平成23年度　東京大学2次試験前期日程(数学問題)150分
理科(一類，二類，三類)　数I・II・III・A・B・C

1 座標平面において，点 P(0, 1) を中心とする半径 1 の円を C とする．a を $0 < a < 1$ を満たす実数とし，直線 $y = a(x+1)$ と C との交点を Q，R とする．

(1) △PQR の面積 $S(a)$ を求めよ．

(2) a が $0 < a < 1$ の範囲を動くとき，$S(a)$ が最大となる a を求めよ．

2 実数 x の小数部分を，$0 \leqq y < 1$ かつ $x - y$ が整数となる実数 y のこととし，これを記号 $\langle x \rangle$ で表す．実数 a に対して，無限数列 $\{a_n\}$ の各項 a_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を次のように順次定める．

$$\text{(i)} \quad a_1 = \langle a \rangle$$

$$\text{(ii)} \quad \begin{cases} a_n \neq 0 \text{ のとき，} & a_{n+1} = \left\langle \dfrac{1}{a_n} \right\rangle \\ a_n = 0 \text{ のとき，} & a_{n+1} = 0 \end{cases}$$

(1) $a = \sqrt{2}$ のとき，数列 $\{a_n\}$ を求めよ．

(2) 任意の自然数 n に対して $a_n = a$ となるような $\dfrac{1}{3}$ 以上の実数 a をすべて求めよ．

(3) a が有理数であるとする．a を整数 p と自然数 q を用いて $a = \dfrac{p}{q}$ と表すとき，q 以上のすべての自然数 n に対して，$a_n = 0$ であることを示せ．

3 L を正定数とする．座標平面の x 軸上の正の部分にある点 P$(t,\ 0)$ に対し，原点 O を中心とし点 P を通る円周上を，P から出発して反時計回りに道のり L だけ進んだ点を Q$(u(t),\ v(t))$ と表す．

(1) $u(t)$，$v(t)$ を求めよ．

(2) $0 < a < 1$ の範囲の実数 a に対し，積分

$$f(a) = \int_a^1 \sqrt{\{u'(t)\}^2 + \{v'(t)\}^2}\, dt$$

を求めよ．

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{a \to +0} \frac{f(a)}{\log a}$ を求めよ．

4 座標平面上の1点$\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$をとる．放物線$y=x^2$上の2点$\mathrm{Q}(\alpha,\ \alpha^2)$，$\mathrm{R}(\beta,\ \beta^2)$を，3点P，Q，RがQRを底辺とする二等辺三角形をなすように動かすとき，△PQRの重心$\mathrm{G}(X,\ Y)$の軌跡を求めよ．

5 p，qを2つの正の整数とする．整数$a,\ b,\ c$で条件

$$-q \leqq b \leqq 0 \leqq a \leqq p, \quad b \leqq c \leqq a$$

を満たすものを考え，このような$a,\ b,\ c$を$[a,\ b;\ c]$の形に並べたものを$(p,\ q)$パターンと呼ぶ．各$(p,\ q)$パターン$[a,\ b;\ c]$に対して

$$w([a,\ b;\ c]) = p - q - (a+b)$$

とおく．

(1) $(p,\ q)$パターンのうち，$w([a,\ b;\ c]) = -q$となるものの個数を求めよ．
また，$w([a,\ b;\ c]) = p$となる$(p,\ q)$パターンの個数を求めよ．

以下$p=q$の場合を考える．

(2) sを整数とする．$(p,\ p)$パターンで$w[a,\ b;\ c] = -p+s$となるものの個数を求めよ．

(3) $(p,\ p)$パターンの総数を求めよ．

6 (1) x，yを実数とし，$x>0$とする．tを変数とする2次関数$f(t)=xt^2+yt$の$0 \leqq t \leqq 1$における最大値と最小値の差を求めよ．

