

平成14年度 東京大学2次試験前期日程(数学問題)150分
理科(一類, 二類, 三類) 数I・II・III・A・B・C

問題 1 2 3 4 5 6

1 2つの放物線

$$y = 2\sqrt{3}(x - \cos \theta)^2 + \sin \theta$$

$$y = -2\sqrt{3}(x + \cos \theta)^2 - \sin \theta$$

が相異なる2点で交わるような一般角 θ の範囲を求めよ.

2 n は正の整数とする. x^{n+1} を $x^2 - x - 1$ で割った余りを

$$a_n x + b_n$$

とおく.

(1) 数列 $a_n, b_n, n = 1, 2, 3, \dots$, は

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n \\ b_{n+1} = a_n \end{cases}$$

を満たすことを示せ.

(2) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して, a_n, b_n は共に正の整数で, 互いに素であることを証明せよ.

3 xyz 空間内の原点 $O(0, 0, 0)$ を中心とし, 点 $A(0, 0, -1)$ を通る球面を S とする. S の外側にある点 $P(x, y, z)$ に対し, OP を直径とする球面と S との交わりとして得られる円を含む平面を L とする. 点 P と点 A から平面 L へ下した垂線の足をそれぞれ Q, R とする. このとき

$$PQ \leq AR$$

であるような点 P の動く範囲 V を求め, V の体積は10より小さいことを示せ.

4 a は正の実数とする. xy 平面の y 軸上に点 $P(0, a)$ をとる. 関数

$$y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

のグラフを C とする. C 上の点 Q で次の条件を満たすものが原点 $O(0, 0)$ 以外に存在するような a の範囲を求めよ.

条件: Q における C の接線が直線 PQ と直交する.

- 5 O を原点とする xyz 空間に点 $P_k \left(\frac{k}{n}, 1 - \frac{k}{n}, 0 \right)$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$, をとる.
 また, z 軸上 $z \geq 0$ の部分に, 点 Q_k を線分 $P_k Q_k$ の長さが 1 になるようにとる.
 三角錐 $OP_k P_{k+1} Q_k$ の体積を V_k とおいて, 極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} V_k$$

を求めよ.

- 6 N を正の整数とする. $2N$ 個の項からなる数列

$$\{a_1, a_2, \dots, a_N, b_1, b_2, \dots, b_N\}$$

を

$$\{b_1, a_1, b_2, a_2, \dots, b_N, a_N\}$$

という数列に並べ替える操作を「シャッフル」と呼ぶことにする. 並べ替えた数列は b_1 を初項とし, b_i の次に a_i , a_i の次に b_{i+1} が来るようなものになる. また, 数列 $\{1, 2, \dots, 2N\}$ をシャッフルしたときに得られる数列において, 数 k が現れる位置を $f(k)$ で表す.

たとえば, $N = 3$ のとき, $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ をシャッフルすると $\{4, 1, 5, 2, 6, 3\}$ となるので, $f(1) = 2$, $f(2) = 4$, $f(3) = 6$, $f(4) = 1$, $f(5) = 3$, $f(6) = 5$ である.

- (1) 数列 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ を 3 回シャッフルしたときに得られる数列を求めよ.
- (2) $1 \leq k \leq 2N$ を満たす任意の整数 k に対し, $f(k) - 2k$ は $2N + 1$ で割り切れることを示せ.
- (3) n を正の整数とし, $N = 2^{n-1}$ のときを考える. 数列 $\{1, 2, 3, \dots, 2N\}$ を $2n$ 回シャッフルすると, $\{1, 2, 3, \dots, 2N\}$ にもどることを証明せよ.

解答例

- 1 与えられた2つの放物線の方程式をそれぞれ展開すると

$$\begin{aligned} y &= 2\sqrt{3}x^2 - 4\sqrt{3}x \cos \theta + 2\sqrt{3} \cos^2 \theta + \sin \theta, \\ y &= -2\sqrt{3}x^2 - 4\sqrt{3}x \cos \theta - 2\sqrt{3} \cos^2 \theta - \sin \theta \end{aligned}$$

上の2式から y を消去して整理すると $2\sqrt{3}x^2 = -2\sqrt{3} \cos^2 \theta - 2 \sin \theta$

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= -2\sqrt{3}(1 - \sin^2 \theta) - 2 \sin \theta \\ &= 2\sqrt{3} \sin^2 \theta - 2 \sin \theta - 2\sqrt{3} \\ &= (\sqrt{3} \sin \theta - 2)(2 \sin \theta + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

