

平成18年度 東京大学2次試験前期日程(数学問題)150分
理科(一類, 二類, 三類) 数I・II・III・A・B・C

問題 1 2 3 4 5 6

- 1 Oを原点とする座標平面上の4点 P_1, P_2, P_3, P_4 で, 条件

$$\overrightarrow{OP_{n-1}} + \overrightarrow{OP_{n+1}} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OP_n} \quad (n=2, 3)$$

を満たすものを考える. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) P_1, P_2 が曲線 $xy=1$ 上にあるとき, P_3 はこの曲線上にはないことを示せ.
- (2) P_1, P_2, P_3 が円周 $x^2+y^2=1$ 上にあるとき, P_4 もこの円周上にあることを示せ.

- 2 コンピュータの画面に, 記号○と×のいずれかを表示させる操作をくり返し行う. このとき, 各操作で, 直前の記号と同じ記号を続けて表示する確率は, それまでの経過に関係なく, p であるとする.

最初に, コンピュータの画面に記号×が表示された. 操作をくり返し行い, 記号×が最初のものも含めて3個出るよりも前に, 記号○が n 個出る確率を P_n とする. ただし, 記号○が n 個出た段階で操作は終了する.

- (1) P_2 を p で表せ.
- (2) $n \geq 3$ のとき, P_n を p と n で表せ.

- 3 Oを原点とする座標平面上に, y 軸上の点 $P(0, p)$ と, 直線 $m: y = (\tan \theta)x$ が与えられている. ここで, $p > 1, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする.

いま, 傾きが α の直線 ℓ を対称軸とする対称移動を行うと, 原点Oは直線 $y=1$ 上の, 第1象限の点Qに移り, y 軸上の点Pは直線 m 上の, 第1象限の点Rに移った.

- (1) このとき, $\tan \theta$ を α と p で表せ.
- (2) 次の条件を満たす点Pが存在することを示し, そのときの p の値を求めよ.

条件: どのような θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) に対しても, 原点を通り直線 ℓ に垂直な直線は $y = \left(\tan \frac{\theta}{3} \right) x$ となる.

4 次の条件を満たす組 (x, y, z) を考える.

条件 (A) : x, y, z は正の整数で, $x^2 + y^2 + z^2 = xyz$ および $x \leq y \leq z$ を満たす.

以下の問いに答えよ.

- (1) 条件 (A) を満たす組 (x, y, z) で, $y \leq 3$ となるものをすべて求めよ.
- (2) 組 (a, b, c) が条件 (A) を満たすとする. このとき, 組 (b, c, z) が条件 (A) をみたすような z が存在することを示せ.
- (3) 条件 (A) を満たす組 (x, y, z) は, 無数に存在することを示せ.

5 $a_1 = \frac{1}{2}$ とし, 数列 $\{a_n\}$ を漸化式

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{(1 + a_n)^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定める. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 各 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し $b_n = \frac{1}{a_n}$ とおく.
 $n > 1$ のとき, $b_n > 2n$ となることを示せ.
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ を求めよ.
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n$ を求めよ.

6 $x > 0$ を定義域とする関数 $f(x) = \frac{12(e^{3x} - 3e^x)}{e^{2x} - 1}$ について, 以下の問いに答えよ.

- (1) 関数 $y = f(x)$ ($x > 0$) は, 実数全体を定義域とする逆関数を持つことを示せ. すなわち, 任意の実数 a に対して, $f(x) = a$ となる $x > 0$ がただ1つ存在することを示せ.
- (2) 前問 (1) で定められた逆関数を $y = g(x)$ ($-\infty < x < \infty$) とする. このとき, 定積分 $\int_8^{27} g(x) dx$ を求めよ.

解答例

1 (1) $P_1\left(s, \frac{1}{s}\right), P_2\left(t, \frac{1}{t}\right), P_3(x_3, y_3)$ とすると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP_3} &= \frac{3}{2}\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = \frac{3}{2}\left(s, \frac{1}{s}\right) - \left(t, \frac{1}{t}\right) \\ (x_3, y_3) &= \left(\frac{3s}{2} - t, \frac{3}{2s} - \frac{1}{t}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{したがって} \quad x_3 y_3 &= \left(\frac{3s}{2} - t\right) \left(\frac{3}{2s} - \frac{1}{t}\right) \\ x_3 y_3 - 1 &= -\frac{3}{2} \left(\frac{s}{t} + \frac{t}{s} - \frac{3}{2}\right) \quad \cdots (*)\end{aligned}$$

$$\frac{s}{t} > 0 \text{ のとき} \quad \frac{s}{t} + \frac{t}{s} \geq 2\sqrt{\frac{s}{t} \cdot \frac{t}{s}} = 2 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{s}{t} + \frac{t}{s} - \frac{3}{2} \geq \frac{1}{2}$$

$$\frac{s}{t} < 0 \text{ のとき} \quad \frac{s}{t} + \frac{t}{s} - \frac{3}{2} < -\frac{3}{2}$$