(2) 次の条件を満たす点$(x,\ y)$全体からなる座標平面内の領域をSとする．

$x>0$かつ，実数zで$0 \leqq t \leqq 1$の範囲の全ての実数tに対して

$$0 \leqq xt^2 + yt + z \leqq 1$$

を満たすようなものが存在する．

Sの概形を図示せよ．

(3) 次の条件を満たす点$(x,\ y,\ z)$全体からなる座標空間内の領域をVとする．

$0 \leqq x \leqq 1$かつ，$0 \leqq t \leqq 1$の範囲の全ての実数tに対して，

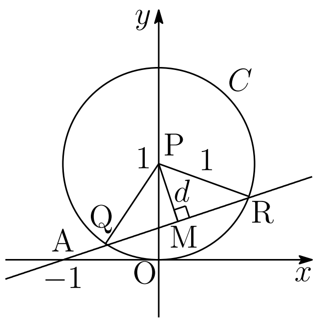
$$0 \leqq xt^2 + yt + z \leqq 1$$

が成り立つ．

Vの体積を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) 2点Q，Rの中点をMとし，$d = \mathrm{PM}$ とおくと，d は点P(0, 1) と直線 $ax - y + a = 0$ の距離であるから，$0 < a < 1$ に注意して



$$d = \frac{|-1+a|}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{1-a}{\sqrt{a^2+1}}$$

また $\quad \mathrm{QR} = 2\mathrm{MR} = 2\sqrt{\mathrm{PR}^2 - d^2}$

$$= 2\sqrt{1 - \frac{(1-a)^2}{a^2+1}} = \frac{2\sqrt{2a}}{\sqrt{a^2+1}}$$

よって $\quad S(a) = \frac{1}{2}\mathrm{QR}\cdot d = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2a}}{\sqrt{a^2+1}}\cdot\frac{1-a}{\sqrt{a^2+1}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2a}(1-a)}{a^2+1}}$

(2) $0 < a < 1$ より，$a = \tan\theta$ とおくと $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{4}\right)$

$$\begin{aligned} S(a) &= \frac{\sqrt{2\tan\theta}(1-\tan\theta)}{\tan^2\theta + 1} \\ &= \sqrt{2\sin\theta\cos\theta}(\cos\theta - \sin\theta) \\ &= \sqrt{\sin 2\theta(1 - \sin 2\theta)} \\ &= \sqrt{-\left(\sin 2\theta - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} \end{aligned}$$

$S(a)$ は，$\theta = \frac{\pi}{12}$，すなわち，$\boldsymbol{a = 2 - \sqrt{3}}$ のとき最大となる．

別解 A$(-1,\ 0)$ とすると，$\mathrm{AQ}\cdot\mathrm{AR} = \mathrm{AO}^2$ であるから，$\mathrm{AR} = t$，$\mathrm{AQ} = \frac{1}{t}$ とし，$S = \triangle\mathrm{PQR}$，$u = \mathrm{MR}$ とすると $(0 < u < 1)$

$$\mathrm{QR} = 2u = t - \frac{1}{t}, \quad d = \sqrt{1-u^2}, \quad S = u\sqrt{1-u^2}$$

したがって $\quad \frac{dS}{dt} = \frac{dS}{du}\cdot\frac{du}{dt} = \frac{1-2u^2}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)$

$u = \frac{1}{\sqrt{2}}$，すなわち，$\frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，S は極大かつ最大となる．

$0 < a < 1$ に注意してこれを解くと $\quad a = 2 - \sqrt{3}$ ■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $a_1 = \langle\sqrt{2}\rangle = \sqrt{2}-1$

$\dfrac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$ より $\left\langle\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}\right\rangle = \langle\sqrt{2}+1\rangle = \sqrt{2}-1$

よって $\boldsymbol{a_n = \sqrt{2}-1 \quad (n = 1, 2, \cdots)}$

(2) $\left\langle\dfrac{1}{a}\right\rangle = \dfrac{1}{a} - m = a$ (m は自然数) であるから

$$a^2 + ma - 1 = 0 \quad ゆえに \quad a = \frac{-m \pm \sqrt{m^2+4}}{2}$$

$a \geqq 0$ であるから $\quad a = \dfrac{-m+\sqrt{m^2+4}}{2} \quad \cdots(*)$

$a \geqq \dfrac{1}{3}$ であるから，$\dfrac{-m+\sqrt{m^2+4}}{2} \geqq \dfrac{1}{3}$ より

$$\sqrt{m^2+4} \geqq m + \frac{2}{3} \quad 両辺を平方して整理すると \quad m \leqq \frac{8}{3}$$

m は自然数であるから $\quad m = 1,\ 2 \quad (*)$ より $\quad \boldsymbol{a = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2},\ \sqrt{2}-1}$

