

平成22年度 東京大学2次試験前期日程(数学問題)150分
理科(一類, 二類, 三類) 数I・II・III・A・B・C

問題 1 2 3 4 5 6

- 1 3辺の長さが a と b と c の直方体を, 長さが b の1辺を回転軸として 90° 回転させるとき, 直方体が通過する点全体がつくる立体を V とする.

- (1) V の体積を a, b, c を用いて表せ.
(2) $a + b + c = 1$ のとき, V の体積のとりうる値の範囲を求めよ.

- 2 (1) すべての自然数 k に対して, 次の不等式を示せ.

$$\frac{1}{2(k+1)} < \int_0^1 \frac{1-x}{k+x} dx < \frac{1}{2k}$$

- (2) $m > n$ であるようなすべての自然数 m と n に対して, 次の不等式を示せ.

$$\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)} < \log \frac{m}{n} - \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k} < \frac{m-n}{2mn}$$

- 3 2つの箱LとR, ボール30個, コイン投げで表と裏が等確率 $\frac{1}{2}$ で出るコイン1枚を用意する. x を0以上30以下の整数とする. Lに x 個, Rに $30-x$ 個のボールを入れ, 次の操作(#)を繰り返す.

- (#) 箱Lに入っているボールの個数を z とする. コインを投げ, 表が出れば箱Rから箱Lに, 裏が出れば箱Lから箱Rに, $K(z)$ 個のボールを移す. ただし, $0 \leq z \leq 15$ のとき $K(z) = z$, $16 \leq z \leq 30$ のとき $K(z) = 30 - z$ とする.

m 回の操作の後, 箱Lのボールの個数が30である確率を $P_m(x)$ とする. たとえば $P_1(15) = P_2(15) = \frac{1}{2}$ となる. 以下の問(1), (2), (3)に答えよ.

- (1) $m \geq 2$ のとき, x に対してうまく y を選び, $P_m(x)$ を $P_{m-1}(y)$ で表せ.
(2) n を自然数とするととき, $P_{2n}(10)$ を求めよ.
(3) n を自然数とするととき, $P_{4n}(6)$ を求めよ.

4 O を原点とする座標平面上の曲線

$$C: y = \frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + 2}$$

と、その上の相異なる 2 点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ を考える.

- (1) P_i ($i = 1, 2$) を通る x 軸に平行な直線と、直線 $y = x$ との交点を、それぞれ H_i ($i = 1, 2$) とする. このとき $\triangle OP_1H_1$ と $\triangle OP_2H_2$ の面積は等しいことを示せ.
- (2) $x_1 < x_2$ とする. このとき C の $x_1 \leq x \leq x_2$ の範囲にある部分と、線分 P_1O , P_2O とで囲まれる図形の面積を、 y_1, y_2 を用いて表せ.

5 C を半径 1 の円周とし、 A を C 上の 1 点とする. 3 点 P, Q, R が A を時刻 $t = 0$ に出発し、 C 上を各々一定の速さで、 P, Q は反時計回りに、 R は時計回りに、時刻 $t = 2\pi$ まで動く. P, Q, R の速さは、それぞれ $m, 1, 2$ であるとする. (したがって、 Q は C をちょうど一周する.) ただし、 m は $1 \leq m \leq 10$ をみたす整数である. $\triangle PQR$ が PR を斜辺とする直角二等辺三角形となるような速さ m と時刻 t の組をすべて求めよ.

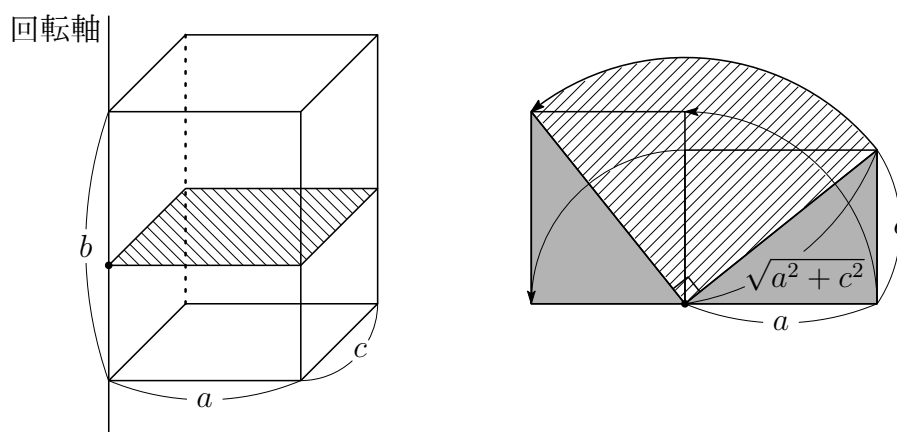
6 四面体 $OABC$ において、4 つの面はすべて合同であり、 $OA = 3$, $OB = \sqrt{7}$, $AB = 2$ であるとする. また、3 点 O, A, B を含む平面を L とする.

- (1) 点 C から平面 L におろした垂線の足を H とおく. $\overrightarrow{OH}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ.
- (2) $0 < t < 1$ をみたす実数 t に対して、線分 OA, OB 各々を $t:1-t$ に内分する点をそれぞれ P_t, Q_t とおく. 2 点 P_t, Q_t を通り、平面 L に垂直な平面を M とするとき、平面 M による四面体 $OABC$ の切り口の面積 $S(t)$ を求めよ.
- (3) t が $0 < t < 1$ の範囲を動くとき、 $S(t)$ の最大値を求めよ.