上の2式より, $\frac{s}{t} + \frac{t}{s} - \frac{3}{2} \neq 0$ であるから $(*)$ より $x_3 y_3 \neq 1$

よって, P_3 は曲線 $xy = 1$ 上にない.

$$(2) \text{ 条件により} \quad \overrightarrow{OP_3} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP_4} &= \frac{3}{2}\overrightarrow{OP_3} - \overrightarrow{OP_2} = \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}\right) - \overrightarrow{OP_2} \\ &= \frac{5}{4}\overrightarrow{OP_2} - \frac{3}{2}\overrightarrow{OP_1} \quad \cdots \textcircled{2}\end{aligned}$$

P_1, P_2, P_3 は円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の点であるから, $|\overrightarrow{OP_1}| = |\overrightarrow{OP_2}| = |\overrightarrow{OP_3}| = 1$ を $\textcircled{1}$ に適用すると

$$|\overrightarrow{OP_3}|^2 = \frac{9}{4}|\overrightarrow{OP_2}|^2 - 3\overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_2} + |\overrightarrow{OP_1}|^2 \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_2} = \frac{3}{4}$$

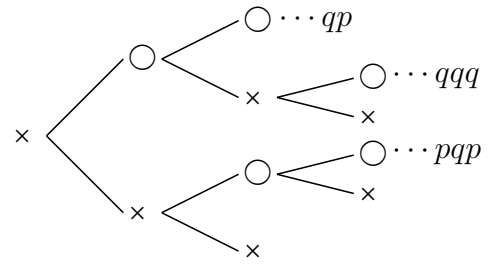
これと $|\overrightarrow{OP_1}| = |\overrightarrow{OP_2}| = 1$ を $\textcircled{2}$ に適用すると

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OP_4}|^2 &= \frac{25}{16}|\overrightarrow{OP_2}|^2 - \frac{15}{4}\overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_2} + \frac{9}{4}|\overrightarrow{OP_1}|^2 \\ &= \frac{25}{16} - \frac{15}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{9}{4} = 1\end{aligned}$$

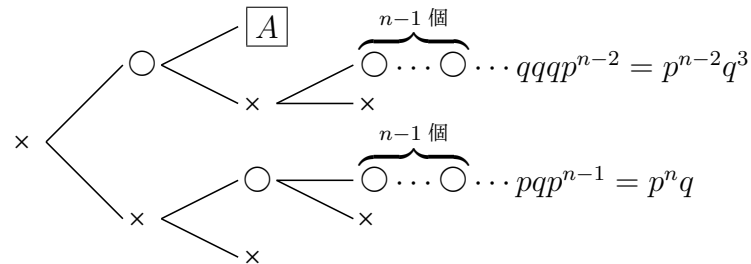
よって, P_4 も円周 $x^2 + y^2 = 1$ 上にある. ■

2 (1) $q = 1 - p$ とおくと、右の樹形図より

$$\begin{aligned} P_2 &= qp + qq q + pqp \\ &= q(p + q^2 + p^2) \\ &= (1 - p)\{p + (1 - p)^2 + p^2\} \\ &= (1 - p)(2p^2 - p + 1) \end{aligned}$$



(2) (1) と同様に、○, ×の推移を樹形図に示すと次のようになる.



A には、次の場合がある.