(3) $a = \dfrac{p}{q}$ について，$q_0 = q$，p を q で割った余りを q_1 とすると

$$a_1 = \left\langle\frac{p}{q}\right\rangle = \frac{q_1}{q_0}$$

q_{n-1} を q_n で割った余りを q_{n+1} とすると

$$a_n = \left\langle\frac{q_{n-1}}{q_n}\right\rangle = \frac{q_{n+1}}{q_n} \quad (q_{n+1} < q_n)$$

$\{q_n\}$ は整数からなる減少列で，$q_m = 0$ となる自然数 m $(1 \leqq m \leqq q)$ が存在する．よって，与えられた $a = \dfrac{p}{q}$ のとき，q 以上のすべての自然数 n に対して，$a_n = 0$ となる． ■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\varphi = \angle\mathrm{POQ}$ とおくと $\quad t\varphi = L \quad$ ゆえに $\quad \varphi = \dfrac{L}{t}$

よって $\quad u(t) = t\cos\varphi = \boldsymbol{t\cos\dfrac{L}{t}}, \quad v(t) = t\sin\varphi = \boldsymbol{t\sin\dfrac{L}{t}}$

(2) (1) の結果から

$$u'(t) = \cos\frac{L}{t} + t\left(\cos\frac{L}{t}\right)' = \cos\frac{L}{t} + t\cdot\frac{L}{t^2}\sin\frac{L}{t} = \cos\frac{L}{t} + \frac{L}{t}\sin\frac{L}{t},$$

$$v'(t) = \sin\frac{L}{t} + t\left(\sin\frac{L}{t}\right)' = \sin\frac{L}{t} + t\left(-\frac{L}{t^2}\cos\frac{L}{t}\right) = \sin\frac{L}{t} - \frac{L}{t}\cos\frac{L}{t}$$

したがって　$\{u'(t)\}^2+\{v'(t)\}^2=1+\dfrac{L^2}{t^2}$

ゆえに　$\sqrt{\{u'(t)\}^2+\{v'(t)\}^2}=\dfrac{\sqrt{t^2+L^2}}{t}$

$t=L\tan\theta$ とおくと $(t>0)$　$\dfrac{dt}{d\theta}=\dfrac{L}{\cos^2\theta}$

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{\sqrt{t^2+L^2}}{t}\,dt=\int\frac{\sqrt{(L\tan\theta)^2+L^2}}{L\tan\theta}\cdot\frac{L}{\cos^2\theta}d\theta\\&=L\int\frac{d\theta}{\sin\theta\cos^2\theta}\end{aligned}$$

ここで　$\dfrac{1}{\sin\theta\cos^2\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos^2\theta}+\dfrac{1}{\sin\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos^2\theta}+\dfrac{\sin\theta}{2(1-\cos\theta)}+\dfrac{\sin\theta}{2(1+\cos\theta)}$

$$\begin{aligned}I&=L\int\left\{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\sin\theta}{2(1-\cos\theta)}+\frac{\sin\theta}{2(1+\cos\theta)}\right\}d\theta\\&=\frac{L}{\cos\theta}+\frac{L}{2}\log\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}+C\end{aligned}$$

このとき　$\dfrac{L}{\cos\theta}=L\sqrt{\tan^2\theta+1}=\sqrt{(L\tan\theta)^2+L^2}=\sqrt{t^2+L^2}$

$$\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\frac{\dfrac{L}{\cos\theta}-L}{\dfrac{L}{\cos\theta}+L}=\frac{\sqrt{t^2+L^2}-L}{\sqrt{t^2+L^2}+L}=\frac{t^2}{(\sqrt{t^2+L^2}+L)^2}$$

