

平成 21 年度 東京大学 2 次試験前期日程 (数学問題)150 分
理科 (一類, 二類, 三類) 数 I · II · III · A · B · C

問題 1 2 3 4 5 6

1 自然数 $m \geq 2$ に対し, $m - 1$ 個の二項係数

$${}_m C_1, {}_m C_2, \dots, {}_m C_{m-1}$$

を考え, これらすべての最大公約数を d_m とする. すなわち d_m はこれらすべてを割り切る最大の自然数である.

- (1) m が素数ならば, $d_m = m$ であることを示せ.
- (2) すべての自然数 k に対し, $k^m - k$ が d_m で割り切れることを, k に関する数学的帰納法によって示せ.
- (3) m が偶数のとき d_m は 1 または 2 であることを示せ.

2 実数を成分にもつ行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と実数 r, s が下の条件 (i), (ii), (iii) をみたすとする.

(i) $s > 1$

(ii) $A \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix}$

(iii) $A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, \dots)$ とするとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$

このとき以下の問に答えよ.

(1) $B = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を a, c, r, s を用いて表せ.

(2) $B^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_n \\ w_n \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, \dots)$ とするとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0$ を示せ.

(3) $c = 0$ かつ $|a| < 1$ を示せ.

- 3** スイッチを1回押すごとに、赤、青、黄、白のいずれかの色の玉が1個、等確率 $\frac{1}{4}$ で出てくる機械がある。2つの箱 L と R を用意する。次の3種類の操作を考える。

- (A) 1回スイッチを押し、出てきた玉を L に入れる。
- (B) 1回スイッチを押し、出てきた玉を R に入れる。
- (C) 1回スイッチを押し、出てきた玉と同じ色の玉が、L になければその玉を L に入れ、L にあればその玉を R に入れる。

- (1) L と R は空であるとする。操作 (A) を5回おこない、さらに操作 (B) を5回おこなう。このとき L にも R にも4色すべての玉が入っている確率 P_1 を求めよ。
- (2) L と R は空であるとする。操作 (C) を5回おこなう。このとき L に4色すべての玉が入っている確率 P_2 を求めよ。
- (3) L と R は空であるとする。操作 (C) を10回おこなう。このとき L にも R にも4色すべての玉が入っている確率を P_3 とする。 $\frac{P_3}{P_1}$ を求めよ。

- 4** a を正の実数とし、空間内の2つの円板

$$D_1 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1, z = a\},$$

$$D_2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1, z = -a\}$$

を考える。 D_1 を y 軸の回りに 180° 回転して D_2 に重ねる。ただし回転は z 軸の正の部分から x 軸の正の方向に傾ける向きとする。この回転の間に D_1 が通る部分を E とする。 E の体積を $V(a)$ とし、 E と $\{(x, y, z) \mid x \geq 0\}$ との共通部分の体積を $W(a)$ とする。

- (1) $W(a)$ を求めよ。
 - (2) $\lim_{a \rightarrow \infty} V(a)$ を求めよ。
- 5** (1) 実数 x が $-1 < x < 1$, $x \neq 0$ をみたすとき、次の不等式を示せ。

$$(1-x)^{1-\frac{1}{x}} < (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

- (2) 次の不等式を示せ。

$$0.9999^{101} < 0.99 < 0.9999^{100}$$

- 6** 平面上の2点 P, Q の距離を $d(P, Q)$ と表すことにする．平面上に点 O を中心とする一辺の長さが1000の正三角形 $\triangle A_1A_2A_3$ がある． $\triangle A_1A_2A_3$ の内部に3点 B_1, B_2, B_3 を, $d(A_n, B_n) = 1$ ($n = 1, 2, 3$) となるようにとる．また,

$$\begin{aligned}\vec{a}_1 &= \overrightarrow{A_1A_2}, & \vec{a}_2 &= \overrightarrow{A_2A_3}, & \vec{a}_3 &= \overrightarrow{A_3A_1} \\ \vec{e}_1 &= \overrightarrow{A_1B_1}, & \vec{e}_2 &= \overrightarrow{A_2B_2}, & \vec{e}_3 &= \overrightarrow{A_3B_3}\end{aligned}$$