- (i) A に○が $n - 1$ 個連続して出る場合で、その確率は $q \times p^{n-1} = p^{n-1}q$
- (ii) A に $n - 1$ 個の○と 1 個の× (×は最初と最後以外の順番) が出る場合で、ひとまとめの $\boxed{\bigcirc \times \bigcirc}$ と $n - 3$ 個の○が並ぶ確率であるから

$$q \times {}_{n-2}C_1(pqq)p^{n-3} = (n - 2)p^{n-2}q^3$$

(i), (ii) および上の樹形図に示した結果から

$$\begin{aligned} P_n &= p^{n-1}q + (n - 2)p^{n-2}q^3 + p^{n-2}q^3 + p^n q \\ &= p^{n-1}q + (n - 1)p^{n-2}q^3 + p^n q = p^{n-2}q\{p + (n - 1)q^2 + p^2\} \\ &= p^{n-2}(1 - p)\{p + (n - 1)(1 - p)^2 + p^2\} \\ &= p^{n-2}(1 - p)\{np^2 + (3 - 2n)p + n - 1\} \end{aligned}$$

別解 P_{n+1} は、(2) の樹形の先に○が続く確率 $P_n \times p$ および $\times \overbrace{\bigcirc \cdots \bigcirc}^{n \text{ 個}} \times \bigcirc$ である確率 $qp^{n-1}qq = p^{n-1}q^3$ の和であるから

$$P_{n+1} = pP_n + p^{n-1}q^3 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{P_{n+1}}{p^{n+1}} = \frac{P_n}{p^n} + \frac{q^3}{p^2}$$

数列 $\left\{ \frac{P_n}{p^n} \right\}$ は公差 $\frac{q^3}{p^2}$ の等差数列で、 $\frac{P_2}{p^2} = \frac{q(p + q^2 + p^2)}{p^2}$ より

$$\frac{P_n}{p^n} = \frac{P_2}{p^2} + \frac{q^3(n - 2)}{p^2} \quad \text{よって} \quad P_n = p^{n-2}q\{p + (n - 1)q^2 + p^2\}$$

■

- 3** (1) $Q(q, 1)$ とすると、点 Q は直線 l と垂直な直線 $OQ : y = -\frac{x}{\alpha}$ 上の点であるから

$$1 = -\frac{q}{\alpha} \quad \text{ゆえに} \quad Q(-\alpha, 1)$$

ℓ は線分 OQ の垂直二等分線、すなわち、線分 OQ の中点 $M\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}\right)$ を通り、傾き α の直線であるから

$$y - \frac{1}{2} = \alpha \left(x + \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$\text{すなわち} \quad y = \alpha x + \frac{\alpha^2 + 1}{2}$$

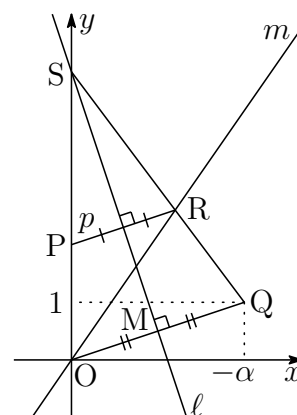
ℓ の y 軸との交点を S とすると $S\left(0, \frac{\alpha^2 + 1}{2}\right)$

$QR : RS = OP : PS = p : \frac{\alpha^2 + 1}{2} - p = 2p : \alpha^2 + 1 - 2p$ であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OR} &= \frac{(\alpha^2 + 1 - 2p)\overrightarrow{OQ} + 2p\overrightarrow{OS}}{2p + (\alpha^2 + 1 - 2p)} = \frac{\alpha^2 + 1 - 2p}{\alpha^2 + 1}\overrightarrow{OQ} + \frac{2p}{\alpha^2 + 1}\overrightarrow{OS} \\ &= \frac{\alpha^2 + 1 - 2p}{\alpha^2 + 1}(-\alpha, 1) + \frac{2p}{\alpha^2 + 1}\left(0, \frac{\alpha^2 + 1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{\alpha^2 + 1}(-\alpha(\alpha^2 + 1 - 2p), (p + 1)\alpha^2 - p + 1) \end{aligned}$$

$\tan \theta$ は直線 OR の傾きであるから

$$\tan \theta = -\frac{(p + 1)\alpha^2 - p + 1}{\alpha(\alpha^2 + 1 - 2p)}$$



- 4 (1) $x^2 + y^2 + z^2 = xyz$ を z について整理すると

$$z^2 - xyz + x^2 + y^2 = 0 \quad \cdots (*)$$

この z に関する 2 次方程式の判別式を D とすると, z は実数であるから

$$D = (-xy)^2 - 4 \cdot 1(x^2 + y^2) = x^2y^2 - 4x^2 - 4y^2 \geq 0$$

$x^2y^2 - 4x^2 \geq 4y^2$ より, $x, y > 0$ であるから

$$x^2(y^2 - 4) = x^2(y + 2)(y - 2) \geq 4y^2 > 0 \quad \text{ゆえに} \quad y > 2$$

$y \leq 3$ のとき, 上式より, $y = 3$ であるから, $(*)$ は

$$z^2 - 3xz + x^2 + 9 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad z = \frac{3x \pm \sqrt{5x^2 - 36}}{2}$$

