

平成 15 年度 東京大学 2 次試験前期日程 (数学問題)150 分
理科 (一類, 二類, 三類) 数 I · II · III · A · B · C

問題 1 2 3 4 5 6

1 a, b, c を実数とし, $a \neq 0$ とする.

2 次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ が次の条件 (A), (B) を満たすとする.

$$(A) f(-1) = -1, \quad f(1) = 1$$

(B) $-1 \leq x \leq 1$ を満たすすべての x に対し,

$$f(x) \leq 3x^2 - 1$$

このとき, 積分 $I = \int_{-1}^1 (f'(x))^2 dx$ の値のとりうる範囲を求めよ.

2 O を原点とする複素数平面上で 6 を表す点を A , $7 + 7i$ を表す点を B とする.
ただし, i は虚数単位である. 正の実数 t に対し,

$$\frac{14(t-3)}{(1-i)t-7}$$

を表す点 P をとる.

(1) $\angle APB$ を求めよ.

(2) 線分 OP の長さが最大になる t を求めよ.

3 xyz 空間において, 平面 $z = 0$ 上の原点を中心とする半径 2 の円を底面とし,
点 $(0, 0, 1)$ を頂点とする円錐を A とする.

次に, 平面 $z = 0$ 上の点 $(1, 0, 0)$ を中心とする半径 1 の円を H , 平面 $z = 1$ 上の点 $(1, 0, 1)$ を中心とする半径 1 の円を K とする. H と K を 2 つの底面とする円柱を B とする.

円錐 A と円柱 B の共通部分を C とする.

$0 \leq t \leq 1$ を満たす実数 t に対し, 平面 $z = t$ による C の切り口の面積を $S(t)$ とおく.

(1) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ とする. $t = 1 - \cos \theta$ のとき, $S(t)$ を θ で表せ.

(2) C の体積 $\int_0^1 S(t) dt$ を求めよ.

- 4 2次方程式 $x^2 - 4x - 1 = 0$ の2つの実数解のうち大きいものを α , 小さいものを β とする.

$n = 1, 2, 3, \dots$ に対し,

$$s_n = \alpha^n + \beta^n$$

とおく.

- (1) s_1, s_2, s_3 を求めよ. また, $n \geq 3$ に対し, s_n を s_{n-1} と s_{n-2} で表せ.
 - (2) β^3 以下の最大の整数を求めよ.
 - (3) α^{2003} 以下の最大の整数の1の位の数をも求めよ.
- 5 さいころを n 回振り, 第1回目から第 n 回目までに出たさいころの目の数 n 個の積を X_n とする.

- (1) X_n が5で割り切れる確率を求めよ.
- (2) X_n が4で割り切れる確率を求めよ.
- (3) X_n が20で割り切れる確率を p_n とおく.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(1 - p_n)$$

を求めよ.

注意: さいころは1から6までの目が等確率で出るものとする.

- 6 円周率が3.05より大きいことを証明せよ.

解答例

1 $f(x) = ax^2 + bx + c$ が $f(-1) = -1$, $f(1) = 1$ を満たすから

$$a - b + c = -1, \quad a + b + c = 1 \quad \text{ゆえに} \quad b = 1, \quad c = -a$$

$f(x) = ax^2 + x - a$ が $f(x) \leq 3x^2 - 1$ ($-1 \leq x \leq 1$) を満たすから

$$ax^2 + x - a \leq 3x^2 - 1 \quad \text{ゆえに} \quad a(x^2 - 1) \leq 3x^2 - x - 1$$

$x = \pm 1$ は上の第2式を満たす. $-1 < x < 1$ のとき, $x^2 - 1 < 0$ に注意して

$$a \geq \frac{3x^2 - x - 1}{x^2 - 1} = 3 + \frac{2 - x}{x^2 - 1} \quad (-1 < x < 1)$$

ここで, $g(x) = 3 + \frac{2 - x}{x^2 - 1}$ ($-1 < x < 1$) とおくと

$$g'(x) = \frac{(2 - x)'(x^2 - 1) - (2 - x)(x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2 - 4x + 1}{(x^2 - 1)^2}$$