したがって　$\displaystyle\int\frac{\sqrt{t^2+L^2}}{t}\,dt=\sqrt{t^2+L^2}+L\log\frac{t}{\sqrt{t^2+L^2}+L}+C$

よって　$\displaystyle f(a)=\int_a^1\frac{\sqrt{t^2+L^2}}{t}\,dt=\left[\sqrt{t^2+L^2}+L\log\frac{t}{\sqrt{t^2+L^2}+L}\right]_a^1$

$$=\boldsymbol{\sqrt{1+L^2}-\sqrt{a^2+L^2}+L\log\frac{\sqrt{a^2+L^2}+L}{a(\sqrt{1+L^2}+L)}}$$

(3)　(2) の結果から，$\displaystyle\lim_{a\to+0}\log a=-\infty$，$\displaystyle\lim_{a\to+0}\sqrt{a^2+L^2}=L$ に注意して

$$\begin{aligned}\lim_{a\to+0}\frac{f(a)}{\log a}&=\lim_{a\to+0}\left\{\frac{1}{\log a}\left(\sqrt{1+L^2}-\sqrt{a^2+L^2}+L\log\frac{\sqrt{a^2+L^2}+L}{\sqrt{1+L^2}+L}\right)-L\right\}\\&=\boldsymbol{-L}\end{aligned}$$

別解 $\sqrt{\{u'(t)\}^2+\{v'(t)\}^2}=\dfrac{\sqrt{t^2+L^2}}{t}$ に

$$L^2<t^2+L^2<(t+L)^2$$

を適用すると $(t>0,\ L>0)$

$$\frac{L}{t}<\sqrt{\{u'(t)\}^2+\{v'(t)\}^2}<1+\frac{L}{t}$$

これから
$$\int_a^1\frac{L}{t}\,dt=\Big[\,L\log t\,\Big]_a^1=-L\log a$$
$$\int_a^1\left(1+\frac{L}{t}\right)dt=\Big[\,t+L\log t\,\Big]_a^1=1-a-L\log a$$

したがって　$-L\log a<f(a)<1-a-L\log a$

$0<a<1$ のとき，$\log a<0$ に注意して

$$-L>\frac{f(a)}{\log a}>\frac{1-a}{\log a}-L$$

このとき，$\displaystyle\lim_{a\to+0}\left(\frac{1-a}{\log a}-L\right)=-L$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{a\to+0}\frac{f(a)}{\log a}=-L$$

補足 $\displaystyle\lim_{a\to+0}\log a=-\infty$，$\displaystyle\lim_{a\to+0}f(a)=+\infty$ であるから，ロピタルの定理により

$$\lim_{a\to+0}\frac{f(a)}{\log a}=\lim_{a\to+0}\frac{f'(a)}{(\log a)'}=\lim_{a\to+0}\frac{\dfrac{d}{da}\displaystyle\int_a^1\frac{\sqrt{t^2+L^2}}{t}\,dt}{\dfrac{1}{a}}$$
$$=\lim_{a\to+0}\frac{-\dfrac{\sqrt{a^2+L^2}}{a}}{\dfrac{1}{a}}=\lim_{a\to+0}(-\sqrt{a^2+L^2})=-L$$

ロピタルの定理は大学入試の解答に用いることはできないが，先に答を出して，結果を見据えて解答が書ける．実際，(3) では，$-L$ が答であることに注意しながら解答している．■

$\boxed{4}$ $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$，$\mathrm{Q}(\alpha,\ \alpha^2)$，$\mathrm{R}(\beta,\ \beta^2)$ とする $\triangle\mathrm{PQR}$ の重心が $\mathrm{G}(X,\ Y)$ であるから

$$3X=\alpha+\beta+\frac{1}{2},\quad 3Y=\alpha^2+\beta^2+\frac{1}{4}\quad \text{ゆえに}\quad (*)\begin{cases}\alpha+\beta=3X-\dfrac{1}{2}\\ \alpha^2+\beta^2=3Y-\dfrac{1}{4}\end{cases}$$

