

平成20年度 東京大学2次試験前期日程(数学問題)150分
理科(一類, 二類, 三類) 数I・II・III・A・B・C

問題 1 2 3 4 5 6

1 座標平面の点 (x, y) を $(3x + y, -2x)$ へ移す移動 f を考え, 点 P が移る行き先を $f(P)$ と表す. f を用いて直線 $l_0, l_1, l_2, \dots$ を以下のように定める.

- l_0 は直線 $3x + 2y = 1$ である.
- 点 P が l_n 上を動くとき, $f(P)$ が描く直線を l_{n+1} とする ($n = 0, 1, 2, \dots$).

以下 l_n を1次式を用いて $a_n x + b_n y = 1$ と表す.

- (1) a_{n+1}, b_{n+1} を a_n, b_n で表せ.
- (2) 不等式 $a_n x + b_n y > 1$ が定める領域を D_n とする. $D_0, D_1, D_2, \dots$ すべてに含まれるような点の範囲を図示せよ.

2 白黒2種類のカードがたくさんある. そのうち k 枚のカードを手もとにもっているとき, 次の操作 (A) を考える.

(A) 手持ちの k 枚の中から1枚を, 等確率 $\frac{1}{k}$ で選び出し, それを違う色のカードにとりかえる.

以下の問 (1), (2) に答えよ.

- (1) 最初に白2枚, 黒2枚, 合計4枚のカードをもっているとき, 操作 (A) を n 回繰り返した後に初めて, 4枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ.
- (2) 最初に白3枚, 黒3枚, 合計6枚のカードをもっているとき, 操作 (A) を n 回繰り返した後に初めて, 6枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ.

3 (1) 正八面体のひとつの面を下にして水平な台の上に置く. この八面体を真上から見た図(平面図)を描け.

- (2) 正八面体の互いに水平な2つの面をとり, それぞれの面の重心を G_1, G_2 とする. G_1, G_2 を通る直線を軸としてこの八面体を1回転させてできる立体の体積を求めよ. ただし八面体は内部も含むものとし, 各辺の長さは1とする.

4 放物線 $y = x^2$ 上に2点 P, Q がある. 線分 PQ の中点の y 座標を h とする.

- (1) 線分 PQ の長さ L と傾き m で, h を表せ.
- (2) L を固定したとき, h がとりうる値の最小値を求めよ.

5 自然数 n に対し, $\frac{10^n - 1}{9} = \overbrace{111 \cdots 111}^{n \text{ 個}}$ を $\boxed{n}$ で表す. たとえば $\boxed{1} = 1$, $\boxed{2} = 11$, $\boxed{3} = 111$ である.

- (1) m を 0 以上の整数とする. $\boxed{3^m}$ は 3^m で割り切れるが, 3^{m+1} では割り切れないことを示せ.
- (2) n が 27 で割り切れることが, $\boxed{n}$ が 27 で割り切れるための必要十分条件であることを示せ.

6 座標平面において, 媒介変数 t を用いて

$$\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = t \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

と表される曲線が囲む領域の面積を求めよ.

解答例

- 1 (1) f による点 (x, y) の像を (x', y') とすると

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{ゆえに} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

点 (x, y) が l_n 上の点であるとき $a_n x + b_n y = 1$

$$\text{ゆえに} \quad a_n \left(-\frac{1}{2} y' \right) + b_n \left(x' + \frac{3}{2} y' \right) = 1$$

$$\text{整理すると} \quad b_n x' + \left(-\frac{1}{2} a_n + \frac{3}{2} b_n \right) y' = 1$$

このとき、点 (x', y') は l_{n+1} の点であるから

$$a_{n+1} = b_n, \quad b_{n+1} = -\frac{1}{2} a_n + \frac{3}{2} b_n$$

- (2) 条件により、 $a_0 = 3, b_0 = 2$. (1) の結果から

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - b_n), \quad a_{n+1} - 2b_{n+1} = a_n - 2b_n$$

$$\text{したがって} \quad a_n - b_n = \left(\frac{1}{2} \right)^n (a_0 - b_0) = 2^{-n},$$

$$a_n - 2b_n = a_0 - 2b_0 = -1$$

$$\text{上の2式から} \quad a_n = 2^{1-n} + 1, \quad b_n = 2^{-n} + 1$$

$$\text{直線 } l_n \text{ は} \quad (2^{1-n} + 1)x + (2^{-n} + 1)y = 1 \quad \cdots (*)$$

$$\text{整理すると} \quad 2^{-n}(2x + y) + (x + y - 1) = 0$$

これから、 l_n は次の定点を通る.