解答例

- 1 (1) 下の図から、求める体積 V は

$$V = \left(\frac{\pi}{4}(\sqrt{a^2 + c^2})^2 + 2 \times \frac{1}{2}ac \right) b = \left\{ \frac{\pi}{4}(a^2 + c^2) + ac \right\} b$$



- (2) (V は a, c に関する対称式であるから, a と c をまとめて扱う)

$$a^2 + c^2 = \frac{1}{2}\{(a+c)^2 + (a-c)^2\}, \quad ac = \frac{1}{4}\{(a+c)^2 - (a-c)^2\} \text{ より}$$

$$V = \left\{ \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \right) (a+c)^2 + \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \right) (a-c)^2 \right\} b$$

$a+b+c=1$ より $a+c=1-b$ となり, $t=a-c$ とおくと

上の 2 式より $2a=(1-b)+t, 2c=(1-b)-t$

$a>0, c>0$ より $-(1-b)<t<1-b$

このとき, $0 \leq (a-c)^2 < (1-b)^2$ であるから, 固定値 b に対して

$$\left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \right) b(1-b)^2 \leq V < \left\{ \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \right) (1-b)^2 + \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \right) (1-b)^2 \right\} b$$

すなわち $\left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \right) b(1-b)^2 \leq V < \frac{\pi}{4} b(1-b)^2$

3 つの正数 $2b, 1-b, 1-b$ の相加平均・相乗平均の大小関係により ¹

$$\frac{2}{3} = \frac{2b + (1-b) + (1-b)}{3} \geq \sqrt[3]{2b(1-b)^2}$$

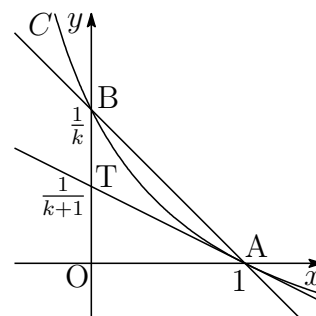
ゆえに $0 < b(1-b)^2 \leq \frac{4}{27}$ よって $0 < V < \frac{\pi}{27}$ ■

¹<http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai-ri-2002.pdf> (p.9 を参照)

2 (1) $y = \frac{1-x}{k+x}$ のグラフを C とすると ($k > 0$)

$$y' = -\frac{k+1}{(k+x)^2}, \quad y'' = \frac{2(k+1)}{(k+x)^3}$$

$$x = 1 \text{ のとき} \quad y' = -\frac{1}{k+1}$$



C 上に 2 点 $A(1, 0)$, $B\left(0, \frac{1}{k}\right)$ をとる. C の点 A における接線の方程式は

$$y = -\frac{1}{k+1}(x-1) \quad \text{すなわち} \quad y = -\frac{x}{k+1} + \frac{1}{k+1}$$

この接線と y 軸との交点を T とすると $T\left(0, \frac{1}{k+1}\right)$

$0 < x < 1$ のとき, $y'' < 0$ であるから, $\triangle OAB$ および $\triangle OAT$ と C のグラフと x 軸で囲まれた部分の面積を比較すると

$$\triangle OAT < \int_0^1 \frac{1-x}{k+x} dx < \triangle OAB$$

$$\text{すなわち} \quad \frac{1}{2(k+1)} < \int_0^1 \frac{1-x}{k+x} dx < \frac{1}{2k}$$

別解 自然数 k に対して, $0 < x < 1$ のとき

$$\frac{1-x}{k+1} < \frac{1-x}{k+x} < \frac{1-x}{k}$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad & \int_0^1 \frac{1-x}{k+1} dx < \int_0^1 \frac{1-x}{k+x} dx < \int_0^1 \frac{1-x}{k} dx \\ & \frac{1}{2(k+1)} < \int_0^1 \frac{1-x}{k+x} dx < \frac{1}{2k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \int_0^1 \frac{1-x}{k+x} dx &= \int_0^1 \left(\frac{1+k}{k+x} - 1 \right) dx = \left[(1+k) \log(k+x) - x \right]_0^1 \\
 &= (k+1) \log \frac{k+1}{k} - 1
 \end{aligned}$$

上式および (1) の結果から

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2(k+1)} &< (k+1) \log \frac{k+1}{k} - 1 < \frac{1}{2k} \\
 \frac{1}{2(k+1)^2} &< \log \frac{k+1}{k} - \frac{1}{k+1} < \frac{1}{2k(k+1)}
 \end{aligned}$$

また, $\frac{1}{2(k+1)(k+2)} < \frac{1}{2(k+1)^2}$ であるから

$$\frac{1}{2(k+1)(k+2)} < \log \frac{k+1}{k} - \frac{1}{k+1} < \frac{1}{2k(k+1)}$$

したがって, $m > n$ である自然数 m と n に対して

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{2k(k+1)} &< \sum_{k=n+1}^m \left(\log \frac{k}{k-1} - \frac{1}{k} \right) < \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{2(k-1)k} \\
 \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^m \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) &< \sum_{k=n+1}^m \log \frac{k}{k-1} - \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k} < \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^m \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \\
 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} \right) &< \log \frac{m}{n} - \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k} < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right)
 \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad \frac{m-n}{2(m+1)(n+1)} < \log \frac{m}{n} - \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k} < \frac{m-n}{2mn}$$

解説 $f''(x) > 0$, $a < b$ とする. 曲線 $y = f(x)$ 上の 2 点 $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ を結ぶ直線の方程式は

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

このとき

$$g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) - f(x)$$

とおくと

$$g'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} - f'(x), \quad g''(x) = -f''(x) < 0$$

$g(a) = g(b) = 0$ であるから, ロルの定理により

$$g'(c) = 0 \quad (a < c < b)$$

を満たす c が存在する.