条件により，$\mathrm{PQ}^2=\mathrm{PR}^2$ であるから

$$\begin{aligned}\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\alpha^2-\frac{1}{4}\right)^2&=\left(\beta-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\beta^2-\frac{1}{4}\right)^2\\ \left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\beta-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\alpha^2-\frac{1}{4}\right)^2-\left(\beta^2-\frac{1}{4}\right)^2&=0\\ (\alpha-\beta)(\alpha+\beta-1)+(\alpha^2-\beta^2)\left(\alpha^2+\beta^2-\frac{1}{2}\right)&=0\end{aligned}$$

$\mathrm{Q}\neq\mathrm{R}$ より，$\alpha-\beta\neq 0$ であるから

$$\begin{aligned}\alpha+\beta-1+(\alpha+\beta)\left(\alpha^2+\beta^2-\frac{1}{2}\right)&=0\\ (\alpha+\beta)\left(\alpha^2+\beta^2+\frac{1}{2}\right)&=1\\ \alpha^2+\beta^2=\frac{1}{\alpha+\beta}-\frac{1}{2}&\quad\cdots(**)\end{aligned}$$

$(*)$ より，α，β は 2 次方程式の解で，これらは異なる 2 つの実数であるから

$$\alpha^2+\beta^2=\frac{(\alpha+\beta)^2+(\alpha-\beta)^2}{2}>\frac{1}{2}(\alpha+\beta)^2$$

これを $(**)$ に代入すると　$\dfrac{1}{\alpha+\beta}-\dfrac{1}{2}>\dfrac{1}{2}(\alpha+\beta)^2$

ここで，$t=\alpha+\beta$ とおいて整理すると

$$\frac{t^3+t-2}{t}<0\quad\text{ゆえに}\quad\frac{(t-1)(t^2+t+2)}{t}<0$$

$t^2+t+2=\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}>0$ に注意して，これを解くと　$0<t<1$

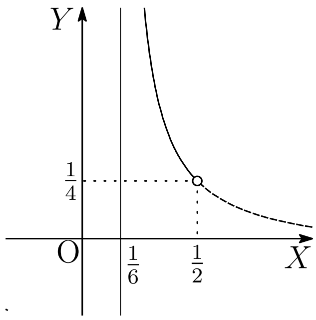
$0<\alpha+\beta<1$ であるから，$(*)$ の第 1 式より　$\dfrac{1}{6}<X<\dfrac{1}{2}$

$(*)$ を $(**)$ に代入するとすると　$3Y-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{3X-\dfrac{1}{2}}-\dfrac{1}{2}$

したがって，$\mathrm{G}(X,\ Y)$ の軌跡の方程式は

$$\boldsymbol{Y=\frac{1}{9\left(X-\frac{1}{6}\right)}-\frac{1}{12}\quad\left(\frac{1}{6}<X<\frac{1}{2}\right)}$$

よって，$\mathrm{G}(X,\ Y)$ の軌跡は，下の図のようになる．



注意　α と β を解とする 2 次方程式は

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$$

この方程式の判別式を D とすると

$$D=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(\alpha-\beta)^2$$

実係数の 2 次方程式の解が α，β であるとき

$$\text{異なる 2 つの実数解をもつ}\quad\Longleftrightarrow\quad(\alpha-\beta)^2>0$$

■

$\boxed{5}$　(1)　$w([a,\ b;\ c])=p-q-(a+b)$ より，$w([a,\ b;\ c])=-q$ となるとき

$$p-q-(a+b)=-q\quad\text{ゆえに}\quad p=a+b$$

$-q\leqq b\leqq 0\leqq a\leqq p$ より，上式を満たすのは　$a=p,\ b=0$
$b\leqq c\leqq a$ より，$0\leqq c\leqq p$ であるから，求める個数は　$\boldsymbol{p+1}$ **(個)**

$w([a,\ b;\ c])=p$ となるとき

$$p-q-(a+b)=p\quad\text{ゆえに}\quad q=-a-b$$

$-q\leqq b\leqq 0\leqq a\leqq p$ より，上式を満たすのは　$a=0,\ b=-q$
$b\leqq c\leqq a$ より，$-q\leqq c\leqq 0$ であるから，求める個数は　$\boldsymbol{q+1}$ **(個)**