$-1 < x < 1$ に注意して, $g'(x) = 0$ を解くと $x = 2 - \sqrt{3}$

x	(-1)	$\cdots$	$2 - \sqrt{3}$	$\cdots$	(1)
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

$$a \geq g(2 - \sqrt{3}) \text{ であるから } a \geq 3 + \frac{2 - (2 - \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3})^2 - 1} = \frac{4 - \sqrt{3}}{2}$$

$$f'(x) = 2ax + 1, \quad I = \int_{-1}^1 (f'(x))^2 dx \text{ より}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 (2ax + 1)^2 dx = \int_{-1}^1 (4a^2x^2 + 4ax + 1) dx \\ &= 2 \int_0^1 (4a^2x^2 + 1) dx = 2 \left[\frac{4a^2}{3}x^3 + x \right]_0^1 = \frac{8}{3}a^2 + 2 \\ &\geq \frac{8}{3} \left(\frac{4 - \sqrt{3}}{2} \right)^2 + 2 = \frac{44 - 16\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad I \geq \frac{44 - 16\sqrt{3}}{3}$$

補足 $f(x) = ax^2 + x - a$ について, 不等式

$$f(x) \leq 3x^2 - 1 \quad (-1 \leq x \leq 1) \quad (*)$$

の等号が成立するのは, 2つの2次関数 $y = f(x)$ および $y = 3x^2 - 1$ のグラフから, $-1 < x < 1$ において, これらの放物線が接するときである. $a \neq 3$ のとき, 2式から y を消去すると

$$(a-3)x^2 + x - a + 1 = 0 \quad (**)$$

このとき, $D = 1 - 4(a-3)(-a+1) = 0$ より

$$4a^2 - 16a + 13 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad a = \frac{4 \pm \sqrt{3}}{2}$$

この a の値に対する $(**)$ の重解 $x = -\frac{1}{2(a-3)}$ で $-1 < x < 1$ を満たすのは

$$a = \frac{4 - \sqrt{3}}{2} \quad (x = 2 - \sqrt{3})$$

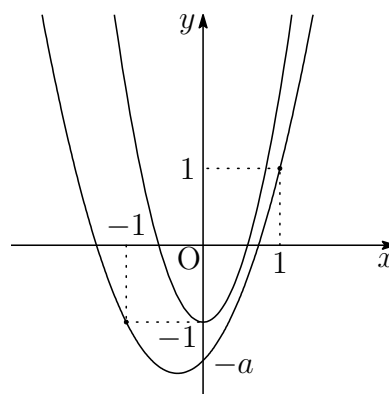
$a = 3$ のとき

$$f(x) - (3x^2 - 1) = x - 2 \leq 0 \quad (-1 < x < 1)$$

となり, $(*)$ を満たす.

2つのグラフから, $a = \frac{4 - \sqrt{3}}{2}$ が $(*)$ を満たす a の最小値である.

よって, a の取り得る値の範囲は $a \geq \frac{4 - \sqrt{3}}{2}$

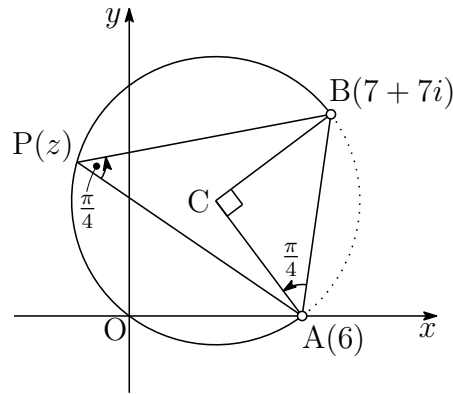


2 (1) $z = \frac{14(t-3)}{(1-i)t-7}$ とおくと

$$\begin{aligned} \frac{(7+7i)-z}{6-z} &= \frac{(7+7i)\{(1-i)t-7\}-14(t-3)}{6\{(1-i)t-7\}-14(t-3)} \\ &= \frac{-7(1+7i)}{-2t(4+3i)} = \frac{7(1+7i)(4-3i)}{2t(4+3i)(4-3i)} = \frac{7(1+i)}{2t} \end{aligned}$$

t は正の実数であるから

$$\arg \frac{(7+7i)-z}{6-z} = \arg \frac{7(1+i)}{2t} = \arg \frac{7}{2t} + \arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$$



(2) (1) の結果から, P の軌跡は円の一部であり, その半径を R とすると, 正弦定理により

$$2R = \frac{AB}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{|(7+7i)-6|}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{50}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 10 \quad \text{ゆえに} \quad R = 5$$

円の中心を C とすると, $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$ であるから, $\overrightarrow{AC}$ は $\overrightarrow{AB}$ を A を中心に $\frac{\pi}{4}$ だけ回転し, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍したものであるから, $C(\gamma)$ とすると

$$\begin{aligned} \gamma &= 6 + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \{(7+7i)-6\} \\ &= 6 + \frac{1}{2}(1+i)(1+7i) = 3+4i \end{aligned}$$