とおく． $n = 1, 2, 3$ のそれぞれに対して, 時刻0に A_n を出発し, $\vec{e}_n$ の向きに速さ1で直進する点を考え, 時刻 t におけるその位置を $P_n(t)$ と表すことにする．

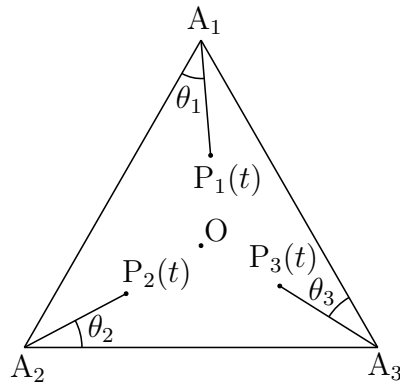
- (1) ある時刻 t で $d(P_1(t), P_2(t)) \leq 1$ が成立した．ベクトル $\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ と, ベクトル $\vec{a}_1$ とのなす角度を θ とおく．このとき $|\sin \theta| \leq \frac{1}{1000}$ となることを示せ．
- (2) 角度 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ を $\theta_1 = \angle B_1A_1A_2$, $\theta_2 = \angle B_2A_2A_3$, $\theta_3 = \angle B_3A_3A_1$ によって定義する． α を $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ かつ $\sin \alpha = \frac{1}{1000}$ をみたす実数とする．(1)と同じ仮定のもとで, $\theta_1 + \theta_2$ の値のとりうる範囲を α を用いて表せ．
- (3) 時刻 t_1, t_2, t_3 のそれぞれにおいて, 次が成立した．

$$d(P_2(t_1), P_3(t_1)) \leq 1, \quad d(P_3(t_2), P_1(t_2)) \leq 1, \quad d(P_1(t_3), P_2(t_3)) \leq 1$$

このとき, 時刻 $T = \frac{1000}{\sqrt{3}}$ において同時に

$$d(P_1(T), O) \leq 3, \quad d(P_2(T), O) \leq 3, \quad d(P_3(T), O) \leq 3$$

が成立することを示せ．



解答例

- 1** (1) ${}_m C_n$ ($m \geq 2$) について ($n = 1, 2, \dots, m-1$)

$${}_m C_n = \frac{m!}{n!(m-n)!} = \frac{m}{n} \cdot \frac{(m-1)!}{(n-1)!(m-n)!} = \frac{m \cdot {}_{m-1} C_{n-1}}{n}$$

m が素数であるとき, m は n で割り切れない. したがって, ${}_m C_n$ は m の倍数である. また, ${}_m C_1 = m$ であるから

$${}_m C_1, {}_m C_2, \dots, {}_m C_{m-1}$$

の最大公約数 d_m は m である. よって $d_m = m$

- (2) $k^m - k$ が d_m で割り切れる. $\dots (*)$

[1] $k = 1$ のとき, $k^m - k = 0$ より, $(*)$ は成立する.

[2] $k = j$ のとき, $(*)$ が成立する仮定すると

$$(j+1)^m - (j+1) = \sum_{i=1}^{m-1} {}_m C_i j^{m-i} + (j^m - j)$$

${}_m C_i$ ($i = 1, 2, \dots, m-1$) は d_m で割り切れるから, $k = j+1$ のときも $(*)$ は成立する.

[1], [2] より, すべての自然数 k について, $(*)$ は成立する.

- (3) $(1-1)^m = \sum_{k=0}^m {}_m C_k (-1)^k$ より (m は偶数)

$$0 = 2 + \sum_{k=1}^{m-1} {}_m C_k (-1)^k \quad \text{ゆえに} \quad \sum_{k=1}^{m-1} {}_m C_k (-1)^{k-1} = 2$$

上の第2式において, 左辺は d_m の倍数で, 右辺が2であるから d_m が3以上にはならない. よって, d_m は1または2である.