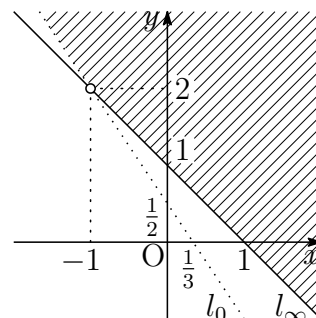
$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad (-1, 2)$$

(*) より、 l_n の x 切片、 y 切片をそれぞれ x_n, y_n とすると

$$x_n = \frac{1}{2^{1-n} + 1}, \quad y_n = \frac{1}{2^{-n} + 1}$$

$$x_n, y_n \text{ は単調増加で, } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 1$$

よって、求める領域は、右の図の斜線部分で実線の境界を含み、破線の境界及び○を含まない.



補足 f の表す行列を $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ とすると, A の固有方程式は

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

A の固有値が $\lambda = 1, 2$ であるから

$$A - E = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad A - 2E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 1, 2$ に対する固有ベクトルをそれぞれ

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

とおくと, $A\vec{u} = \vec{u}$, $A\vec{v} = 2\vec{v}$ より

$$A^n \vec{u} = \vec{u}, \quad A^n \vec{v} = 2^n \vec{v}$$

l_0 と A の不動直線 (原点を通り, 方向ベクトル $\vec{u}$ の交点は $(-1, 2)$)

l_0 は点 $(-1, 2)$ を通り, 方向ベクトルが $(2, -3)$ であるから

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\vec{u} + t(\vec{u} + \vec{v}) \quad (t \text{ は媒介変数})$$

とおくと, l_n のベクトル方程式は

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= A^n \{-\vec{u} + t(\vec{u} + \vec{v})\} = -\vec{u} + t(\vec{u} + 2^n \vec{v}) \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 + 2^n \\ -2 - 2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

l_n の傾きを m_n とすると

$$m_n = \frac{-2 - 2^n}{1 + 2^n} = -1 - \frac{1}{1 + 2^n}$$

$m_0 = -\frac{3}{2}$, m_n は単調増加で, $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n = -1$

よって, 求める領域は

$$\begin{cases} y - 2 > -\frac{3}{2}(x + 1) \\ y - 2 \geq -(x + 1) \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} 3x + 2y > 1 \\ x + y \geq 1 \end{cases}$$



- 2 (1) 操作 (A) を n 回繰り返す中で 4 枚とも同じ色になることなしに、白と黒のカードが 2 枚ずつである確率を p_n とする.

(i) n が奇数のとき

奇数回目に 4 枚とも同じ色になることはないので、求める確率は 0

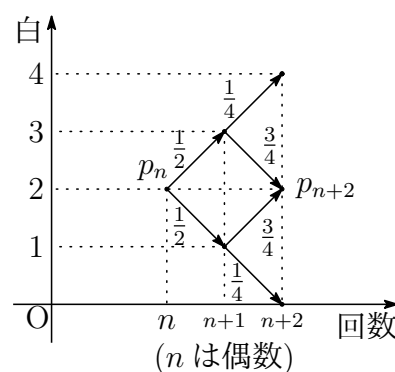
(ii) n が偶数のとき $p_0 = 1$

$$p_{n+2} = p_n \times \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \times 2 = \frac{3}{4} p_n$$

$$\text{ゆえに } p_n = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}}$$

求める確率は

$$p_{n-2} \times \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n-2}{2}}$$



- (2) 操作 (A) を n 回繰り返す中で 6 枚とも同じ色になることなしに、白のカードが 2 枚である確率を q_n とすると、対称性により白のカードが 4 枚である確率も q_n である.

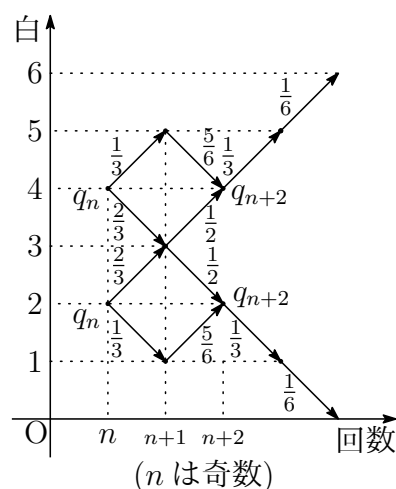
(i) n が奇数のとき $q_1 = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} q_{n+2} &= q_n \times \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} + q_n \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right) \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{17}{18} q_n \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに } q_n = \frac{1}{2} \left(\frac{17}{18} \right)^{\frac{n-1}{2}}$$

求める確率は、3 以上の奇数のとき

$$q_{n-2} \times \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \times 2 = \frac{1}{18} \left(\frac{17}{18} \right)^{\frac{n-3}{2}}$$



(ii) n が 1 または偶数のとき

6 枚とも同じ色になることはないので、求める確率は 0

3 (1) $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ とおく.