$x \leq y = 3$ および $5x^2 - 36 \geq 0$ を満たす正の整数 x, z は

$$x = 3 \quad \text{ゆえに} \quad z = 3, 6$$

よって $(x, y, z) = (3, 3, 3), (3, 3, 6)$

- (2) 正の整数の組 (a, b, c) が条件 (A) を満たすとき

$$a^2 + b^2 + c^2 = abc \quad (a \leq b \leq c) \quad \cdots \textcircled{1}$$

また, 正の整数の組 (b, c, z) が条件 (A) を満たすとする

$$b^2 + c^2 + z^2 = bcz \quad (b \leq c \leq z) \quad \cdots \textcircled{2}$$

上の 2 式から, $b^2 + c^2$ を消去すると

$$z^2 - a^2 = bc(z - a) \quad \text{ゆえに} \quad (z - a)(z + a - bc) = 0$$

$z = bc - a$ とすると, (1) の結果から, $b - 2 > 0$ に注意して

$$z - c = bc - c - a = (b - 2)c + c - a > 0 \quad \text{このとき} \quad c < z$$

したがって, 正の整数の組 (a, b, c) が (A) を満たすとき, 正の整数の組 $(b, c, bc - a)$ も (A) を満たす.

- (3) (1), (2) の結果から

$$a_1 = b_1 = c_1 = 3,$$

$$a_{n+1} = b_n,$$

$$b_{n+1} = c_n,$$

$$c_{n+1} = b_nc_n - a_n$$

に対して, (x, y, z) を (a_n, b_n, c_n) とすれば, (x, y, z) は無限に存在する.



5 (1) $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{(1+a_n)^2}$ より, $a_n > 0$ に注意して

$$(*) \quad \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{(1+a_n)^2}{a_n} = \frac{1}{a_n} + 2 + a_n \quad \text{ゆえに} \quad b_{n+1} > b_n + 2$$

$$b_1 = \frac{1}{a_1} = 2, \quad n > 1 \text{ のとき, } \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) > \sum_{k=1}^{n-1} 2 \text{ であるから}$$

$$b_n - b_1 > 2(n-1) \quad \text{よって} \quad b_n > 2n$$

(2) (1) の結果から $a_n = \frac{1}{b_n} < \frac{1}{2n} \quad (n > 1)$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad a_1 + a_2 + \cdots + a_n &< \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \\ &< \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{dx}{x} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_1^n \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left[\log x \right]_1^n \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log n \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

ここで, $f(x) = \sqrt{x} - 1 - \frac{1}{2} \log x$ とすると ($x \geq 1$)

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x} = \frac{\sqrt{x} - 1}{2x}$$

$f(1) = 0$, $x > 1$ において, $f'(x) > 0$ であるから $f(x) > 0 \quad (x > 1)$
 $n > 1$ のとき, $f(n) > 0$ であるから

$$\sqrt{n} - 1 - \frac{1}{2} \log n > 0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{2} \log n < \sqrt{n} - 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ② より, $n > 1$ のとき, $0 < a_1 + a_2 + \cdots + a_n < \sqrt{n} - \frac{1}{2}$ であるから

$$0 < \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) < \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} \right) = 0$ であるから, はさみうちの原理により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = 0$$

(3) (*) より, $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = 2 + a_n$ であるから

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k} \right) &= \sum_{k=1}^n 2 + \sum_{k=1}^n a_k \\ \frac{1}{a_{n+1}} - 2 &= 2n + \sum_{k=1}^n a_k \\ \frac{1}{na_{n+1}} &= 2 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k\end{aligned}$$

(2) の結果より, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = 0$ であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{na_{n+1}} = 2 \quad \text{ゆえに} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (n-1)a_n = \frac{1}{2}$$

$$\text{よって} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n-1} \cdot (n-1)a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} \cdot (n-1)a_n = \frac{1}{2} \quad \blacksquare$$

