxed{6}$ (1) $E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，$F=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ とおくと，$A=\dfrac{a+b}{2}E+\dfrac{a-b}{2}F$，

$B=\dfrac{a+b}{2}E-\dfrac{a-b}{2}F$ であるから

$$\begin{aligned}U(t)AU(-t)-B&=U(t)\left(\frac{a+b}{2}E+\frac{a-b}{2}F\right)U(-t)-\left(\frac{a+b}{2}E-\frac{a-b}{2}F\right)\\&=\frac{a-b}{2}\{U(t)FU(-t)+F\}\end{aligned}$$

したがって, 対角和の線形性および互換性により

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{a-b}{2}\mathrm{Tr}\big((U(t)FU(-t)+F)U(x)FU(-x)\big)\\&=\frac{a-b}{2}\mathrm{Tr}\big(U(-x)(U(t)FU(-t)+F)U(x)F\big)\\&=\frac{a-b}{2}\left\{\mathrm{Tr}\big(U(-x+t)FU(x-t)F\big)+\mathrm{Tr}\big(U(-x)FU(x)F\big)\right\}\end{aligned}$$

ここで，$G(x)=U(-x)FU(x)F$ とおくと

$$\begin{aligned}G(x)&=\begin{pmatrix}\cos x&\sin x\\-\sin x&\cos x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos x&-\sin x\\\sin x&\cos x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\cos x&-\sin x\\-\sin x&-\cos x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos x&\sin x\\\sin x&-\cos x\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\cos 2x&\sin 2x\\-\sin 2x&\cos 2x\end{pmatrix}\end{aligned}$$

上の結果より，$\mathrm{Tr}(G(x))=2\cos 2x$ であるから

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{a-b}{2}\{\mathrm{Tr}(G(x-t))+\mathrm{Tr}(G(x))\}\\&=\frac{a-b}{2}\{2\cos 2(x-t)+2\cos 2x\}\\&=2(a-b)\cos t\cos(2x-t)\end{aligned}$$

$a\geqq b$ に注意して　　$\boldsymbol{m(t)=2(a-b)|\cos t|}$

補足 $\mathrm{Tr}(kA)=k\mathrm{Tr}(A)$，$\mathrm{Tr}(A+B)=\mathrm{Tr}(A)+\mathrm{Tr}(B)$ が成立する (線形性).
互換性により次が成立する (① と ② は必ずしも一致しない).

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}(AB)=\mathrm{Tr}(BA),\\&\mathrm{Tr}(ABC)=\mathrm{Tr}(CAB)=\mathrm{Tr}(BCA)\quad\cdots①,\\&\mathrm{Tr}(ACB)=\mathrm{Tr}(BAC)=\mathrm{Tr}(CBA)\quad\cdots②\end{aligned}$$

(2) $C=\dfrac{a^c+b^c}{2}E+\dfrac{a^c-b^c}{2}F$，$D=\dfrac{b^{1-c}+a^{1-c}}{2}E+\dfrac{b^{1-c}-a^{1-c}}{2}F$ であるから

$$p=\frac{a^c+b^c}{2},\quad q=\frac{a^c-b^c}{2},\quad r=\frac{b^{1-c}+a^{1-c}}{2},\quad s=\frac{b^{1-c}-a^{1-c}}{2}$$

とおくと，$C=pE+qF$，$D=rE+sF$ であるから

$$\begin{aligned}U(t)CU(-t)D&=U(t)(pE+qF)U(-t)(rE+sF)\\&=prE+psF+qrU(t)FU(-t)+qsU(t)FU(-t)F\end{aligned}$$

このとき

$$\begin{aligned}U(t)FU(-t)&=\begin{pmatrix}\cos t&-\sin t\\\sin t&\cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos t&-\sin t\\\sin t&\cos t\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\cos 2t&\sin 2t\\\sin 2t&-\cos 2t\end{pmatrix},\\U(t)FU(-t)F&=\begin{pmatrix}\cos 2t&\sin 2t\\\sin 2t&-\cos 2t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\cos 2t&-\sin 2t\\\sin 2t&\cos 2t\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\mathrm{Tr}(E)=2$，$\mathrm{Tr}(F)=0$ および

$$\mathrm{Tr}(U(t)FU(-t))=0,\quad \mathrm{Tr}(U(t)FU(-t)F)=2\cos 2t$$

であるから

$$\begin{aligned}2\mathrm{Tr}(U(t)CU(-t)D)&=2pr\mathrm{Tr}(E)+2qs\mathrm{Tr}(U(t)FU(-t)F)\\&=4pr+4qs\cos 2t\quad\cdots(*)\end{aligned}$$

また，(1) と同様にして

$$\begin{aligned}U(t)AU(-t)+B&=U(t)\left(\frac{a+b}{2}E+\frac{a-b}{2}F\right)U(-t)+\left(\frac{a+b}{2}E-\frac{a-b}{2}F\right)\\&=(a+b)E+\frac{a-b}{2}\{U(t)FU(-t)-F\}\end{aligned}$$

ゆえに　$\mathrm{Tr}(U(t)AU(-t)+B)=(a+b)\mathrm{Tr}(E)=2(a+b)$

これと (1) の結果により

$$\mathrm{Tr}(U(t)AU(-t)+B)-m(t)=2(a+b)-2(a-b)|\cos t|\quad\cdots(**)$$

したがって

$$\begin{aligned}
(*) &= 4pr + 4qs\cos 2t \\
&= 4pr + 4qs(2\cos^2 t - 1) \\
&= 4pr - 4qs + 8qs\cos^2 t \\
&= (a^c + b^c)(b^{1-c} + a^{1-c}) - (a^c - b^c)(b^{1-c} - a^{1-c}) \\
&\qquad\qquad + 2(a^c - b^c)(b^{1-c} - a^{1-c})\cos^2 t \\
&= 2(a+b) - 2(a^c - b^c)(a^{1-c} - b^{1-c})|\cos t|^2
\end{aligned}$$

$a \geqq b > 0$ に注意して

$$\begin{aligned}
(*) - (**) &= -2(a^c - b^c)(a^{1-c} - b^{1-c})|\cos t|^2 + 2(a-b)|\cos t| \\
&= 2|\cos t|\{a - b - (a^c - b^c)(a^{1-c} - b^{1-c})|\cos t|\} \\
&\geqq 2|\cos t|\{a - b - (a^c - b^c)(a^{1-c} - b^{1-c})\} \\
&= 2|\cos t|(a^c b^{1-c} + a^{1-c} b^c - 2b) \\
&\geqq 2|\cos t|(2\sqrt{a^c b^{1-c} \cdot a^{1-c} b^c} - 2b) \\
&= 4|\cos t|(\sqrt{ab} - b) = 4|\cos t|\sqrt{b}(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \geqq 0
\end{aligned}$$

よって，すべての実数 t に対し

$$2\mathrm{Tr}(U(t)CU(-t)D) \geqq \mathrm{Tr}(U(t)AU(-t) + B) - m(t)$$

が成り立つ. ■