$g''(x) < 0$ より $g'(x)$ は単調減少であるから, c は唯一存在する.

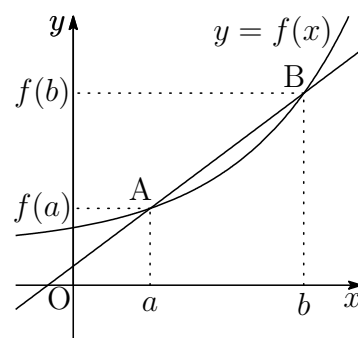
したがって, $a \leq x \leq b$ における $g(x)$ の増減表は

x	a	$\cdots$	c	$\cdots$	b
$g'(x)$		+	0	-	
$g(x)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	0

$a < x < b$ において, $g(x) > 0$ であるから,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) > f(x)$$

よって, この区間において, 直線 AB は曲線 $y = f(x)$ の上側にある.

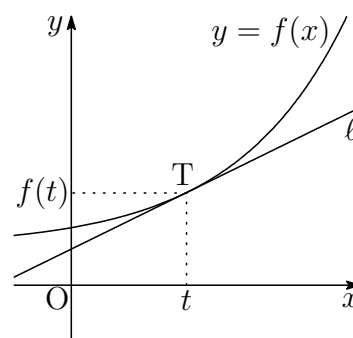


$f''(x) > 0$, t は定数とする. 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $T(t, f(t))$ における接線 ℓ の方程式は

$$y = f'(t)(x - t) + f(t)$$

$h(x) = f(x) - f'(t)(x - t) - f(t)$ とおくと

$$h'(x) = f'(x) - f'(t), \quad h''(x) = f''(x) > 0$$



$h''(x) > 0$ より $h'(x)$ は単調増加であるから, $h(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	t	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\searrow$	極小 0	$\nearrow$

したがって, $h(x)$ は, 最小値 $h(t) = 0$ をとるから, $h(x) \geq 0$ より

$$f(x) \geq f'(t)(x - t) + f(t) \quad \cdots (*)$$

よって, 接線 ℓ は曲線 $y = f(x)$ の上側にはない.

補足 部分積分法を用いて (*) を証明することができる.

$$\begin{aligned} f(x) - f(t) &= \int_t^x f'(u) du = - \int_t^x (x - u)' f'(u) du \\ &= - \left[(x - u) f'(u) \right]_t^x + \int_t^x (x - u) f''(u) du \\ &= f'(t)(x - t) + \int_t^x (x - u) f''(u) du \end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad f(x) - f'(t)(x - t) - f(t) = \int_t^x (x - u) f''(u) du \quad \cdots (**)$$

(i) $t \leq u \leq x$ のとき, $(x - u) f''(u) \geq 0$ であるから

$$\int_t^x (x - u) f''(u) du \geq 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

(ii) $x \leq u \leq t$ のとき, $(u - x) f''(u) \geq 0$ であるから

$$\int_t^x (x - u) f''(u) du = \int_x^t (u - x) f''(u) du \geq 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

(**), $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ より, (*) が成立する. ■

- 3** (1) $0 \leq z \leq 15$ のとき $K(z) = z$, $16 \leq z \leq 30$ のとき $K(z) = 30 - z$ より

$$K(z) = \min(z, 30 - z)$$

(#) により, 次の確率漸化式が成立する.

$$P_m(x) = \frac{1}{2}P_{m-1}(x + K(x)) + \frac{1}{2}P_{m-1}(x - K(x)),$$

$$P_m(0) = 0, \quad P_m(30) = 1$$

- (i) $0 \leq x \leq 15$ のとき, $K(x) = x$ であるから

$$\begin{aligned} P_m(x) &= \frac{1}{2}P_{m-1}(x + x) + \frac{1}{2}P_{m-1}(x - x) \\ &= \frac{1}{2}P_{m-1}(2x) + \frac{1}{2}P_{m-1}(0) \\ &= \frac{1}{2}P_{m-1}(2x) \end{aligned}$$

- (ii) $16 \leq x \leq 30$ のとき, $K(x) = 30 - x$ であるから

$$\begin{aligned} P_m(x) &= \frac{1}{2}P_{m-1}(x + (30 - x)) + \frac{1}{2}P_{m-1}(x - (30 - x)) \\ &= \frac{1}{2}P_{m-1}(30) + \frac{1}{2}P_{m-1}(2x - 30) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}P_{m-1}(2x - 30) \end{aligned}$$

$$(i), (ii) \text{ より } P_m(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}P_{m-1}(2x) & (0 \leq x \leq 15) \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}P_{m-1}(2x - 30) & (16 \leq x \leq 30) \end{cases}$$