したがって $2\sqrt{3}x^2 = (\sqrt{3} \sin \theta - 2)(2 \sin \theta + \sqrt{3})$

この2次方程式が異なる2つの実数解をもつ条件は

$$(\sqrt{3} \sin \theta - 2)(2 \sin \theta + \sqrt{3}) > 0$$

$\sqrt{3} \sin \theta - 2 < 0$ に注意して $2 \sin \theta + \sqrt{3} < 0$

よって、求める一般角 θ の範囲は

$$\frac{4}{3}\pi + 2n\pi < \theta < \frac{5}{3}\pi + 2n\pi \quad (n \text{ は整数})$$

■

- 2 (1) x^{n+1} を $x^2 - x - 1$ で割った商を $Q_n(x)$ とすると

$$x^{n+1} = (x^2 - x - 1)Q_n(x) + a_n x + b$$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad x^{n+2} &= (x^2 - x - 1)xQ_n(x) + a_n x^2 + b_n x \\ &= (x^2 - x - 1)\{xQ_n(x) + a_n\} + (a_n + b_n)x + a_n \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad (*) \begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n \\ b_{n+1} = a_n \end{cases}$$

- (2) $x^2 = (x^2 - x - 1) \cdot 1 + x + 1$ より $a_1 = 1, b_1 = 1$

これと (*) により, $n = 1, 2, \dots$ に対して, a_n, b_n は共に正の整数である.

また, $a_n = b_{n+1}, b_n = a_{n+1} - b_{n+1}$ より, a_{n+1} と b_{n+1} が素数 p を共通因数にもつとき, a_n, b_n も p を因数にもつ. 順次これを繰り返すと, a_1, b_1 も p を因数にもつことになり, $a_1 = b_1 = 1$ に反する.

よって, $n = 1, 2, \dots$ に対して, a_n, b_n は互いに素である.

■

3 S は原点 O を中心とし、半径 1 の球面であるから

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

OP を直径とする球面を S' とする. $P(a, b, c)$ とおくと, S' 上の点 $X(x, y, z)$ について, $\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{PX}$ より

$$x(x-a) + y(y-b) + z(z-c) = 0$$

したがって $S' : x^2 + y^2 + z^2 = ax + by + cz$

S と S' の方程式から, 平面 L の方程式は

$$L : ax + by + cz - 1 = 0$$

$A(0, 0, -1)$ から L に下ろした垂線の長さ AR は

$$AR = \frac{|c+1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$P(a, b, c)$ から L に下ろした垂線の長さ PQ は, P が S の外部であるから

$$PQ = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - 1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$PQ \leq AR$ より $a^2 + b^2 + c^2 - 1 \leq |c+1|$

(i) $c < -1$ のとき

$$a^2 + b^2 + c^2 - 1 \leq -c - 1 \quad \text{ゆえに} \quad a^2 + b^2 + \left(c + \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$$

このとき, $-1 \leq c \leq 0$ となり, 不適.

(ii) $c \geq -1$ のとき

$$a^2 + b^2 + c^2 - 1 \leq c + 1 \quad \text{ゆえに} \quad a^2 + b^2 + \left(c - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{9}{4}$$

P は S の外部であるから, P の動く範囲 V は

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \geq 1 \\ x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{9}{4} \end{cases}$$

したがって, V の体積は $\frac{4}{3}\pi \left\{ \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 1^3 \right\} = \frac{19}{6}\pi$

ここで $\frac{60}{19} = 3.15\cdots > \pi$ よって $\frac{19}{6}\pi < 10$ ■

4 $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ とおくと $f'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$

C 上の点 Q を $(t, f(t))$ とすると $(t \neq 0)$ $\overrightarrow{PQ} = (t, f(t) - a)$

C の Q における接線の方角ベクトルは $\vec{v} = (1, f'(t))$

このとき, $\vec{v} \cdot \overrightarrow{PQ}$ であるから $t + f'(t)\{f(t) - a\} = 0$

$$t + \frac{2t}{(t^2+1)^2} \left(\frac{t^2}{t^2+1} - a \right) = 0$$

$t \neq 0$ であるから

$$a = \frac{1}{2}(t^2+1)^2 + \frac{t^2}{t^2+1} = \frac{1}{2}(t^2+1)^2 + 1 - \frac{1}{t^2+1}$$