線分 OP が最大となる円周上の点は 2γ であるから

$$\frac{14(t-3)}{(1-i)t-7} = 2(3+4i) \quad \text{整理すると} \quad (t-28)i = 0$$

よって, $t > 0$ に注意して $t = 28$

補足 (1) で計算により, $\angle APB$ の大きさを求める問題設定から, 答えは $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$ などの有名角に他ならない. t は正の実数であるから, $t = 3$ のとき, P は原点と一致し, $\angle AOB = \frac{\pi}{4}$ であるから, 答えが $\frac{\pi}{4}$ であること分かる. これをゴールに解答を目指せばよい.

(2) は (1) が解けなくとも, 計算突破もできる.

$$f(t) = \frac{(t-3)^2}{|(1-i)t-7|^2} = \frac{(t-3)^2}{|(t-7)-ti|^2} = \frac{(t-3)^2}{(t-7)^2+t^2} = \frac{(t-3)^2}{2t^2-14t+49}$$

とにおいて, これを微分し $t > 0$ における増減を調べる. このとき, 上式の分子は展開せずに微分することも計算テクニック.

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{2(t-3)(2t^2-14t+49) - (t-3)^2(4t-14)}{(2t^2-14t+49)^2} \\ &= \frac{2(t-3)\{2t^2-14t+49 - (t-3)(2t-7)\}}{(2t^2-14t+49)^2} \\ &= -\frac{2(t-3)(t-28)}{(2t^2-14t+49)^2} \end{aligned}$$

増減を調べると (増減表は省略), $t = 28$ で最大となる.

$z = \frac{14(t-3)}{(1-i)t-7}$ ($t > 0$) の表す図形は円の一部であり, $t = 0, \infty$ がそれぞれ, A, B に対応している. $t = 3$ のとき原点であるから, この図形は原点を含む側の $\widehat{AB}$ であることが分かる (円周の $\frac{3}{4}$).

$$\begin{aligned} z - (3+4i) &= \frac{14(t-3)}{(1-i)t-7} - (3+4i) = \frac{(7-i)t-21+28i}{(1-i)t-7} \\ &= \frac{(1+i)\{(7-i)t-21+28i\}}{(1+i)\{(1-i)t-7\}} = \frac{(4+3i)\{(2t-7)+7i\}}{(2t-7)-7i} \end{aligned}$$

$$\tan \theta = \frac{2t-7}{7} \text{ とおくと } \begin{array}{c|c|c} t & 0 & \rightarrow \infty \\ \hline \theta & -\frac{\pi}{4} & \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{array}$$

$$\begin{aligned} z - (3+4i) &= \frac{(4+3i)(\tan \theta + i)}{\tan \theta - i} = \frac{(4+3i)(\sin \theta + i \cos \theta)}{\sin \theta - i \cos \theta} \\ &= -\frac{(4+3i)(\cos \theta - i \sin \theta)}{\cos \theta + i \sin \theta} \\ &= -(4+3i)(\cos 2\theta - i \sin 2\theta) \end{aligned}$$

$$\text{よって } z = 3+4i - (4+3i)(\cos 2\theta - i \sin 2\theta) \quad \left(-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}\right) \quad \blacksquare$$

- 3 (1) $A: x^2 + y^2 = 4(1 - z)^2$, $B: (x - 1)^2 + y^2 = 1$ の $z = t$ における切り口は,
 $t = 1 - \cos \theta$ より

$$(*) \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \cos^2 \theta \\ x^2 + y^2 - 2x = 0 \end{cases}$$

(*) の 2 式の辺々を引いて整理すると $x = 2 \cos^2 \theta$

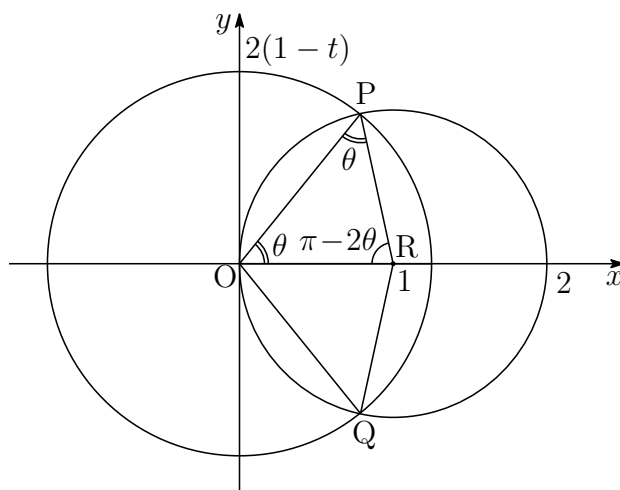
これを (*) の第 1 式に代入すると $(2 \cos^2 \theta)^2 + y^2 = 4 \cos^2 \theta$