別解 $(*)$ により, すべての自然数 k について

$$k^m - k \equiv 0 \pmod{d_m}$$

$k \equiv -1 \pmod{d_m}$ とすると, m が偶数であるから

$$2 \equiv 0 \pmod{d_m}$$

よって, d_m は1または2である. ■

2 (1) $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \cdots \textcircled{1}$ および (ii) から

$$A \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & rs \\ c & s \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{よって } B &= \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & rs \\ c & s \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a - rc & 0 \\ c & s \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2) $\textcircled{1}$ より $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} + (a - rc) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdots \textcircled{1}'$

$$\text{したがって } A^{n+1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = cA^n \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} + (a - rc)A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = cs^n \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} + (a - rs) \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

上式に条件 (i), (iii) を適用すると $c = 0 \cdots (*)$

$$(*) \text{ を } \textcircled{1}' \text{ に代入すると } A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{したがって } A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

上式に (iii) の結果を適用すると $|a| < 1 \cdots (**)$

$$(*) \text{ を (1) の結果に代入すると } B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \quad \text{ゆえに } B^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & s^n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} z_n \\ w_n \end{pmatrix} = B^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^n \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(**) \text{ より } \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0$$

(3) $(*)$, $(**)$ より $c = 0$ かつ $|a| < 1$ ■

- 3** (1) 操作 (A) を 5 回おこない、L に 4 色すべての玉が入る確率は、1 色だけ 2 回出て、他の 3 色は 1 回ずつ出る確率であるから

$$\frac{5!}{2!} \cdot {}_4C_1 \left(\frac{1}{4}\right)^5 = 2 \cdot 5! \left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{15}{4^3}$$

操作 (B) を 5 回おこない、R に 4 色すべての玉が入る確率も、これと等しいから

$$P_1 = \left(\frac{15}{4^3}\right)^2 = \frac{225}{4096}$$

- (2) 1 色だけ 2 回出て、他の 3 色は 1 回ずつ出る確率であるから

$$\frac{5!}{2!} \cdot {}_4C_1 \left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{15}{64}$$

- (3) 2 色が 3 回ずつ出て他の 2 色は 2 回ずつ出る場合と、1 色だけ 4 回出て他の 3 色は 2 回ずつ出る場合であるから

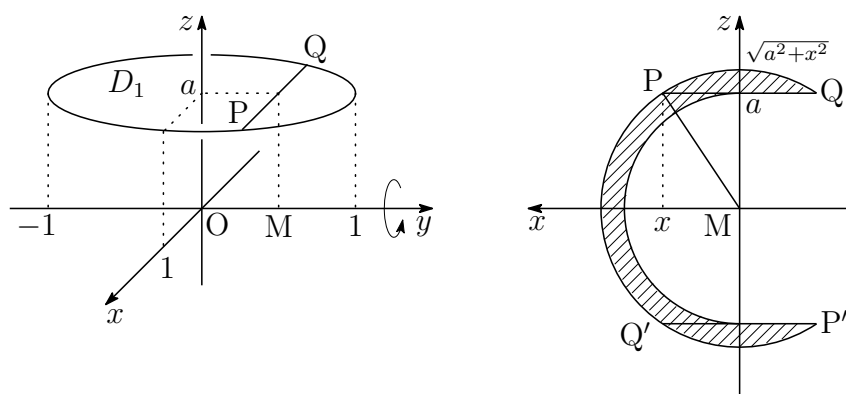
$$P_3 = \left(\frac{10!}{3!3!2!2!} \cdot {}_4C_2 + \frac{10!}{4!2!2!2!} \cdot {}_4C_1 \right) \left(\frac{1}{4}\right)^{10} = \frac{10!}{16} \left(\frac{1}{4}\right)^{10}$$

$$(1) \text{ において } P_1 = 4 \cdot (5!)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^{10}$$

$$\text{よって } \frac{P_3}{P_1} = \frac{1}{64} \cdot \frac{10!}{(5!)^2} = \frac{{}_{10}C_5}{64} = \frac{9 \cdot 7 \cdot 4}{64} = \frac{63}{16}$$