- (2) (1) で示した確率漸化式により

$$\begin{aligned} P_{2n}(10) &= \frac{1}{2}P_{2n-1}(20) + \frac{1}{2}P_{2n-1}(0) = \frac{1}{2}P_{2n-1}(20) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}P_{2n-2}(30) + \frac{1}{2}P_{2n-2}(10) \right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}P_{2n-2}(10) \end{aligned}$$

$$\text{ここで, } a_n = P_{2n}(10) \text{ とおくと } a_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}a_{n-1}, \quad a_0 = 0$$

$$\text{上式より } a_n - \frac{1}{3} = \frac{1}{4} \left(a_{n-1} - \frac{1}{3} \right) \quad \text{ゆえに} \quad a_n - \frac{1}{3} = \left(a_0 - \frac{1}{3} \right) \left(\frac{1}{4} \right)^n$$

$$\text{したがって } a_n = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4^n} \right) \quad \text{よって} \quad P_{2n}(10) = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4^n} \right)$$

(3) (2) と同様に, (1) で示した確率漸化式により

$$\begin{aligned}
 P_{4n}(6) &= \frac{1}{2}P_{4n-1}(12) + \frac{1}{2}P_{4n-1}(0) = \frac{1}{2}P_{4n-1}(12) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}P_{4n-2}(24) + \frac{1}{2}P_{4n-2}(0) \right) = \frac{1}{4}P_{4n-2}(24) \\
 &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}P_{4n-3}(30) + \frac{1}{2}P_{4n-3}(18) \right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8}P_{4n-3}(18) \\
 &= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2}P_{4n-4}(30) + \frac{1}{2}P_{4n-4}(6) \right) = \frac{3}{16} + \frac{1}{16}P_{4n-4}(6)
 \end{aligned}$$

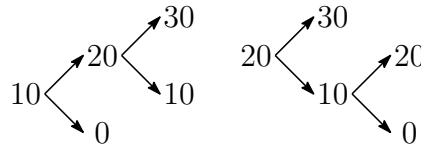
ここで, $b_n = P_{4n}(6)$ とおくと $b_n = \frac{3}{16} + \frac{1}{16}b_{n-1}$, $b_0 = 0$

上式より $b_n - \frac{1}{5} = \frac{1}{16} \left(b_{n-1} - \frac{1}{5} \right)$ ゆえに $b_n - \frac{1}{5} = \left(b_0 - \frac{1}{5} \right) \left(\frac{1}{16} \right)^n$

したがって $b_n = \frac{1}{5} \left(1 - \frac{1}{16^n} \right)$ よって $P_{4n}(6) = \frac{1}{5} \left(1 - \frac{1}{16^n} \right)$

解説

[A] 最初に箱 L に入っているボールの個数が 10, 20 であるとき, 最初のボールの個数に戻るまでの L に入っているボールの個数の推移は次のようになる.



このとき, 推移からも分かるように

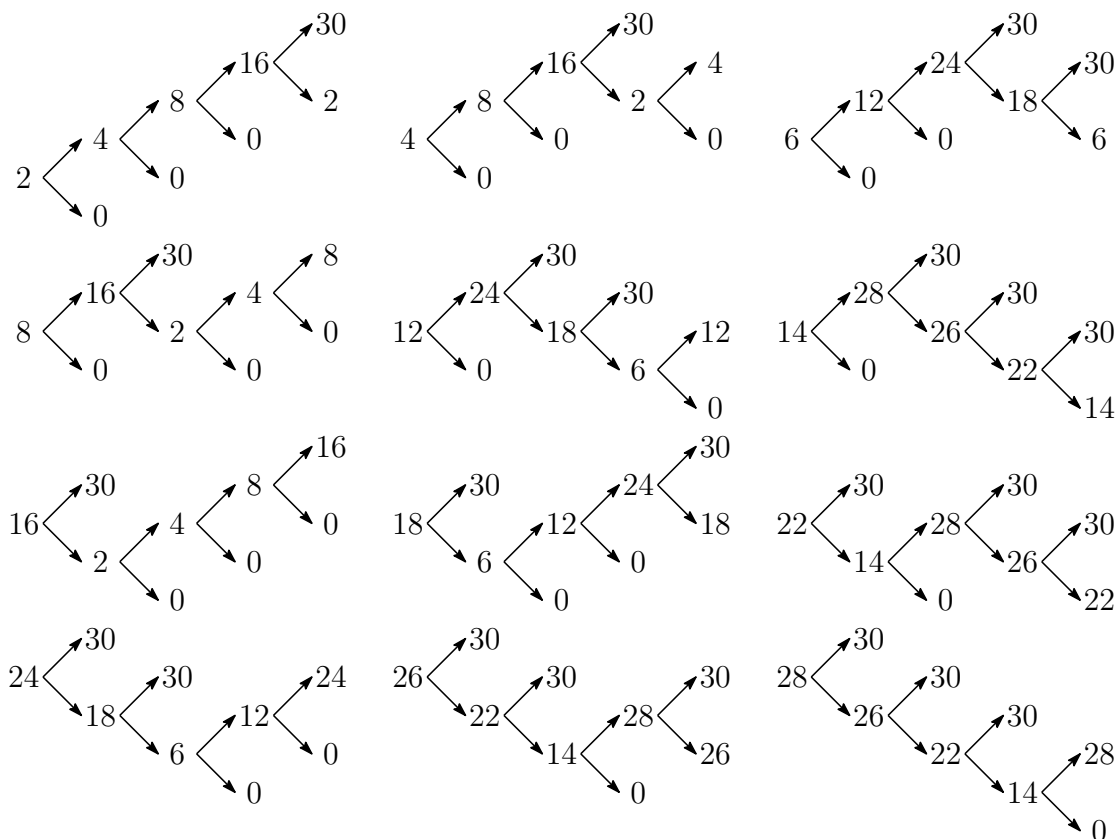
$$P_{2n}(10) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}P_{2n-2}(10), \quad P_{2n}(20) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}P_{2n-2}(20)$$