6 (1) $h(t) = \frac{12(t^3 - 3t)}{t^2 - 1} = 12t - \frac{24t}{t^2 - 1}$ とおくと ($t > 1$)

$$h'(t) = 12 - \frac{24(t^2 - 1) - 24t \cdot 2t}{(t^2 - 1)^2} = 12 + \frac{24(t^2 + 1)}{(t^2 - 1)^2} > 0$$

$f(x) = h(e^x)$ であるから ($x > 0$), $e^x > 1$ に注意すると, $h'(e^x) > 0$ より

$$f'(x) = h'(e^x)(e^x)' = h'(e^x)e^x > 0$$

$x > 0$ において, $f'(x) > 0$ より, $f(x)$ は微分可能な単調増加関数であるから, 関数 $y = f(x)$ ($x > 0$) は, 実数全体を定義域とする逆関数をもつ.

(2) $\varphi(x) = e^x$ とすると, $f(x) = h(\varphi(x))$ であるから

$$g(x) = f^{-1}(x) = \varphi^{-1}(h^{-1}(x))$$

$h(t) = 8$ とすると

$$\frac{12(t^3 - 3t)}{t^2 - 1} = 8 \quad \text{ゆえに} \quad (t-2)(3t^2 + 4t - 1) = 0$$

$h(t) = 27$ とすると

$$\frac{12(t^3 - 3t)}{t^2 - 1} = 27 \quad \text{ゆえに} \quad (t-3)(4t^2 + 3t - 3) = 0$$

$t > 1$ より, $h(2) = 8$, $h(3) = 27$, すなわち, $h^{-1}(8) = 2$, $h^{-1}(27) = 3$

$t = h^{-1}(x)$ とおくと, $x = h(t)$ より $\frac{dx}{dt} = h'(t)$

$$\begin{aligned}\int_8^{27} g(x) dx &= \int_8^{27} \varphi^{-1}(h^{-1}(x)) dx = \int_2^3 \varphi^{-1}(t) h'(t) dt \\ &= \int_2^3 h'(t) \log t dt \\ &= \left[h(t) \log t \right]_2^3 - \int_2^3 h(t) \cdot \frac{1}{t} dt \\ &= h(3) \log 3 - h(2) \log 2 - \int_2^3 \frac{12(t^3 - 3t)}{t^2 - 1} \cdot \frac{1}{t} dt \\ &= 27 \log 3 - 8 \log 2 - 12 \int_2^3 \left(1 - \frac{2}{t^2 - 1} \right) dt\end{aligned}$$

$$\text{ここで } \int_2^3 \left(1 - \frac{2}{t^2 - 1} \right) dt = \left[t + \log \frac{t+1}{t-1} \right]_2^3 = 1 + \log 2 - \log 3$$

$$\text{よって } \int_8^{27} g(x) dx = 27 \log 3 - 8 \log 2 - 12(1 + \log 2 - \log 3)$$

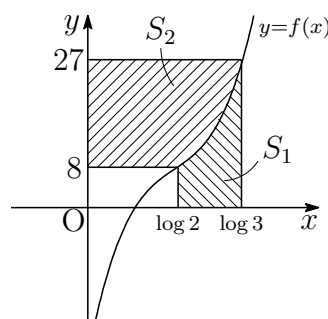
$$= 39 \log 3 - 20 \log 2 - 12$$

別解 $f(\log 2) = 8$, $f(\log 3) = 27$ であるから,
右の図について

$$S_1 + S_2 = 27 \log 3 - 8 \log 2,$$

$$S_1 = \int_{\log 2}^{\log 3} f(x) dx$$

$$S_2 = \int_8^{27} g(y) dy$$



$f(x) = h(e^x)$ より, $t = e^x$ とおくと, $\frac{dt}{dx} = e^x = t$

x	$\log 2 \longrightarrow \log 3$
t	$2 \longrightarrow 3$

$$S_1 = \int_2^3 h(t) \cdot \frac{dt}{t} = 12 \left[t + \log \frac{t+1}{t-1} \right]_2^3 = 12(1 + \log 2 - \log 3)$$

ゆえに $S_2 = 27 \log 3 - 8 \log 2 - 12(1 + \log 2 - \log 3) = 39 \log 3 - 20 \log 2 - 12$

$$\text{よって } \int_8^{27} g(x) dx = \int_8^{27} g(y) dy = 39 \log 3 - 20 \log 2 - 12$$

■