

平成19年度 東京大学2次試験前期日程(数学問題)150分
理科(一類, 二類, 三類) 数I・II・III・A・B・C

問題 1 2 3 4 5 6

1 n と k を正の整数とし, $P(x)$ を次数が n 以上の整数とする. 整式 $(1+x)^k P(x)$ の n 次以下の項の係数がすべて整数ならば, $P(x)$ の n 次以下の項の係数は, すべて整数であることを示せ. ただし, 定数項については, 項それ自身を係数とみなす.

2 n を2以上の整数とする. 平面上に $n+2$ 個の点 $O, P_0, P_1, \dots, P_n$ があり, 次の2つの条件を満たしている.

$$\textcircled{1} \angle P_{k-1}OP_k = \frac{\pi}{n} \quad (1 \leq k \leq n), \quad \angle OP_{k-1}P_k = \angle OP_0P_1 \quad (2 \leq k \leq n)$$

$$\textcircled{2} \text{線分 } OP_0 \text{ の長さは } 1, \text{ 線分 } OP_1 \text{ の長さは } 1 + \frac{1}{n} \text{ である.}$$

線分 $P_{k-1}P_k$ の長さを a_k とし, $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ とおくとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ を求めよ.

3 座標平面上の2点 P, Q が, 曲線 $y = x^2$ ($-1 \leq x \leq 1$) 上を自由に動くとき, 線分 PQ を $1:2$ に内分する点 R が動く範囲を D とする. ただし, $P = Q$ のとき $R = P$ とする.

(1) a を $-1 \leq a \leq 1$ をみたす実数とすると, 点 (a, b) が D に属するための b の条件を a を用いて表せ.

(2) D を図示せよ.

4 以下の問いに答えよ.

(1) 実数 a に対し, 2次の正方行列 A, P, Q が, 5つの条件 $A = aP + (a+1)Q$, $P^2 = P$, $Q^2 = Q$, $PQ = O$, $QP = O$ をみたすとする. ただし $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ である. このとき, $(P+Q)A = A$ が成り立つことを示せ.

(2) a は正の数として, 行列 $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix}$ を考える. この A に対し, (1) の5つの条件をすべてみたす行列 P, Q を求めよ.

(3) n を2以上の整数とし, $2 \leq k \leq n$ をみたす整数 k に対して $A_k = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 1 & k+1 \end{pmatrix}$ とおく. 行列の積 $A_n A_{n-1} A_{n-2} \cdots A_2$ を求めよ.

- 5** 表が出る確率が p , 裏が出る確率が $1 - p$ であるような硬貨がある. ただし, $0 < p < 1$ とする. この硬貨を投げて, 次のルール **(R)** の下で, ブロック積ゲームを行う.

$$(\mathbf{R}) \left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} \text{ ブロックの高さは, 最初は } 0 \text{ とする.} \\ \textcircled{2} \text{ 硬貨を投げて裏が出れば高さ } 1 \text{ のブロックを } 1 \text{ つ積み上げ,} \\ \text{裏が出ればブロックをすべて取り除いて高さ } 0 \text{ に戻す.} \end{array} \right.$$

n を正の整数, m を $0 \leq m \leq n$ をみたす整数とする.

- (1) n 回硬貨を投げたとき, 最後にブロックの高さが m となる確率 p_m を求めよ.
- (2) (1) で, 最後にブロックの高さが m 以下となる確率 q_m を求めよ.
- (3) ルール **(R)** の下で, n 回の硬貨投げを独立に 2 度行い, それぞれ最後のおブロックの高さを考える. 2 度のうち, 高い方のブロックの高さが m である確率 r_m を求めよ, ただし, 最後のブロックの高さが等しいときはその値を考えるものとする.

- 6** 以下の問いに答えよ.

- (1) $0 < x < a$ をみたす実数 x, a に対し, 次を示せ.

$$\frac{2x}{a} < \int_{a-x}^{a+x} \frac{1}{t} dt < x \left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right)$$

- (2) (1) を利用して, 次を示せ.

$$0.68 < \log 2 < 0.71$$

ただし, $\log 2$ は 2 の自然対数を表す.