O を原点とする座標空間に 6 点

$$\begin{aligned} A(a, 0, 0), \quad B(0, a, 0), \\ C(0, 0, a), \quad A'(-a, 0, 0), \\ B'(0, -a, 0), \quad C'(0, 0, -a) \end{aligned}$$

をとる.

$$\overrightarrow{AB} = (-a, a, 0),$$

$$\overrightarrow{AC} = (-a, 0, a)$$

$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ に垂直なベクトルを

$$\vec{n} = (-a, -a, -a)$$

とおき, $\overrightarrow{AA'} = p\overrightarrow{AB} + q\overrightarrow{AC} + r\vec{n}$ とすると

$$\begin{pmatrix} -2a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} -a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ a \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -a \\ -a \\ -a \end{pmatrix}$$

これを解いて $p = q = r = \frac{2}{3}$

A' を平面 ABC 上に下ろした点を A'' , $\triangle ABC$ の重心を G_1 とすると

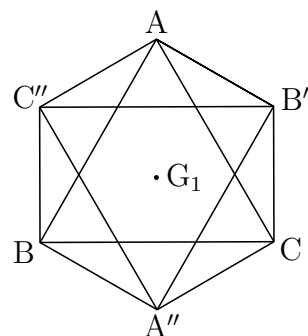
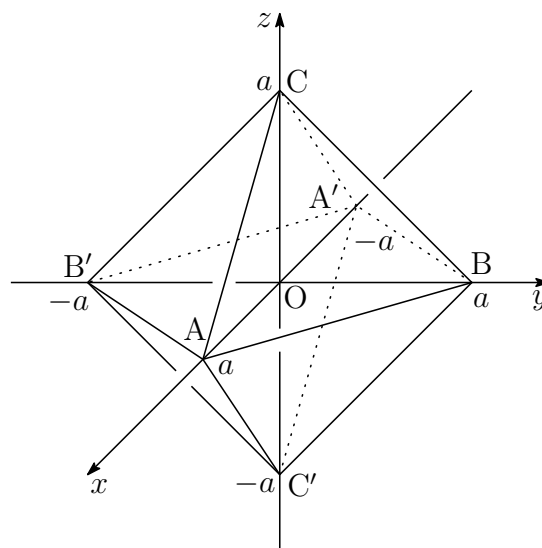
$$\overrightarrow{AA''} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AG_1}$$

B' , C' を平面 ABC 上に下ろした点をそれぞれ B'' , C'' とすると

$$\overrightarrow{BB''} = 2\overrightarrow{BG_1}, \quad \overrightarrow{CC''} = 2\overrightarrow{CG_1}$$

G は $\triangle ABC$ の外心でもあるから, この外接円上に A'' , B'' , C'' がある.

よって, 求める平面図は, 右の図のような正六角形となる.



(2) $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ の重心をそれぞれ G_1 , G_2 とすると

$$G_1\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right), \quad G_2\left(-\frac{a}{3}, -\frac{a}{3}, -\frac{a}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{G_1G_2} \text{ に平行な単位ベクトルは } \vec{e} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\text{線分 } G_1G_2 \text{ 上に点 } P\left(\frac{t}{\sqrt{3}}, \frac{t}{\sqrt{3}}, \frac{t}{\sqrt{3}}\right) \text{ をとる } \left(-\frac{a}{\sqrt{3}} \leq t \leq \frac{a}{\sqrt{3}}\right).$$

P から直線 AB' に下ろした点を $Q(x, y, 0)$ とすると

$$x - y = a \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \left(x - \frac{t}{\sqrt{3}}, y - \frac{t}{\sqrt{3}}, -\frac{t}{\sqrt{3}}\right) \perp \vec{e} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) \text{ より}$$

$$x - \frac{t}{\sqrt{3}} + y - \frac{t}{\sqrt{3}} - \frac{t}{\sqrt{3}} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad x + y = \sqrt{3}t \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② を解いて

$$x = \frac{\sqrt{3}t + a}{2}, \quad y = \frac{\sqrt{3}t - a}{2} \quad \text{ゆえに} \quad Q\left(\frac{\sqrt{3}t + a}{2}, \frac{\sqrt{3}t - a}{2}, 0\right)$$

したがって

$$PQ^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{6}t + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}t - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{t^2}{2} + \frac{a^2}{2}$$