(2) $p=q$ より，$w([a,\ b;\ c])=-(a+b)$
$w([a,\ b;\ c])=-p+s$ となるとき

$$-(a+b)=-p+s \quad \text{ゆえに} \quad b=-a+p-s$$

これを $-p \leqq b \leqq 0 \leqq a \leqq p$ に代入して

$$-p \leqq -a+p-s \leqq 0 \leqq a \leqq p \quad \text{ゆえに} \quad \begin{cases} 0 \leqq a \leqq p \\ p-s \leqq a \leqq 2p-s \end{cases}$$

ここで，$m=\max(0,\ p-s)$，$M=\min(p,\ 2p-s)$ とおくと

$$m=\frac{p-s+|p-s|}{2}, \quad M=\frac{3p-s-|p-s|}{2}$$

求める個数を $f(s)$ とする．

(i) $m>M$ のとき $\dfrac{p-s+|p-s|}{2}>\dfrac{3p-s-|p-s|}{2}$
すなわち $|p-s|>p$ のとき $f(s)=0$

(ii) $m \leqq M$ のとき $\dfrac{p-s+|p-s|}{2} \leqq \dfrac{3p-s-|p-s|}{2}$
すなわち，$|p-s| \leqq p$ のとき

$$\begin{aligned} f(s) &= \sum_{a=m}^{M}(a-b+1)=\sum_{a=m}^{M}\{a-(-a+p-s)+1\} \\ &= \sum_{a=m}^{M}(2a-p+s+1) \\ &= 2\cdot\frac{1}{2}(M-m+1)(M+m)+(-p+s+1)(M-m+1) \\ &= (M-m+1)(M+m-p+s) \\ &= (p+1-|p-s|)(p+1) \end{aligned}$$

よって $\boldsymbol{f(s)=\begin{cases} 0 & (s<0,\ 2p<s) \\ (p+1)(s+1) & (0 \leqq s \leqq p) \\ (p+1)(2p-s+1) & (p<s \leqq 2p) \end{cases}}$

(3) (2) の結果から，求める $(p,\ p)$ パターンの総数を $S(p,\ p)$ とすると

$$
\begin{aligned}
S(p,\ p) &= \sum_{s=0}^{2p} f(s) \\
&= (p+1)\left\{\sum_{s=0}^{p}(s+1) + \sum_{s=p+1}^{2p}(2p-s+1)\right\} \\
&= (p+1)\left\{1 + \sum_{s=1}^{p}(s+1) + \sum_{s=1}^{p} s\right\} \\
&= (p+1)\left\{1 + \sum_{s=1}^{p}(2s+1)\right\} \\
&= (p+1)\left\{1 + p(p+2)\right\} = \boldsymbol{(p+1)^3}
\end{aligned}
$$

別解 $(p,\ q)$ パターンの総数を $S(p,\ q)$ とすると

$$
\begin{aligned}
S(p,\ q) &= \sum_{a=0}^{p}\sum_{b=-q}^{0}(a-b+1) \\
&= \sum_{a=0}^{p}\sum_{b=0}^{q}\{(a+1)+b\} \\
&= \sum_{a=0}^{p}\left\{(a+1)(q+1) + \frac{1}{2}q(q+1)\right\} \\
&= \frac{1}{2}(q+1)\sum_{a=0}^{p}(2a+2+q) \\
&= \frac{1}{2}(q+1)(p+1)(p+q+2)
\end{aligned}
$$

よって　　$S(p,\ p) = (p+1)^3$ ■

$\boxed{6}$ (1) $f(t)=xt^2+yt=x\left(t+\dfrac{y}{2x}\right)^2-\dfrac{y^2}{4x}\quad(x>0)$

$0\leqq t\leqq 1$ における $f(t)$ の最大値を M，最小値を m とする．

$\dfrac{1}{2}\leqq -\dfrac{y}{2x}$，すなわち，$y\leqq -x$ のとき　$M=f(0)=0$

$-\dfrac{y}{2x}\leqq\dfrac{1}{2}$，すなわち，$-x\leqq y$ のとき　$M=f(1)=x+y$

$1\leqq -\dfrac{y}{2x}$，すなわち，$y\leqq -2x$ のとき　$m=f(1)=x+y$

$0\leqq -\dfrac{y}{2x}\leqq 1$，すなわち，$-2x\leqq y\leqq 0$ のとき　$m=f\left(-\dfrac{y}{2x}\right)=-\dfrac{y^2}{4x}$