$$y^2 = 4 \cos^2 \theta (1 - \cos^2 \theta) = (2 \sin \theta \cos \theta)^2$$

(*) の交点を P, Q とし, OP の x 軸となす角を φ とすると

$$\tan \varphi = \frac{y}{x} = \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{2 \cos^2 \theta} = \tan \theta \quad \text{ゆえに} \quad \varphi = \theta$$

平面 $z = t$ における B の円柱の中心を R とすると, $\triangle OPR$ は二等辺三角形であるから $\angle ROP = \angle OPR = \theta$, $\angle ORP = \pi - 2\theta$



O を中心とする中心角 θ , 半径 OP の扇形の面積を S_1 とすると

$$S_1 = \frac{1}{2} (2 \cos \theta)^2 \cdot \theta = 2\theta \cos^2 \theta$$

R を中心とする Q を含まない $\widehat{OP}$ と線分 OP で囲まれた図形の面積を S_2 とすると

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \{ \pi - 2\theta - \sin(\pi - 2\theta) \} = \frac{1}{2} (\pi - 2\theta - \sin 2\theta)$$

$S(t) = 2S_1 + 2S_2$ であるから

$$S(t) = 4\theta \cos^2 \theta + \pi - 2\theta - \sin 2\theta$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad (1) \text{ の結果から} \quad S(t) &= 4\theta \cdot \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + \pi - 2\theta - 2 \sin \theta \cos \theta \\
 &= 2\theta \cos 2\theta + \pi - 2 \sin \theta \cos \theta
 \end{aligned}$$

$$t = 1 - \cos \theta \text{ より } \frac{dt}{d\theta} = \sin \theta \quad \overline{\frac{t}{\theta} \parallel \begin{array}{l} 0 \longrightarrow 1 \\ 0 \longrightarrow \frac{\pi}{2} \end{array}}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 S(t) dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\theta \cos 2\theta + \pi - 2 \sin \theta \cos \theta) \sin \theta d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\theta \cos 2\theta \sin \theta + \pi \sin \theta - 2 \sin^2 \theta \cos \theta) d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{\theta(\sin 3\theta - \sin \theta) + \pi \sin \theta - 2 \sin^2 \theta \cos \theta\} d\theta \\
 &= \left[\theta \left(-\frac{1}{3} \cos 3\theta + \cos \theta \right) + \frac{1}{9} \sin 3\theta - \sin \theta - \pi \cos \theta - \frac{2}{3} \sin^3 \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \pi - \frac{16}{9}
 \end{aligned}$$

■

- 4** (1) 2次方程式 $x^2 - 4x - 1 = 0$ の解と係数の関係により $\alpha + \beta = 4, \alpha\beta = -1$

$$s_1 = \alpha + \beta = 4$$

$$s_2 = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 4^2 - 2 \cdot (-1) = 18$$

$$s_3 = \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2) - \alpha\beta(\alpha + \beta) = 4 \cdot 18 - (-1) \cdot 4 = 76$$

$$\alpha^n + \beta^n = (\alpha + \beta)(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}) - \alpha\beta(\alpha^{n-2} + \beta^{n-2}) \text{ より}$$

$$s_n = 4s_{n-1} + s_{n-2}$$

別解 $\alpha^2 = 4\alpha + 1, \beta^2 = 4\beta + 1$ より $\alpha^n = 4\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}, \beta^n = 4\beta^{n-1} + \beta^{n-2}$

$$\text{したがって } \alpha^n + \beta^n = 4(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}) + \alpha^{n-2} + \beta^{n-2}$$

$$\text{よって } s_n = 4s_{n-1} + s_{n-2}$$

- (2) 方程式の解は $(\alpha > \beta)$ $\alpha = 2 + \sqrt{5}, \beta = 2 - \sqrt{5}$

$$-1 < \beta < 0 \text{ であるから } -1 < \beta^3 < 0 \text{ よって求める整数は } -1$$

- (3) (1) の結果から $s_1 \equiv 4, s_2 \equiv 8, s_3 \equiv 6 \pmod{10}$

これを $s_n \equiv 4s_{n-1} + s_{n-2}$ に $n = 4, 5, 6, \dots$ と順次代入すると

$$s_4 \equiv 4 \cdot 6 + 8 \equiv 2, \quad s_5 \equiv 4 \cdot 2 + 6 \equiv 4, \quad s_6 \equiv 4 \cdot 4 + 2 \equiv 8 \pmod{10}$$