であるから, $x = 10, 20$ のとき

$$P_{2n}(x) = \frac{x}{40} + \frac{1}{4}P_{2n-2}(x) \quad \text{ゆえに} \quad P_{2n}(x) = \frac{x}{30} \left(1 - \frac{1}{4^n} \right)$$

$$x = 10, 20 \text{ のとき} \quad P_n(x) = \begin{cases} \frac{x}{30} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) & (n \equiv 0 \pmod{2}) \\ 0 & (n \not\equiv 0 \pmod{2}) \end{cases} \quad \dots (*)$$

[B] 最初に箱 L に入っているボールの個数 x ($0 < x < 30$) が 10, 20 以外の偶数であるとき, 最初のボールの個数に戻るまでの L に入っているボールの個数の推移は次のようになる.



$X = \{x \mid 0 < x < 30, x \neq 10, 20, x \text{ は偶数}\}$ とする.

これらの推移から, $x \in X$ のとき

$$P_{4n}(x) = \frac{x}{32} + \frac{1}{16}P_{4n-4}(x) \quad \text{ゆえに} \quad P_{4n}(x) = \frac{x}{30} \left(1 - \frac{1}{16^n}\right)$$

$$x \in X \text{ のとき} \quad P_n(x) = \begin{cases} \frac{x}{30} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) & (n \equiv 0 \pmod{4}) \\ 0 & (n \not\equiv 0 \pmod{4}) \end{cases} \quad \dots (**)$$

[C] 最初に箱 L に入っているボールの個数 x が奇数であるとき, L に入っているボールの個数が奇数であるのは最初だけで, その後, L に入っているボールの個数は偶数で推移する.

(i) $x = 15$ のとき $P_n(x) = \frac{1}{2}$

(ii) $x = 5$ のとき, その後, L に入っているボールの個数は, 途中 10, 20 で推移するから, (*) により

$n - 1 \equiv 0$, すなわち, $n \equiv 1 \pmod{2}$ のとき

$$P_n(x) = \frac{1}{2}P_{n-1}(2x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{30} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \frac{x}{30} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$n - 1 \not\equiv 0$, すなわち, $n \not\equiv 1 \pmod{2}$ のとき $P_n(x) = 0$

(iii) $x = 25$ のとき, その後, L に入っているボールの個数は, 途中 10, 20 で推移するから, (*) により

$n - 1 \equiv 0$, すなわち, $n \equiv 1 \pmod{2}$ のとき

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}P_{n-1}(2x - 30) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2x - 30}{30} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \\ &= \frac{x}{30} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) + \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

$n - 1 \not\equiv 0$, すなわち, $n \not\equiv 1 \pmod{2}$ のとき $P_n(x) = 0$

(iv) x が $0 < x < 15$, $x \neq 5$ の奇数であるとき, L に入っているボールの個数は, 途中, [B] に示したように推移するから, (**) により, (ii) と同様にして

$n \equiv 1 \pmod{4}$ のとき $P_n(x) = \frac{x}{30} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$

$n \not\equiv 1 \pmod{4}$ のとき $P_n(x) = 0$

(v) x が $15 < x < 30$, $x \neq 25$ の奇数であるとき, L に入っているボールの個数は, 途中, [B] に示したように推移するから, (**) により, (iii) と同様にして

$n \equiv 1 \pmod{4}$ のとき $P_n(x) = \frac{x}{30} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) + \frac{1}{2^n}$

$n \not\equiv 1 \pmod{4}$ のとき $P_n(x) = 0$

なお, $P_n(0) = 0$, $P_n(30) = 1$ であり, このとき, 0 個のボールを移すと考える.

[A] ~ [C] より

$$N = \{x \mid 0 < x < 30, x \neq 15, x \text{ は自然数}\},$$

$$Y = \{5, 10, 20, 25\},$$

$$Z = \{x \mid 15 < x < 30, x \text{ は奇数}\},$$

$$i = \begin{cases} 0 & (x \text{ は偶数}) \\ 1 & (x \text{ は奇数}) \end{cases},$$

$$p = \begin{cases} 2 & (x \in Y) \\ 4 & (x \in N - Y) \end{cases},$$

$$\delta_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & (x \in Z) \\ 0 & (x \in N - Z) \end{cases}$$

とおくと (n は自然数), $P_n(x)$ は次のように表すこともできる.

$$x \in N \text{ のとき } P_n(x) = \begin{cases} \frac{x}{30} \left(1 - \frac{1}{2^{n-i}}\right) + \delta_n & (n \equiv i \pmod{p}) \\ 0 & (n \not\equiv i \pmod{p}) \end{cases}$$

$$x \in \{0, 15, 30\} \text{ のとき } P_n(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ \frac{1}{2} & (x = 15) \\ 1 & (x = 30) \end{cases}$$