- 4 (1) 下の図の斜線部分は、 E の y 軸に垂直な平面による断面。



$$\begin{aligned}
 \text{したがって} \quad W(a) &= \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 \{(\sqrt{a^2 + x^2})^2 - a^2\} dy \\
 &= \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 x^2 dy = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 (1 - y^2) dy \\
 &= \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 (1 + y)(1 - y) dy = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2^3}{6} = \frac{2}{3}\pi
 \end{aligned}$$

- (2) E と $\{(x, y, z) \mid x \leq 0\}$ との共通部分の体積を $U(a)$ とすると

$$V(a) = W(a) + U(a) \quad \cdots (*)$$

このとき、 $-1 \leq x \leq 1$ に注意して

$$\begin{aligned}
 U(a) &\leq \int_{-1}^1 2(\sqrt{a^2 + x^2} - a) \cdot 1 dy \\
 &= \int_{-1}^1 \frac{2x^2}{\sqrt{a^2 + x^2} + a} dy \leq \int_{-1}^1 \frac{2}{a + a} dy = \frac{2}{a}
 \end{aligned}$$

$0 < U(a) \leq \frac{2}{a}$ であるから、はさみうちの原理により

$$\lim_{a \rightarrow \infty} U(a) = 0$$

$$\text{上式と } (*) \text{ により } \lim_{a \rightarrow \infty} V(a) = \lim_{a \rightarrow \infty} W(a) = \frac{2}{3}\pi$$



5 (1) $-1 < x < 1, x \neq 0$ のとき

$$(1-x)^{1-\frac{1}{x}} < (1+x)^{\frac{1}{x}} \iff (1+x)^{\frac{1}{x}}(1-x)^{\frac{1}{x}-1} > 1$$

$$\iff \begin{cases} (1+x)(1-x)^{1-x} > 1 & (0 < x < 1) \\ (1+x)(1-x)^{1-x} < 1 & (-1 < x < 0) \end{cases}$$

$f(x) = \log(1+x) + (1-x)\log(1-x)$ とおくと $(-1 < x < 1)$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \log(1-x) - 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{1-x} = \frac{x(3+x)}{(1+x)^2(1-x)}$$

x	(-1)	$\dots$	0	$\dots$	(1)
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

したがって

x	(-1)	$\dots$	0	$\dots$	(1)
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

ゆえに

$$\begin{cases} f(x) > 0 & (0 < x < 1) \\ f(x) < 0 & (-1 < x < 0) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (1+x)(1-x)^{1-x} > 1 & (0 < x < 1) \\ (1+x)(1-x)^{1-x} < 1 & (-1 < x < 0) \end{cases}$$

よって $-1 < x < 1, x \neq 0$ のとき $(1-x)^{1-\frac{1}{x}} < (1+x)^{\frac{1}{x}} \quad \dots (*)$

(2) $(*)$ の両辺にそれぞれ $(1-x)^{\frac{1}{x}}, (1+x)^{1-\frac{1}{x}}$ を掛けると

$$1-x < (1-x^2)^{\frac{1}{x}}, \quad (1-x^2)^{1-\frac{1}{x}} < 1+x$$

上の第1式に $x = 0.01$, 第2式に $x = -0.01$ を代入すると

$$0.99 < 0.9999^{100}, \quad 0.9999^{101} < 0.99$$

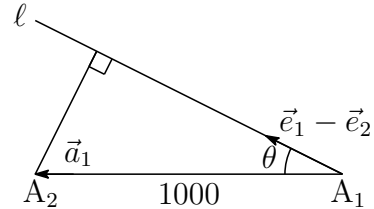
よって $0.9999^{101} < 0.99 < 0.9999^{100}$

■

- 6** (1) ベクトル $\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ は $P_2(t)$ から観測した $P_1(t)$ の相対速度で, $\vec{a}_1$ と θ をなす等速直線運動である. すなわち, 点 A_1 から直線 A_1A_2 と θ をなす直線 ℓ 上を等速度で移動している. ある時刻 t で $d(P_1(t), P_2(t)) \leq 1$ が成立するから, 点 A_2 から直線 ℓ に引いた垂線の長さが 1 以下である.