求める回転体の体積を V とすると

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi} &= \int_{-\frac{a}{\sqrt{3}}}^{\frac{a}{\sqrt{3}}} PQ^2 dt = \int_{-\frac{a}{\sqrt{3}}}^{\frac{a}{\sqrt{3}}} \left(\frac{t^2}{2} + \frac{a^2}{2}\right) dt = \int_0^{\frac{a}{\sqrt{3}}} (t^2 + a^2) dt \\ &= \left[\frac{t^3}{3} + a^2t\right]_0^{\frac{a}{\sqrt{3}}} = \frac{10a^3}{9\sqrt{3}} = \frac{10}{9\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{5\sqrt{6}}{54} \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad V = \frac{5\sqrt{6}}{54}\pi$$



- 4** (1) P, Q は $y = x^2$ 上の点であるから, $P(\alpha, \alpha^2)$, $Q(\beta, \beta^2)$ とおくと

$$\overrightarrow{PQ} = (\beta - \alpha) \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha + \beta \end{pmatrix}$$

ゆえに $m = \alpha + \beta$

$$L^2 = (\beta - \alpha)^2 \{1 + (\alpha + \beta)^2\} = (\beta - \alpha)^2 (1 + m^2)$$

$$2h = \alpha^2 + \beta^2$$

これらを $2(\alpha^2 + \beta^2) = (\alpha + \beta)^2 + (\beta - \alpha)^2$ に代入すると

$$2 \cdot 2h = m^2 + \frac{L^2}{1 + m^2} \quad \text{よって} \quad h = \frac{1}{4} \left(m^2 + \frac{L^2}{1 + m^2} \right)$$

- (2) $t = 1 + m^2$, $h = f(t)$ とおくと ($t \geq 1$)

$$f(t) = \frac{1}{4} \left(t - 1 + \frac{L^2}{t} \right)$$

$$f'(t) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{L^2}{t^2} \right) = \frac{(t + L)(t - L)}{4t^2}$$

- (i) $0 < L \leq 1$ のとき $f'(t) \geq 0$

よって, 最小値は $f(1) = \frac{L^2}{4}$

- (ii) $L > 1$ のとき, $f(t)$ の増減表は

t	1	...	L	...
$f'(t)$		-	0	+
$f(t)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって, 最小値は $f(L) = \frac{2L - 1}{4}$



- 5** (1) $m = 0$ のとき, $\boxed{3^0} = \boxed{1} = 1$ は 3^0 で割り切れるが, 3^1 では割り切れない.
 $m = k$ のとき, $\boxed{3^k}$ は 3^k で割り切れるが, 3^{k+1} では割り切れないと仮定すると

$$\begin{aligned}\boxed{3^{k+1}} &= \overbrace{111 \cdots 111}^{3^{k+1} \text{ 個}} = \overbrace{111 \cdots 111}^{3^k \text{ 個}} \overbrace{111 \cdots 111}^{3^k \text{ 個}} \overbrace{111 \cdots 111}^{3^k \text{ 個}} \\ &= \overbrace{111 \cdots 111}^{3^k \text{ 個}} (10^{2 \cdot 3^k} + 10^{3^k} + 1) \\ &= \boxed{3^k} (10^{2 \cdot 3^k} + 10^{3^k} + 1)\end{aligned}$$

$10 \equiv 1 \pmod{3}$ であるから

$$10^{2 \cdot 3^k} + 10^{3^k} + 1 \equiv 1 + 1 + 1 \equiv 0 \pmod{3}$$

また, $10 \equiv 1 \pmod{9}$ であるから

$$10^{2 \cdot 3^k} + 10^{3^k} + 1 \equiv 1 + 1 + 1 \equiv 3 \pmod{9}$$

ゆえに, $10^{2 \cdot 3^k} + 10^{3^k} + 1$ は 3 で割り切れるが, 3^2 で割り切れない.

したがって, $\boxed{3^{k+1}}$ は 3^{k+1} で割り切れるが, 3^{k+2} で割り切れない.