$-\dfrac{y}{2x}\leqq 0$，すなわち，$0\leqq y$ のとき　$m=f(0)=0$

したがって　$M-m=\begin{cases} f(0)-f(1) & (y\leqq -2x)\\ f(0)-f\left(-\dfrac{y}{2x}\right) & (-2x\leqq y\leqq -x)\\ f(1)-f\left(-\dfrac{y}{2x}\right) & (-x\leqq y\leqq 0)\\ f(1)-f(0) & (0\leqq y)\end{cases}$

よって　$\boldsymbol{M-m=\begin{cases} -x-y & (y\leqq -2x)\\ \dfrac{y^2}{4x} & (-2x\leqq y\leqq -x)\\ x+y+\dfrac{y^2}{4x} & (-x\leqq y\leqq 0)\\ x+y & (0\leqq y)\end{cases}}$

(2) $0 \leqq xt^2+yt+z \leqq 1$ より，$0 \leqq f(t)+z \leqq 1$ であるから，すべての t $(0 \leqq t \leqq 1)$ に対して

$$-f(t) \leqq z \leqq 1-f(t) \quad \text{ゆえに} \quad -m \leqq z \leqq 1-M \quad \cdots(*)$$

上式を満たす実数 z が存在するための必要十分条件は

$$-m \leqq 1-M \quad \text{すなわち} \quad M-m \leqq 1$$

したがって，これを (1) の結果に適用する．

(i) $\begin{cases} y \leqq -2x \\ -x-y \leqq 1 \end{cases}$ 　ゆえに　$-x-1 \leqq y \leqq -2x$

(ii) $\begin{cases} -2x \leqq y \leqq -x \\ \dfrac{y^2}{4x} \leqq 1 \end{cases}$ 　第 2 式から　$(y+2\sqrt{x})(y-2\sqrt{x}) \leqq 0$

第 1 式から，$y<0$ であるから，$y-2\sqrt{x}<0$ より　$y+2\sqrt{x} \geqq 0$

ゆえに　$\max(-2x, -2\sqrt{x}) \leqq y \leqq -x$

(iii) $\begin{cases} -x \leqq y \leqq 0 \\ x+y+\dfrac{y^2}{4x} \leqq 1 \end{cases}$ 　第 2 式から　$(2x+y)^2 \leqq 4x$

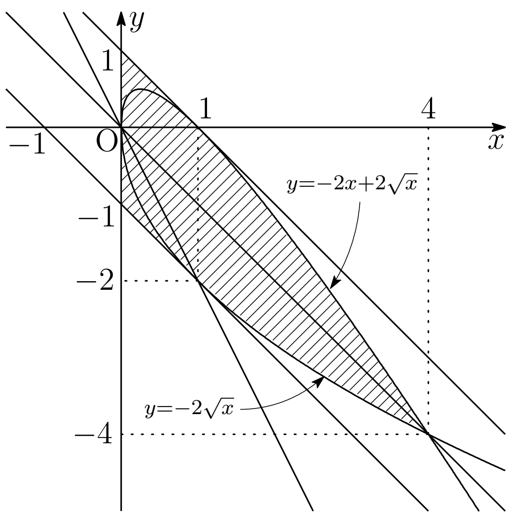
したがって　$(y+2x+2\sqrt{x})(y+2x-2\sqrt{x}) \leqq 0$

第 1 式から　$y+2x+2\sqrt{x} > x+y \geqq 0$

ゆえに　$y+2x-2\sqrt{x} \leqq 0$ 　よって　$-x \leqq y \leqq \min(0, -2x+2\sqrt{x})$

(iv) $\begin{cases} 0 \leqq y \\ x+y \leqq 1 \end{cases}$ 　ゆえに　$0 \leqq y \leqq -x+1$