■

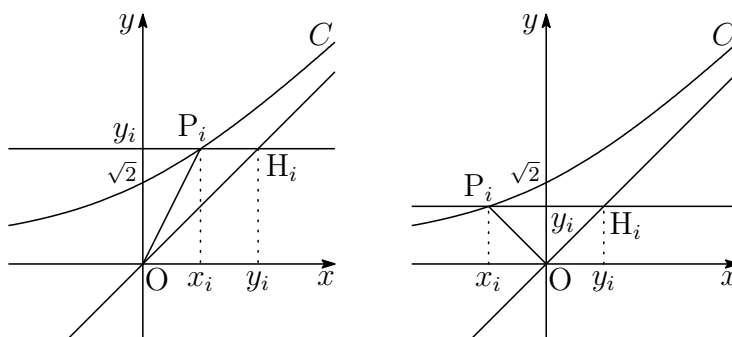
4 (1) $y = \frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + 2}$ において, $\left|\frac{1}{2}x\right| < \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + 2}$ より $y > 0$

C の方程式から, $y - \frac{1}{2}x = \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + 2}$ の両辺を平方すると

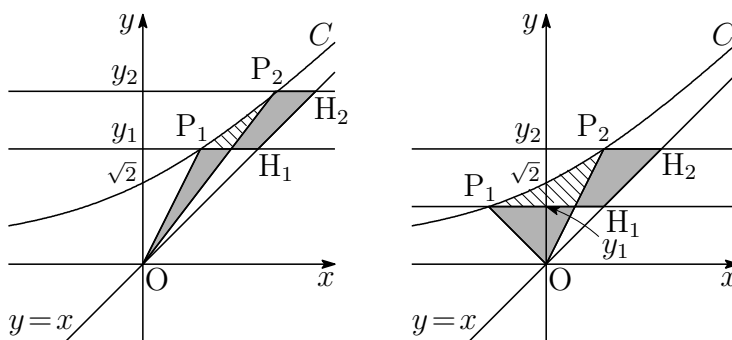
$$\left(y - \frac{1}{2}x\right)^2 = \frac{1}{4}x^2 + 2 \quad \text{整理すると} \quad (y - x)y = 2 \quad \cdots (*)$$

$P_i(x_i, y_i)$ より, $H_i(y_i, y_i)$ であるから ($i = 1, 2$), $(*)$ により

$$\triangle OP_i H_i = \frac{1}{2}(y_i - x_i)y_i = 1 \quad \text{よって} \quad \triangle OP_1 H_1 = \triangle OP_2 H_2$$



(2) (1) の結果から, 下の図の 2 箇所の塗りつぶした部分の面積は等しい.



求める面積は, 曲線 C と 3 直線 $y = x$, $y = y_1$, $y = y_2$ で囲まれた部分の面積である. このとき, C の方程式は, $(*)$ より

$$x = y - \frac{2}{y} \quad (y > 0)$$

したがって, 求める面積を S とすると

$$S = \int_{y_1}^{y_2} \left\{ y - \left(y - \frac{2}{y} \right) \right\} dy = \left[2 \log y \right]_{y_1}^{y_2} = 2 \log \frac{y_2}{y_1}$$

別解 C 上を点 P_2 から点 P_1 に向かう経路を C_1 (回転角の向きに経路をとる) とし, C_1 の点 $P(x, y)$ に対し, $r = OP$, OP と x 軸の正の向きとなす角を θ とすると

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

これらを θ について微分すると

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= \frac{dr}{d\theta} \cos \theta - r \sin \theta \\ \frac{dy}{d\theta} &= \frac{dr}{d\theta} \sin \theta + r \cos \theta \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} x \frac{dy}{d\theta} - y \frac{dx}{d\theta} &= r \cos \theta \left(\frac{dr}{d\theta} \sin \theta + r \cos \theta \right) \\ &\quad - r \sin \theta \left(\frac{dr}{d\theta} \cos \theta - r \sin \theta \right) = r^2 \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに} \quad S = \frac{1}{2} \int_{C_1} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{y_2}^{y_1} \left(x - y \frac{dx}{dy} \right) dy$$

C の方程式は, $x = y - \frac{2}{y}$ であるから

$$x - y \frac{dx}{dy} = \left(y - \frac{2}{y} \right) - y \left(1 + \frac{2}{y^2} \right) = -\frac{4}{y}$$

よって, 求める面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2} \int_{C_1} r^2 d\theta = -2 \int_{y_2}^{y_1} \frac{dy}{y} = -2 \left[\log y \right]_{y_2}^{y_1} = 2 \log \frac{y_2}{y_1}$$

解説

C の方程式が

$$y(y-x) = 2, \quad (y > 0)$$

であるから, C は 2 次曲線で, $y = 0$ および $y - x = 0$ を漸近線とする双曲線であることがわかる.

また, 2 直線 $y = 0$ と $y = x$ の交点を通り, この 2 直線のなす角の二等分線が双曲線の主軸と共役軸であることもわかる. $\alpha = \frac{\pi}{8}$ とおくと, C が点 $(0, \sqrt{2})$ を通ることから, x 軸の正の向きと $\alpha + \frac{\pi}{2}$, α をなす向きがそれぞれ主軸, 共役軸の方向を表す. ここで, これらに平行な単位ベクトルを

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$$

とし, $\vec{u}, \vec{v}$ を基底とする座標系 X - Y 系をとり, 次の座標変換を考える.