s_n を 10 で割った余りが, 4, 8, 6, 2 の周期 4 の循環である. したがって,
 $s_{2003} = s_{4 \cdot 500 + 3}$ を 10 で割った余りは 6 で, $-1 < \beta^{2003} < 0$ であるから

$$s_{2003} < \alpha^{2003} = s_{2003} - \beta^{2003} < s_{2003} + 1$$

求める数は, s_{2003} の 1 の位, すなわち, **6**



- 5 (1) X_n が 5 で割り切れない確率は、5 以外の目が n 回出る確率であるから

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n \quad (*)$$

求める確率は、この余事象の確率であるから $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$

- (2) $\{1, 3, 5\}$ の目が出る事象を A , $\{2, 6\}$ の目が出る事象を B とする.
 X_n が 4 で割り切れない確率は、

「 A が n 回」または「 A が $n-1$ 回, B が 1 回」

起こる確率であるから

$$\left(\frac{3}{6}\right)^n + \frac{n!}{(n-1)!1!} \left(\frac{3}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{2^n} + \frac{n}{3 \cdot 2^{n-1}} \quad (**)$$

求める確率は、この余事象の確率であるから $1 - \frac{1}{2^n} - \frac{n}{3 \cdot 2^{n-1}}$

- (3) $\{1, 3\}$ の目が出る事象を C とする. 5 でも 4 で割り切れない確率は、

「 C が n 回」または「 C が $n-1$ 回, B が 1 回」

起こる確率であるから

$$\left(\frac{2}{6}\right)^n + \frac{n!}{(n-1)!1!} \left(\frac{2}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{2}{6} = \frac{n+1}{3^n}$$

X_n が 5, 4 でそれぞれ割り切れる確率を $P(Y)$, $P(Z)$ とすると、上式および (*), (**) から

$$P(\overline{Y}) = \left(\frac{5}{6}\right)^n, \quad P(\overline{Z}) = \frac{1}{2^n} \left(\frac{2n}{3} + 1\right), \quad P(\overline{Y} \cap \overline{Z}) = \frac{n+1}{3^n}$$

確率 p_n は、 $P(Y \cap Z)$ であるから

$$\begin{aligned} P(Y \cap Z) &= 1 - P(\overline{Y \cap Z}) = 1 - P(\overline{Y} \cup \overline{Z}) \\ &= 1 - \{P(\overline{Y}) + P(\overline{Z}) - P(\overline{Y} \cap \overline{Z})\} \end{aligned}$$

したがって $1 - p_n = P(\overline{Y}) + P(\overline{Z}) - P(\overline{Y} \cap \overline{Z})$

$$= \left(\frac{5}{6}\right)^n + \frac{1}{2^n} \left(\frac{2}{3}n + 1\right) - \frac{n+1}{3^n}$$

$$\text{これから } 1 - p_n = \left(\frac{5}{6}\right)^n \left\{ 1 + \left(\frac{3}{5}\right)^n \left(\frac{2}{3}n + 1\right) - \left(\frac{2}{5}\right)^n (n + 1) \right\}$$

$$\text{ここで, } A_n = 1 + \left(\frac{3}{5}\right)^n \left(\frac{2}{3}n + 1\right) - \left(\frac{2}{5}\right)^n (n + 1) \text{ とおくと}$$

$$1 - p_n = \left(\frac{5}{6}\right)^n A_n$$

このとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 1$ であるから

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(1 - p_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(\frac{5}{6}\right)^n A_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\log \frac{5}{6} + \frac{1}{n} \log A_n \right) = \log \frac{5}{6} \end{aligned}$$

補足 $|r| < 1$ のとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} nr^n = 0$ を用いている.

$$0 < r < 1 \text{ のとき, } r = \frac{1}{1+h} \text{ とすると } (h > 0)$$

$$r^n = \frac{1}{(1+h)^n} < \frac{1}{nC_2 h^2} \quad \text{ゆえに} \quad 0 < nr^n < \frac{2}{(n-1)h^2}$$

はみうちの原理により, $0 < r < 1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} nr^n = 0$

$-1 < r < 0$ のとき, $r = -s$ とおくと $0 < s < 1$ であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nr^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n ns^n = 0$$

よって, $|r| < 1$ について $\lim_{n \rightarrow \infty} nr^n = 0$

また, $|r| < 1$ のとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} n(n-1)r^n = 0$ も成立する.