解答例

1 $P(x)$, $(1+x)^k P(x)$ をそれぞれ l 次, $k+l$ 次の多項式とし

$$\begin{aligned} P(x) &= p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots + p_lx^l \\ (1+x)^k P(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots + a_{k+l}x^{k+l} \end{aligned}$$

とおくと $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ は整数

$$\begin{aligned} (1+x)^k P(x) &= (1 + {}_kC_1x + {}_kC_2x^2 + \cdots + {}_kC_kx^k) \\ &\quad \times (p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots + p_lx^l) \end{aligned}$$

上式の両辺の同じ次数の項の係数を比較すると ($k < i$ のとき ${}_kC_i = 0$ とする)

$$\begin{aligned} a_0 &= p_0 \\ a_1 &= p_1 + {}_kC_1p_0 \\ a_2 &= p_2 + {}_kC_1p_1 + {}_kC_2p_0 \\ &\vdots \\ a_n &= p_n + {}_kC_1p_{n-1} + {}_kC_2p_{n-2} + \cdots + {}_kC_np_0 \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} p_0 &= a_0 && \cdots (0) \\ p_1 &= a_1 - {}_kC_1p_0 && \cdots (1) \\ p_2 &= a_2 - ({}_kC_1p_1 + {}_kC_2p_0) && \cdots (2) \\ &\vdots \\ p_n &= a_n - ({}_kC_1p_{n-1} + {}_kC_2p_{n-2} + \cdots + {}_kC_np_0) && \cdots (n) \end{aligned}$$

(0) より, p_0 は整数. これと (1) より, p_1 は整数. これらの結果と (2) より, p_2 は整数. 順次, これらの結果を適用すると, (n) より, p_n は整数.

よって, $P(x)$ の n 次以下の項の係数は整数である. ■

2 $\theta = \frac{\pi}{2n}$ とおくと、余弦定理により

$$\begin{aligned} P_0P_1^2 &= 1^2 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 - 2 \cdot 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cos 2\theta \\ &= 2 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} - 2 \left(1 + \frac{1}{n}\right) (1 - 2 \sin^2 \theta) \\ &= \frac{1}{n^2} + 4 \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sin^2 \theta \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに } P_0P_1 = \sqrt{\frac{1}{n^2} + 4 \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sin^2 \theta}$$

$\triangle OP_0P_1 \sim \triangle OP_{k-1}P_k$ であり、その相似比は $1 : \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k-1}$ であるから

$$a_k = P_{k-1}P_k = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k-1} P_0P_1,$$

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n a_k = P_0P_1 \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k-1} = P_0P_1 \cdot \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - 1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1} \\ &= \sqrt{1 + 4 \left(1 + \frac{1}{n}\right) (n \sin \theta)^2} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - 1 \right\} \end{aligned}$$

$\theta = \frac{\pi}{2n}$ より $\left(n = \frac{\pi}{2\theta}\right)$ $n \rightarrow \infty$ のとき、 $\theta \rightarrow 0$ であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \theta = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\pi}{2\theta} \sin \theta = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin \theta}{\theta} = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

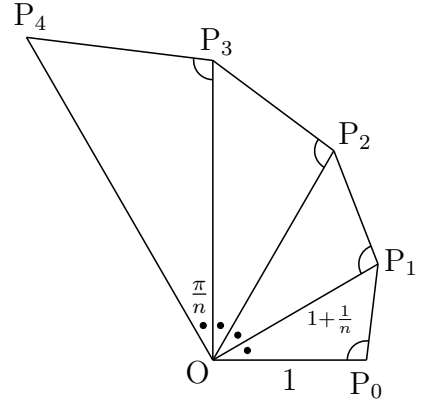
$$\text{よって } \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sqrt{1 + 4 \cdot 1 \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} (e - 1) = (e - 1) \sqrt{1 + \pi^2}$$

解説 O を極とすると $P_k \left(\frac{k\pi}{n}, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \right)$. $t = \frac{k\pi}{n}$, $r = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}^{\frac{k}{n}}$ より,

極方程式 $r = e^{\frac{t}{\pi}}$ の $0 \leq t \leq \pi$ における弧長に等しい¹.

$$\int_0^\pi \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2} dt = \sqrt{1 + \frac{1}{\pi^2}} \int_0^\pi e^{\frac{t}{\pi}} dt = \sqrt{1 + \pi^2} (e - 1) \quad \blacksquare$$

¹<http://kumamoto.s12.xrea.com/N/KBdai/KBdai-ri-2016.pdf> [5] を参照.