$$1000|\sin \theta| \leq 1$$

よって $|\sin \theta| \leq \frac{1}{1000}$



- (2) $\arg(\vec{a}_2) = 0$ とすると, $\arg(\vec{a}_3) = \frac{2}{3}\pi$, $\arg(\vec{a}_1) = \frac{4}{3}\pi$,
 $\arg(\vec{e}_1) = \frac{4}{3}\pi + \theta_1$, $\arg(\vec{e}_2) = \theta_2$ より $\arg(-\vec{e}_2) = \pi + \theta_2$
 $\vec{e}_1$, $-\vec{e}_2$ の大きさは等しいから

$$\arg(\vec{e}_1 + (-\vec{e}_2)) = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{4}{3}\pi + \theta_1 \right) + (\pi + \theta_2) \right\}$$

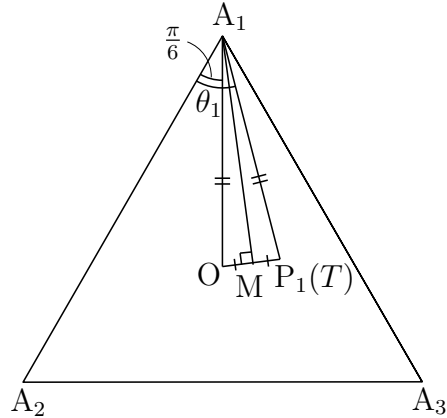
$$\arg(\vec{e}_1 - \vec{e}_2) = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + \frac{7}{6}\pi$$

このとき, $\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ と $\vec{a}_1$ のなす角が α 以下であるから

$$\left| \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + \frac{7}{6}\pi - \frac{4}{3}\pi \right| \leq \alpha$$

よって $\frac{\pi}{3} - 2\alpha \leq \theta_1 + \theta_2 \leq \frac{\pi}{3} + 2\alpha \quad \dots \textcircled{1}$

- (3) $d(P_1(T), A_1) = d(O, A_1) = \frac{1000}{\sqrt{3}}$ であるから, 2 点 $P_1(t)$, O の中点を M とすると



$$\begin{aligned} d(P_1(T), O) &= 2OM = 2OA_1 \sin \frac{1}{2} \left| \theta_1 - \frac{\pi}{6} \right| \\ &= \frac{2000}{\sqrt{3}} \sin \frac{1}{2} \left| \theta_1 - \frac{\pi}{6} \right| \quad \cdots (*) \end{aligned}$$

(2) の結果から, 同様にして

$$\frac{\pi}{3} - 2\alpha \leq \theta_2 + \theta_3 \leq \frac{\pi}{3} + 2\alpha \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\frac{\pi}{3} - 2\alpha \leq \theta_3 + \theta_1 \leq \frac{\pi}{3} + 2\alpha \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} \text{ より } -\frac{\pi}{3} - 2\alpha \leq -\theta_2 - \theta_3 \leq -\frac{\pi}{3} + 2\alpha \quad \cdots \textcircled{2}'$$

①, ②', ③ の辺々を加えると

$$\frac{\pi}{3} - 6\alpha \leq 2\theta_1 \leq \frac{\pi}{3} + 6\alpha \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{2} \left| \theta - \frac{\pi}{6} \right| \leq \frac{3}{2}\alpha$$

上の第 2 式と (*) により

$$d(P_1(T), O) \leq \frac{2000}{\sqrt{3}} \sin \frac{3}{2}\alpha$$

ここで, $\sin \frac{3}{2}\alpha < \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha < 2 \sin \alpha = \frac{1}{500}$ であるから

$$d(P_1(T), O) < \frac{2000}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{500} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{3}} < \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} = 3$$

よって $d(P_1(T), O) \leq 3$ 同様に $d(P_2(T), O) \leq 3$, $d(P_3(T), O) \leq 3$