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} + Y \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix} \quad \cdots (**)$$

すなわち $x = X \cos \alpha - Y \sin \alpha, \quad y = X \sin \alpha + Y \cos \alpha$

これを C の方程式に代入すると

$$\begin{aligned} (X \sin \alpha + Y \cos \alpha) \{ (X \sin \alpha + Y \cos \alpha) - (X \cos \alpha - Y \sin \alpha) \} &= 2 \\ (\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha) X^2 + (2 \sin \alpha \cos \alpha - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) XY & \\ + (\cos^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha) Y^2 &= 2 \\ (1 - \sin 2\alpha - \cos 2\alpha) X^2 + 2(\sin 2\alpha - \cos 2\alpha) XY & \\ + (1 + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha) Y^2 &= 4 \\ (1 - \sqrt{2}) X^2 + (1 + \sqrt{2}) Y^2 &= 4 \end{aligned}$$

また, C の方程式から

$$-2xy + 2y^2 = 4 \quad \text{ゆえに} \quad \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4 \quad \cdots (***)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad \text{とおくと, } (**) \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} {}^t U$$

$\vec{u}, \vec{v}$ は, それぞれ A の固有値 $1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}$ に対する固有ベクトルである.
したがって, $(***)$ は次のように対角化できる.

$$\begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 + \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 4$$

$$\text{すなわち} \quad (1 - \sqrt{2}) X^2 + (1 + \sqrt{2}) Y^2 = 4$$

補足 2次形式 $ax^2 + 2bxy + cy^2$ は, 対称行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ の固有値 λ_1, λ_2 を用いて

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2$$

と変換できる².

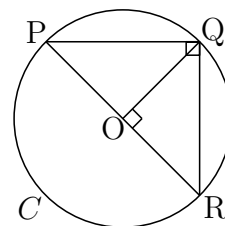


²<http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai-ri-2010.pdf> (pp.12-13 を参照)

- 5 R に対する P, Q の相対速度は, それぞれ $m+2, 3$ である. PR は円 C の直径であるから

$$(m+2)t = (2l-1)\pi \quad (l \text{ は整数})$$

C の中心を O とすると, $\angle ROQ = \frac{\pi}{2}$ であるから



$$3t = \frac{2n-1}{2}\pi \quad (n \text{ は整数})$$

上の 2 式から $t = \frac{2l-1}{m+2}\pi = \frac{2n-1}{6}\pi \quad \dots (*)$

このとき, $0 < t < 2\pi$ であるから

$$0 < \frac{2n-1}{6}\pi < 2\pi \quad \text{ゆえに} \quad 1 \leq n \leq 6$$

(*) より $(m+2)(2n-1) = 6(2l-1)$

$2n-1, 2l-1$ は奇数であるから, $m+2$ は 4 で割り切れない偶数である.

(i) $m+2=6$, すなわち, $m=4$ のとき, (*) より

$$t = \frac{2l-1}{6}\pi = \frac{2n-1}{6}\pi \quad \text{すなわち} \quad l=n \quad (n=1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

(ii) $m+2=10$, すなわち, $m=8$ のとき, (*) より

$$t = \frac{2l-1}{10}\pi = \frac{2n-1}{6}\pi \quad \text{ゆえに} \quad 3(2l-1) = 5(2n-1)$$

すなわち $(l, n) = (3, 2), (8, 5)$

よって $m=4$ のとき $t = \frac{2n-1}{6}\pi \quad (n=1, 2, 3, 4, 5, 6)$

$m=8$ のとき $t = \frac{2n-1}{6}\pi \quad (n=2, 5)$



- 6** (1) 四面体 OABC の 4 つの面はすべて合同であるから

$$OA = BC = 3, \quad OB = CA = \sqrt{7}, \quad AB = OC = 2$$

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{OB}, \quad \vec{c} = \overrightarrow{OC} \text{ とおくと}$$

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\vec{b} - \vec{a}|^2, \quad |\overrightarrow{BC}|^2 = |\vec{c} - \vec{b}|^2, \quad |\overrightarrow{CA}|^2 = |\vec{a} - \vec{c}|^2$$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad 2\vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2 \\ 2\vec{b} \cdot \vec{c} &= |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - |\overrightarrow{BC}|^2 \\ 2\vec{c} \cdot \vec{a} &= |\vec{c}|^2 + |\vec{a}|^2 - |\overrightarrow{CA}|^2 \end{aligned}$$

$$|\vec{a}| = 3, \quad |\vec{b}| = \sqrt{7}, \quad |\vec{c}| = 2, \quad |\overrightarrow{AB}| = 2, \quad |\overrightarrow{BC}| = 3, \quad |\overrightarrow{CA}| = \sqrt{7} \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned} 2\vec{a} \cdot \vec{b} &= 9 + 7 - 4 = 12 & \text{ゆえに} & \vec{a} \cdot \vec{b} = 6 \\ 2\vec{b} \cdot \vec{c} &= 7 + 4 - 9 = 2 & \text{ゆえに} & \vec{b} \cdot \vec{c} = 1 \\ 2\vec{c} \cdot \vec{a} &= 4 + 9 - 7 = 6 & \text{ゆえに} & \vec{c} \cdot \vec{a} = 3 \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{OH} = x\vec{a} + y\vec{b} \text{ とおくと} \quad \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OC} = x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{c}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \perp \overrightarrow{CH}, \quad \vec{b} \perp \overrightarrow{CH} \text{ より} \quad \vec{a} \cdot \overrightarrow{CH} &= \vec{a} \cdot (x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{c}) = 0 \\ \vec{b} \cdot \overrightarrow{CH} &= \vec{b} \cdot (x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{c}) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad 9x + 6y - 3 = 0, \quad 6x + 7y - 1 = 0$$

$$\text{これを解いて} \quad x = \frac{5}{9}, \quad y = -\frac{1}{3} \quad \text{よって} \quad \overrightarrow{OH} = \frac{5}{9}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$$

別解 $\vec{e}_1 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{3}\vec{a}$ とおくと, 次のベクトルは $\vec{e}_1$ に垂直である.