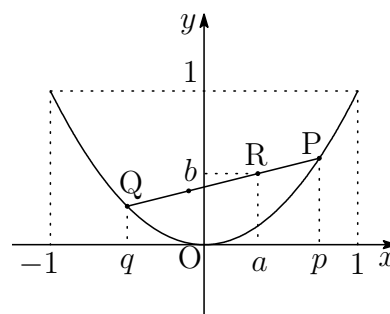


- 3** (1) $P(p, p^2)$, $Q(q, q^2)$ とすると $(-1 \leq p \leq 1$,
 $-1 \leq q \leq 1)$, 点 $R(a, b)$ は

$$(*) \quad a = \frac{2p+q}{3}, \quad b = \frac{2p^2+q^2}{3}$$

(*) の第1式から $q = 3a - 2p \quad \dots \textcircled{1}$

$-1 \leq q \leq 1$ であるから



$$-1 \leq 3a - 2p \leq 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{3}{2}a - \frac{1}{2} \leq p \leq \frac{3}{2}a + \frac{1}{2}$$

$-1 \leq p \leq 1$ であるから

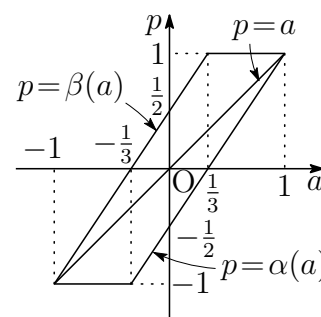
$$\alpha(a) = \max\left(\frac{3}{2}a - \frac{1}{2}, -1\right), \quad \beta(a) = \min\left(\frac{3}{2}a + \frac{1}{2}, 1\right)$$

とおく. $\textcircled{1}$ を (*) の第2式に代入すると

$$b = \frac{2p^2 + (3a - 2p)^2}{3} = 2p^2 - 4ap + 3a^2 = 2(p - a)^2 + a^2$$

$b = f(p)$ とおくと, $\alpha(a) \leq p \leq \beta(a)$ における $f(p)$ のとり得る値の範囲を求めればよい.

$b = f(p)$ は $p = a$ を軸とする放物線である. このとき, $p = a$, $p = \alpha(a)$, $p = \beta(a)$ のグラフは右の図のようになる. b のとり得る値の範囲は, $-1 \leq a \leq 1$ により



$$-1 \leq a \leq 0 \text{ のとき } f(a) \leq b \leq f(\alpha(a))$$

$$0 \leq a \leq 1 \text{ のとき } f(a) \leq b \leq f(\beta(a))$$

$$\alpha(a) = \begin{cases} -1 & (-1 \leq a \leq -\frac{1}{3}) \\ \frac{3}{2}a - \frac{1}{2} & (-\frac{1}{3} \leq a \leq 1) \end{cases}, \quad \beta(a) = \begin{cases} \frac{3}{2}a + \frac{1}{2} & (-1 \leq a \leq \frac{1}{3}) \\ 1 & (\frac{1}{3} \leq a \leq 1) \end{cases}$$

$$(i) \quad -1 \leq a \leq -\frac{1}{3} \text{ のとき } f(a) \leq b \leq f(-1)$$

$$(ii) \quad -\frac{1}{3} \leq a \leq 0 \text{ のとき } f(a) \leq b \leq f\left(\frac{3}{2}a - \frac{1}{2}\right)$$

$$(iii) \quad 0 \leq a \leq \frac{1}{3} \text{ のとき } f(a) \leq b \leq f\left(\frac{3}{2}a + \frac{1}{2}\right)$$

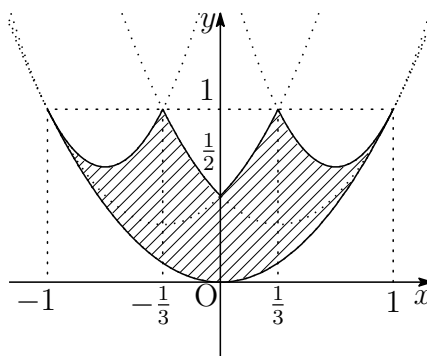
$$(iv) \quad \frac{1}{3} \leq a \leq 1 \text{ のとき } f(a) \leq b \leq f(1)$$