$u = t^2 + 1$ とし, $g(u) = \frac{1}{2}u^2 + 1 - \frac{1}{u}$ とおくと ($u > 1$)

$$g'(u) = u + \frac{1}{u^2}$$

したがって, $a = g(u)$ は, $u > 1$ において単調増加である.

$$\lim_{u \rightarrow \infty} g(u) = \infty, \quad g(u) > g(1) = \frac{1}{2} \quad \text{よって} \quad a > \frac{1}{2}$$



5 $\overrightarrow{OP_k} = \left(\frac{k}{n}, 1 - \frac{k}{n}, 0\right), \overrightarrow{OP_{k+1}} = \left(\frac{k+1}{n}, 1 - \frac{k+1}{n}, 0\right), P_k Q_k = 1$ より

$$\triangle OP_k P_{k+1} = \frac{1}{2} \left| \frac{k}{n} \left(1 - \frac{k+1}{n}\right) - \left(1 - \frac{k}{n}\right) \frac{k+1}{n} \right| = \frac{1}{2n},$$

$$OP_k^2 = \left(\frac{k}{n}\right)^2 + \left(1 - \frac{k}{n}\right)^2 = 1 - \frac{2k}{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right),$$

$$OQ_k^2 = P_k Q_k^2 - OP_k^2 = 1^2 - OP_k^2 = \frac{2k}{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)$$

三角錐 $OP_k P_{k+1} Q_k$ の体積 V_k は

$$V_k = \frac{1}{3} \triangle OP_k P_{k+1} \cdot OQ_k = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2n} \sqrt{\frac{2k}{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{6n} \sqrt{\frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)}$$

したがって $\lim_{n \rightarrow \infty} V_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2}}{6n} \sqrt{\frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{6} \int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx$

$x = \sin^2 \theta$ とおくと $\frac{dx}{d\theta} = 2 \sin \theta \cos \theta$

x	$0 \rightarrow 1$
θ	$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$

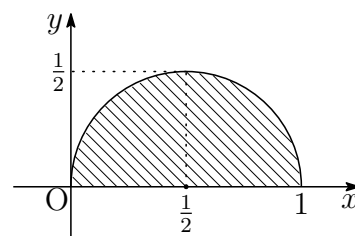
$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2 \theta (1 - \sin^2 \theta)} \cdot 2 \sin \theta \cos \theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\theta d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{4} \left[\theta - \frac{1}{4} \sin 4\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} V_k = \frac{\sqrt{2}}{6} \cdot \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{48} \pi$

別解 $y = \sqrt{x(1-x)}$ とおくと

$$y^2 = x - x^2 \quad \text{ゆえに} \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

したがって $\int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{8}$



■

- 6** (1) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
 (1回目) $\{5, 1, 6, 2, 7, 3, 8, 4\}$
 (2回目) $\{7, 5, 3, 1, 8, 6, 4, 2\}$
 (3回目) $\{8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1\}$
 よって $\{8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1\}$

補足 (1)の結果から分るように, $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ を6回シャッフルすると, $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ にもどることがわかる.
 これは, (3)の $N = 4$, $n = 3$ に対応している.

- (2) $1 \leq k \leq N$ とき $f(k) = 2k$
 $N + 1 \leq k \leq 2N$ のとき $f(k) = 2k - (2N + 1)$
 ゆえに $1 \leq k \leq N$ とき $f(k) - 2k = 0$
 $N + 1 \leq k \leq 2N$ のとき $f(k) - 2k = -(2N + 1)$
 したがって $f(k) - 2k \equiv 0 \pmod{2N + 1}$
 よって, $f(k) - 2k$ は $2N + 1$ で割り切れる.

- (3) (2)の結果から $f(k) = 2k \pmod{2N + 1}$
 $N = 2^{n-1}$ のとき, 法 $2N + 1$ に対して

$$\begin{aligned} f(2^{2n}k) &\equiv 2^{2n}k \equiv 4(2^{n-1})^2k \equiv 4N^2k \\ &\equiv (4N^2 - 1)k + k \\ &\equiv (2N + 1)(2N - 1)k + k \equiv k \pmod{2N + 1} \end{aligned}$$

よって, 数列 $\{1, 2, 3, \dots, 2N\}$ は $2n$ 回シャッフルすると, $\{1, 2, 3, \dots, 2N\}$ にもどる. ■