(i)〜(iv) より，S の概形は下の図の斜線部分で，y 軸を除く境界線を含む．



(3) (1) で求めた M，m を $(*)$ に適用する．

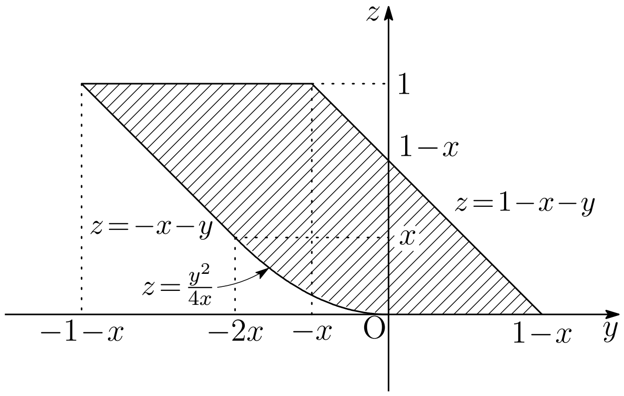
(i) $y \leqq -2x$ のとき　$-x-y \leqq z \leqq 1 \quad (-1-x \leqq y \leqq -2x)$

(ii) $-2x \leqq y \leqq -x$ のとき　$\dfrac{y^2}{4x} \leqq z \leqq 1$

(iii) $-x \leqq y \leqq 0$ のとき　$\dfrac{y^2}{4x} \leqq z \leqq 1-x-y$

(iv) $0 \leqq y$ のとき　$0 \leqq z \leqq 1-x-y \quad (0 \leqq y \leqq 1-x)$

x を固定すると，立体 V の x 軸と垂直な断面は，次のようになる．



上の図の斜線部分の面積を $S(x)$ とすると

$$S(x) = \int_{-1-x}^{-x} 1\,dy + \int_{-x}^{1-x} (1-x-y)\,dy - \int_{-1-x}^{-2x} (-x-y)\,dy - \int_{-2x}^{0} \frac{y^2}{4x}\,dy$$

$$= 1^2 + \frac{1}{2}\cdot 1^2 - \frac{1}{2}(1-x)(1+x) - \left[\ \frac{y^3}{12x}\ \right]_{-2x}^{0} = 1 - \frac{x^2}{6}$$

よって，求める V の体積は

$$\int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{6}\right) dx = \left[\ x - \frac{x^3}{18}\ \right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{17}{18}}$$

注意 $S(x)$ は，正方形，直角二等辺三角形，台形の面積および放物線で囲まれた部分の面積として計算する．

補足 (2)(iii) の不等式 $(2x+y)^2 \leqq 4x$ の境界線 $(2x+y)^2 = 4x$ は放物線である．
実際，直交変換

$$x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\frac{X}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+\frac{Y}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

により，$x=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(2X+Y)$，$y=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(X-2Y)$，$2x+y=\sqrt{5}X$ であるから

$$5X^2 \leqq \frac{4}{\sqrt{5}}(2X+Y) \quad \text{ゆえに} \quad Y \geqq \frac{5\sqrt{5}}{4}\left(X-\frac{4}{5\sqrt{5}}\right)^2-\frac{4}{5\sqrt{5}}$$

放物線の頂点は $\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\dfrac{4}{5\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ すなわち $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\dfrac{4}{25}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

放物線の軸は，点 $\left(\dfrac{4}{25},\ \dfrac{12}{25}\right)$ を通り，傾き -2 の直線であるから

$$y-\frac{12}{25}=-2\left(x-\frac{4}{25}\right) \quad \text{すなわち} \quad y=-2x+\frac{4}{5}$$

また，$4x^2+4xy+y^2=\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 2\\2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ である．

$A=\begin{pmatrix}4 & 2\\2 & 1\end{pmatrix}$ とおくと，A の固有値 5, 0 に対する単位固有ベクトルは，
それぞれ

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\quad \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

である (A は対称行列であるから，固有ベクトルは直交する)．
このとき，直交変換により，次のように対角化される[1]．

$$\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 2\\2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X & Y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$$

■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2010.pdf $\boxed{5}$ 参照