(i)~(iv) より, 求める条件は

$$\begin{aligned}
 -1 \leq a \leq -\frac{1}{3} \quad & \text{のとき} \quad a^2 \leq b \leq 3a^2 + 4a + 2 \\
 -\frac{1}{3} \leq a \leq 0 \quad & \text{のとき} \quad a^2 \leq b \leq \frac{3}{2}a^2 - a + \frac{1}{2} \\
 0 \leq a \leq \frac{1}{3} \quad & \text{のとき} \quad a^2 \leq b \leq \frac{3}{2}a^2 + a + \frac{1}{2} \\
 \frac{1}{3} \leq a \leq 1 \quad & \text{のとき} \quad a^2 \leq b \leq 3a^2 - 4a + 2
 \end{aligned}$$

補足 (*) の p, q をそれぞれ $-p, -q$ とおくと, 点 R は $(-a, b)$ となり, 元の点と y 軸に関して対称な点が存在する. したがって, $0 \leq a \leq 1$ について調べ, これと対称な点を示してもよい.

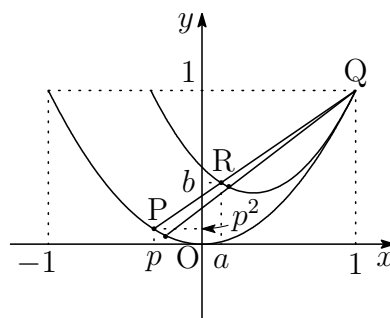
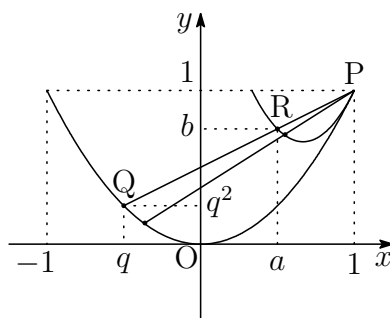
(2) (1) の結果から, D の表す領域は, 下の図の斜線部分で境界線を含む.



解説 a に対し, b が最小となるのは, P と Q の x 座標がともに a のとき, 最小値 a^2 をとる. b が最大となるのは, P または Q が点 $(1, 1)$, $(-1, 1)$ にあるときで, 例えば, $P(1, 1)$ のとき, $Q(q, q^2)$, $R(a, b)$ について, $\overrightarrow{PQ} = 3\overrightarrow{PR}$

$$(q-1, q^2-1) = 3(a-1, b-1) \quad \text{ゆえに} \quad q = 3a-2, \quad q^2 = 3b-2$$

$$-1 \leq q \leq 1 \text{ に注意して, } q \text{ を消去すると } b = 3a^2 - 4a + 2 \left(\frac{1}{3} \leq a \leq 1 \right)$$



- 4 (1) $A = aP + (a+1)Q$, $P^2 = P$, $Q^2 = Q$, $PQ = O$, $QP = O$ より

$$PA = P(aP + (a+1)Q) = aP^2 + (a+1)PQ = aP$$

$$QA = Q(aP + (a+1)Q) = aQP + (a+1)Q^2 = (a+1)Q$$

上の2式の辺々を加えると

$$PA + QA = aP + (a+1)Q \quad \text{よって} \quad (P+Q)A = A$$

- (2) $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix}$ より ($a > 0$), $\det A = a(a+1) \neq 0$ であるから, A は正則. したがって, (1)の結果から $P+Q = E$
これと $A = aP + (a+1)Q$ より

$$P = -A + (a+1)E$$

$$= -\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix} + (a+1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q = A - aE$$

$$= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix} - a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (3) $A_k = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 1 & k \end{pmatrix} = kP + (k+1)Q$ より (スペクトル分解²⁾)

$$\begin{aligned} \prod_{k=2}^n A_k &= \prod_{k=2}^n (kP + (k+1)Q) \\ &= n!P + \frac{(n+1)!}{2}Q = \frac{n!}{2}(2P + (n+1)Q) \\ &= \frac{n!}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ n-1 & n+1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■

²http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2004.pdf 2 を参照.