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a} - |\vec{a}|^2\vec{b} = 6\vec{a} - 9\vec{b} = 3(2\vec{a} - 3\vec{b})$$

ベクトル $2\vec{a} - 3\vec{b}$ の大きさは

$$|2\vec{a} - 3\vec{b}| = \sqrt{4|\vec{a}|^2 - 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 9|\vec{b}|^2} = \sqrt{4 \cdot 9 - 12 \cdot 6 + 9 \cdot 7} = 3\sqrt{3}$$

$$\vec{e}_2 = \frac{2\vec{a} - 3\vec{b}}{|2\vec{a} - 3\vec{b}|} = \frac{2\vec{a} - 3\vec{b}}{3\sqrt{3}} \text{ とおくと}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OH} &= (\vec{c} \cdot \vec{e}_1)\vec{e}_1 + (\vec{c} \cdot \vec{e}_2)\vec{e}_2 = \frac{1}{9}(\vec{c} \cdot \vec{a})\vec{a} + \frac{1}{27}(2\vec{c} \cdot \vec{a} - 3\vec{b} \cdot \vec{c})(2\vec{a} - 3\vec{b}) \\ &= \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{9}(2\vec{a} - 3\vec{b}) = \frac{5}{9}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から $\overrightarrow{OH} = \frac{2}{9} \cdot \frac{5\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB}}{2}$

ゆえに, $t = \frac{2}{9}$ のとき, 平面 M は C を通る.

$\vec{a} \cdot \overrightarrow{CH} = 0$, $\vec{b} \cdot \overrightarrow{CH}$ に注意して

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{CH}|^2 &= \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{CH} \\ &= \left(\frac{5}{9}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} - \vec{c} \right) \cdot \overrightarrow{CH} = -\vec{c} \cdot \overrightarrow{CH} \\ &= -\vec{c} \cdot \left(\frac{5}{9}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} - \vec{c} \right) \\ &= -\frac{5}{9} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 1 + 4 = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

したがって $|\overrightarrow{CH}| = \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

(i) $0 < t \leq \frac{2}{9}$ のとき

$$S\left(\frac{2}{9}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9} AB |\overrightarrow{CH}| = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9} \cdot 2 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{3} = \frac{4\sqrt{6}}{27}$$

よって $S(t) = S\left(\frac{2}{9}\right) \cdot \left(\frac{9}{2}t\right)^2 = \frac{4\sqrt{6}}{27} \cdot \frac{81}{4} t^2 = 3\sqrt{6}t^2$

(ii) $\frac{2}{9} \leq t < 1$ のとき, $S(t)$ は上の図の台形 $P_t Q_t R_t S_t$ の面積である.

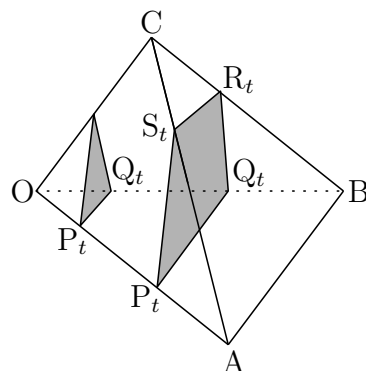
この台形の高さを h_t とすると

$$h_t = |\overrightarrow{CH}| \cdot \frac{9}{7} (1-t) = \frac{2\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{9}{7} (1-t) = \frac{6\sqrt{6}}{7} (1-t)$$

$$P_t Q_t = AB \cdot t = 2t$$

$$R_t S_t = AB \cdot \frac{9}{7} \left(t - \frac{2}{9}\right) = \frac{18}{7} \left(t - \frac{2}{9}\right) = \frac{18}{7}t - \frac{4}{7}$$

$$\begin{aligned} \text{よって } S(t) &= \frac{1}{2} (P_t Q_t + R_t S_t) h_t \\ &= \frac{1}{2} \left(2t + \frac{18}{7}t - \frac{4}{7} \right) \cdot \frac{6\sqrt{6}}{7} (1-t) \\ &= \frac{96\sqrt{6}}{49} \left(t - \frac{1}{8} \right) (1-t) \end{aligned}$$



(3) $\frac{2}{9} \leq t < 1$ において, $S(t)$ は最大値をとる.

このとき, $t - \frac{1}{8} > 0$, $1 - t > 0$ であるから, 相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{7}{8} = \left(t - \frac{1}{8}\right) + (1 - t) \geq 2\sqrt{\left(t - \frac{1}{8}\right)(1 - t)}$$

ゆえに
$$\left(t - \frac{1}{8}\right)(1 - t) \leq \frac{49}{256}$$

上式において等号が成立するとき $t - \frac{1}{8} = 1 - t$ すなわち $t = \frac{9}{16}$

求める $S(t)$ の最大値は, (2) の結果から

$$S\left(\frac{9}{16}\right) = \frac{96\sqrt{6}}{49} \cdot \frac{49}{256} = \frac{3\sqrt{6}}{8}$$