このときは次式を利用し, 証明法は同じである.

$$r^n = \frac{1}{(1+h)^n} < \frac{1}{nC_3 h^3} \quad \text{ゆえに} \quad 0 < n(n-1)r^n < \frac{6}{(n-2)h^3}$$

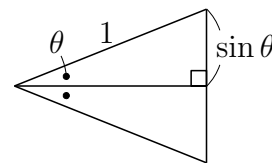
$$\text{これから, } |r| < 1 \text{ のとき } \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 r^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \{n(n-1)r^n + nr^n\} = 0$$

$$\text{さらに, 定数 } a, b, c \text{ について } \lim_{n \rightarrow \infty} (an^2 + bn + c)r^n = 0$$

$$\text{一般の多項式 } P(n) \text{ についても, } |r| < 1 \text{ のとき } \lim_{n \rightarrow \infty} P(n)r^n = 0 \quad \blacksquare$$

- 6** 半径1の円に内接する正 n 角形の一辺の長さを a , その中心角を 2θ とすると

$$\theta = \left(\frac{180}{n}\right)^\circ, \quad a = 2 \sin \theta, \quad na < \pi$$



であるから, $n \geq 3$ である自然数 n について次式が成立する.

$$na = n \cdot 2 \sin \left(\frac{180}{n}\right)^\circ < 2\pi \quad \text{すなわち} \quad n \sin \left(\frac{180}{n}\right)^\circ < \pi \quad (*)$$

これに適当な n を代入すればよい. $n = 12$ のとき, $(*)$ の左辺は

$$12 \sin 15^\circ = 12 \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = 3\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)$$

$1.4^2 = 1.96 < 2$, $1.73^2 = 2.9929 < 3$ より, $\sqrt{2} > 1.4$, $\sqrt{3} > 1.73$ であるから

$$3\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1) > 3 \times 1.4 \times (1.73 - 1) = 3.066$$

よって $\pi > 12 \sin 15^\circ = 3\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1) > 3.066 > 3.05$

別解 半径1の円に内接する正 n 角形と円の面積の大小関係より ($n \geq 3$)

$$n \times \frac{1}{2} \cdot 1^2 \sin \left(\frac{360}{n}\right)^\circ < \pi \cdot 1^2 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{n}{2} \sin \left(\frac{360}{n}\right)^\circ < \pi$$

これに $n = 24$ を代入すると $12 \sin 15^\circ < \pi$

注意 本題においては大小の評価を丁寧に行うことが要求されている.

$$\sqrt{2} = 1.414 \dots > 1.414, \quad \sqrt{3} = 1.732 \dots > 1.732$$

でよいが, 三角比の表や常用対数の表に書かれている数値は, 小数第5位を四捨五入したものであるから, $\tan 60^\circ = 1.7321$ とあれば

$$1.73205 \leq \tan 60^\circ < 1.73215$$

として評価しなければならない.

なお, 本題の評価において $\sqrt{2} > 1.414$, $\sqrt{3} > 1.732$ で計算すると

$$3\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1) > 3.105144$$

補足 実際の π の計算は，べき級数を用いて行われている．

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 (-x^2)^n dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^1 x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\end{aligned}$$

これでは，収束が遅く実用的ではない．

少し収束を早いものが， $\tan \alpha = \frac{1}{3}$ ， $\tan \beta = \frac{1}{2}$ とすると $\left(0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$ ， $\tan(\alpha + \beta) = 1$ ，すなわち， $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ であるから

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

とおくと

$$\frac{\pi}{4} = \alpha + \beta = \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+x^2} = F\left(\frac{1}{3}\right) + F\left(\frac{1}{2}\right)$$

さらに，収束が早いものが， $\tan \theta = \frac{1}{5}$ ， $\tan \varphi = \frac{1}{239}$ とすると $\left(0 < \varphi < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ ， $4\theta - \varphi = \frac{\pi}{4}$ であるから

$$\frac{\pi}{4} = 4\theta - \varphi = 4 \int_0^{\frac{1}{5}} \frac{dx}{1+x^2} - \int_0^{\frac{1}{239}} \frac{dx}{1+x^2} = 4F\left(\frac{1}{5}\right) - F\left(\frac{1}{239}\right)$$

などが利用されている。 ■