よって, $\boxed{3^m}$ は 3^m で割り切れるが (m は 0 以上の整数),

3^{m+1} では割り切れない.

$$(2) \quad \boxed{n} = \overbrace{111 \cdots 111}^{n \text{ 個}} \equiv n \pmod{9}$$

$\boxed{n}$ が 27 で割り切れるならば, n は 9 の倍数であるから, $n = 9k$ とおける.

$$\begin{aligned}\boxed{9k} &= \overbrace{111 \cdots 111}^{9k \text{ 個}} = \overbrace{111 \cdots 111}^{9 \text{ 個}} (1 + 10^9 + 10^{9 \cdot 2} + \cdots + 10^{9(k-1)}) \\ &= \boxed{3^2} (1 + 10^9 + 10^{9 \cdot 2} + \cdots + 10^{9(k-1)})\end{aligned}$$

(1) の結果から, $\boxed{3^2}$ は 3^2 で割り切れるが, 3^3 では割り切れない.

$$1 + 10^9 + 10^{9 \cdot 2} + \cdots + 10^{9(k-1)} \equiv \overbrace{1 + 1 + 1 + \cdots + 1}^{k \text{ 個}} = k \pmod{3}$$

したがって $\boxed{9k}$ が 27 で割り切れる $\iff k \equiv 0 \pmod{3}$

よって $\boxed{n}$ が 27 で割り切れる $\iff n \equiv 0 \pmod{27}$ ■

6 $x(t) = \cos 2t$, $y(t) = t \sin t$ とおく ($0 \leq t \leq 2\pi$).

$0 \leq t \leq \pi$ および $\pi \leq t \leq 2\pi$ において, 与えられた曲線は単純閉曲線である.

実際, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ とすると

$$x(\pi - t) - x(t) = \cos(2\pi - 2t) - \cos 2t = 0,$$

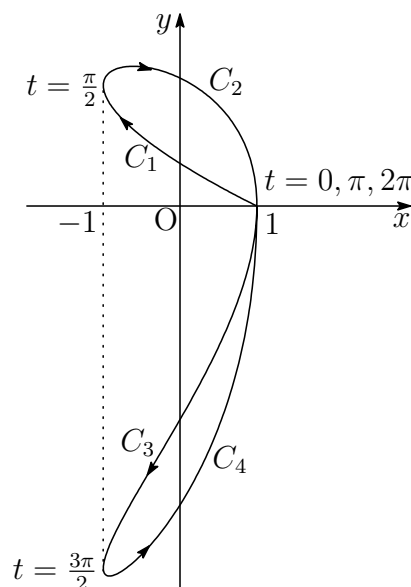
$$y(\pi - t) - y(t) = (\pi - t) \sin(\pi - t) - t \sin t = (\pi - 2t) \sin t \geq 0$$

また, $\pi \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$ とすると

$$x(3\pi - t) - x(t) = \cos(6\pi - 2t) - \cos 2t = 0,$$

$$y(3\pi - t) - y(t) = (3\pi - t) \sin(3\pi - t) - t \sin t = (3\pi - 2t) \sin t \leq 0$$

区間 $\frac{k-1}{2}\pi \leq t \leq \frac{k}{2}\pi$ における曲線を C_k : $y = f_k(x)$ とすると ($k = 1, 2, 3, 4$), 上の結果から C_2 は C_1 の上側, C_3 は C_4 の上側にある. C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積を S とし, C_3 と C_4 で囲まれた部分の面積を T とする.



$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^1 f_2(x) dx - \int_{-1}^1 f_1(x) dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} t \sin t (\cos 2t)' dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 t \sin t (\cos 2t)' dt \\ &= -2 \int_0^{\pi} t \sin t \sin 2t dt \\ T &= \int_{-1}^1 f_3(x) dx - \int_{-1}^1 f_4(x) dx \\ &= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\pi} t \sin t (\cos 2t)' dt - \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} t \sin t (\cos 2t)' dt \\ &= 2 \int_{\pi}^{2\pi} t \sin t \sin 2t dt \\ &= 2 \int_0^{\pi} (t + \pi) \sin(t + \pi) \sin 2(t + \pi) dt \\ &= -2 \int_0^{\pi} t \sin t \sin 2t dt - 2\pi \int_0^{\pi} \sin t \sin 2t dt \\ &= S + \pi \int_0^{\pi} (\cos 3t - \cos t) dt = S \end{aligned}$$

よって，求める面積は

$$\begin{aligned} 2S &= -4 \int_0^\pi t \sin t \sin 2t \, dt = 2 \int_0^\pi t(\cos 3t - \cos t) \, dt \\ &= 2 \int_0^\pi t \left(\frac{1}{3} \sin 3t - \sin t \right)' \, dt \\ &= 2 \left[t \left(\frac{1}{3} \sin 3t - \sin t \right) \right]_0^\pi - 2 \int_0^\pi \left(\frac{1}{3} \sin 3t - \sin t \right) \, dt \\ &= 2 \left[\frac{1}{9} \cos 3t - \cos t \right]_0^\pi = \frac{\mathbf{32}}{\mathbf{9}} \end{aligned}$$

■