- 5** (1) $m = n$ のとき, n 回とも表であるから $p_n = p^n$
 $0 \leq m \leq n - 1$ のとき, $n - m$ 回目に裏が出て, $n - m + 1$ 回目から n 回目まで連続して m 回表が出るから

$$p_m = (1 - p)p^m$$

- (2) $m = n$ のとき, 高さは n 以下であるから $q_n = 1$
 $0 \leq m \leq n - 1$ のとき, (1) の結果を利用して

$$q_m = \sum_{k=0}^m p_k = \sum_{k=0}^m (1 - p)p^k = (1 - p) \cdot \frac{1 - p^{m+1}}{1 - p} = 1 - p^{m+1}$$

別解 高さが m より大きくなる (最後の $m + 1$ 回が表) 確率は p^{m+1}
 求める確率はこの余事象の確率であるから, $0 \leq m \leq n - 1$ のとき

$$q_m = 1 - p^{m+1}$$

- (3) 1 度目が m , 2 度目が m 以下となる事象を A
 1 度目が m 以下, 2 度目が m となる事象を B
 とすると, $A \cap B$ は 1 度目も 2 度目も m である事象で, これらの確率は

$$P(A) = p_m q_m, \quad P(B) = q_m p_m, \quad P(A \cap B) = p_m^2$$

求める確率は

$$\begin{aligned} r_m &= P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 2p_m q_m - p_m^2 = p_m(2q_m - p_m) \end{aligned}$$

- (i) $m = n$ のとき

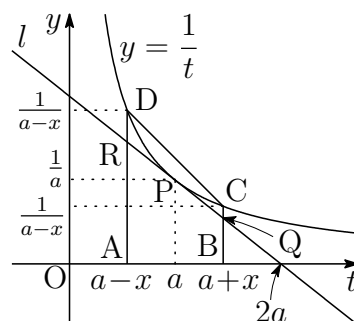
$$r_n = p_n(2q_n - p_n) = p^n(2 - p^n)$$

- (ii) $0 \leq m \leq n - 1$ のとき

$$\begin{aligned} r_m &= p_m(2q_m - p_m) \\ &= (1 - p)p^m \{2(1 - p^{m+1}) - (1 - p)p^m\} \\ &= (1 - p)p^m(2 - p^m - p^{m+1}) \end{aligned}$$



- 6 (1) 右の図のように $A(a-x, 0)$, $B(a+x, 0)$, $C\left(a+x, \frac{1}{a+x}\right)$, $D\left(a-x, \frac{1}{a-x}\right)$ とし, 曲線 $y = \frac{1}{t}$ 上の点 $P\left(a, \frac{1}{a}\right)$ における接線を l とし, l と 2 直線 $t = a+x$, $t = a-x$ との交点をそれぞれ Q , R とする. このとき, 曲線 $y = \frac{1}{t}$ と t 軸および 2 直線 $t = a+x$, $t = a-x$ で囲まれた図形の面積と台形 $ABCD$ の面積, 台形 $ABQR$ の面積の大小関係は



$$(\text{台形 } ABQR \text{ の面積}) < \int_{a-x}^{a+x} \frac{1}{t} dt < (\text{台形 } ABCD \text{ の面積})$$

接線 l の傾きを m とすると

$$\begin{aligned} (\text{台形 } ABQR \text{ の面積}) &= \int_{a-x}^{a+x} \left\{ m(t-a) + \frac{1}{a} \right\} dt \\ &= \left[\frac{m}{2}(t-a)^2 + \frac{t}{a} \right]_{a-x}^{a+x} = \frac{2x}{a}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{台形 } ABCD \text{ の面積}) &= \frac{1}{2} \{ (a+x) - (a-x) \} \left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right) \\ &= x \left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right) \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad \frac{2x}{a} < \int_{a-x}^{a+x} \frac{1}{t} dt < x \left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right)$$

- (2) (1) の結果で, $a-x = \alpha$, $a+x = \beta$ $\left(a = \frac{\alpha+\beta}{2}, x = \frac{\beta-\alpha}{2} \right)$ とおくと

$$\frac{2(\beta-\alpha)}{\alpha+\beta} < \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{t} dt < \frac{\beta-\alpha}{2} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) \quad \cdots (*)$$

(*) に $(\alpha, \beta) = \left(1, \frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ をそれぞれ代入すると

$$\frac{2}{5} < \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{1}{t} dt < \frac{5}{12}, \quad \frac{2}{7} < \int_{\frac{3}{2}}^2 \frac{1}{t} dt < \frac{7}{24}$$

上式の辺々を加えると $\frac{24}{35} < \int_1^2 \frac{1}{t} dt < \frac{17}{24}$ ゆえに $\frac{24}{35} < \log 2 < \frac{17}{24}$

$\frac{24}{35} = 0.685\cdots$, $\frac{17}{24} = 0.708\cdots$ であるから $0.68 < \log 2 < 0.71$ ■