平成13年度　東京大学2次試験前期日程 (数学問題)150分
理科 (一類，二類，三類)　数 I・II・III・A・B・C

問題 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$

$\boxed{1}$ 半径 r の球面上に 4 点 A，B，C，D がある．四面体 ABCD の各辺の長さは，$\mathrm{AB}=\sqrt{3}$，$\mathrm{AC}=\mathrm{AD}=\mathrm{BC}=\mathrm{BD}=\mathrm{CD}=2$ を満たしている．このとき r の値を求めよ．

$\boxed{2}$ 次の等式を満たす関数 $f(x)$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$ がただ一つ定まるための実数 a，b の条件を求めよ．また，そのときの $f(x)$ を決定せよ．

$$f(x)=\frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(x+y)f(y)\,dy+\frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(x-y)f(y)\,dy$$
$$+\sin x+\cos x$$

ただし，$f(x)$ は区間 $0 \leqq x \leqq 2\pi$ で連続な関数とする．

$\boxed{3}$ 実数 $t>1$ に対し，xy 平面上の点

$$\mathrm{O}(0,\ 0),\quad \mathrm{P}(1,\ 1),\quad \mathrm{Q}\left(t,\ \frac{1}{t}\right)$$

を頂点とする三角形の面積を $a(t)$ とし，線分 OP，OQ と双曲線 $xy=1$ とで囲まれた部分の面積を $b(t)$ とする．このとき

$$c(t)=\frac{b(t)}{a(t)}$$

とおくと，関数 $c(t)$ は $t>1$ においてつねに減少することを示せ．

$\boxed{4}$ 複素数平面上の点 a_1，$a_2, \cdots, a_n, \cdots$ を

$$\begin{cases} a_1=1,\ a_2=i, \\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n \quad (n=1,2,\cdots) \end{cases}$$

により定め

$$b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n} \quad (n=1,2,\cdots)$$

とおく．ただし，i は虚数単位である．

(1) 3 点 b_1，b_2，b_3 を通る円 C の中心と半径を求めよ．

(2) すべての点 b_n $(n=1,2,\cdots)$ は円 C の周上にあることを示せ．

5 容量1リットルの m 個のビーカー(ガラス容器)に水が入っている．$m \geqq 4$ で空(から)のビーカーは無い．入っている水の総量は1リットルである．また x リットルの水が入っているビーカーがただ一つあり，その他のビーカーには x リットル未満の水しか入っていない．

このとき，水の入っているビーカーが2個になるまで，次の(a)から(c)までの操作を，順に繰り返し行う．

(a) 入っている水の量が最も少ないビーカーを一つ選ぶ．

(b) さらに，残りのビーカーの中から，入っている水の量が最も少ないものを一つ選ぶ．

(c) 次に，(a)で選んだビーカーの水を(b)で選んだビーカーにすべて移し，空になったビーカーを取り除く．

この操作の過程で，入っている水の量が最も少ないビーカーの選び方が一通りに決まらないときは，そのうちのいずれも選ばれる可能性があるものとする．

(1) $x < \dfrac{1}{3}$ のとき，最初に x リットルの水が入ったビーカーは，操作の途中で空になって取り除かれるか，または最後まで残って水の量が増えていることを証明せよ．

(2) $x > \dfrac{2}{5}$ のとき，最初に x リットルの水の入ったビーカーは，最後まで x リットルの水が入ったままで残ることを証明せよ．

6 コインを投げる試行の結果によって，数直線上にある 2 点 A，B を次のように動かす.

表が出た場合： 点 A の座標が点 B の座標より大きいときは，A と B を共に正の方向に 1 動かす．そうでないときは，A のみ正の方向に 1 動かす.

裏が出た場合： 点 B の座標が点 A の座標より大きいときは，A と B を共に正の方向に 1 動かす．そうでないときは，B のみ正の方向に 1 動かす.

最初 2 点 A，B は原点にあるものとし，上記の試行を n 回繰り返して A と B を動かしていった結果，A，B の到達した座標をそれぞれ $a,\ b$ とする.

(1) n 回コインを投げたときの表裏の出方の場合の数 2^n 通りのうち，$a=b$ となる場合の数を X_n とおく．X_{n+1} と X_n の間の関係式を求めよ.

(2) X_n を求めよ.

(3) n 回コインを投げたときの表裏の出方の場合の数 2^n 通りについての a の値の平均を求めよ.

解答例

$\boxed{1}$ 2辺CD，ABの中点をそれぞれM，Nとし，球の中心をOとする．

BC = BDより　△BCM ≡ △BDM，　AC = ADより　△ACM ≡ △ADM

ゆえに，平面ABMは辺CDの垂直二等分面で，Oはこの平面上にある．

AC = BCより　△ACN ≡ △BCN，　AD = BDより　△ADN ≡ △BDN

ゆえに，平面CDNは辺ABの垂直二等分面で，Oはこの平面上にある．

したがって，Oは平面ABMと平面CDNの交線MN上にある．

また，OB = OC = ODであるから，Oから平面BCDに垂線OHを引くと

$$\triangle\mathrm{OBH} \equiv \triangle\mathrm{OCH} \equiv \triangle\mathrm{ODH}\quad\text{ゆえに}\quad \mathrm{H}\text{は}\triangle\mathrm{BCD}\text{の外心}$$

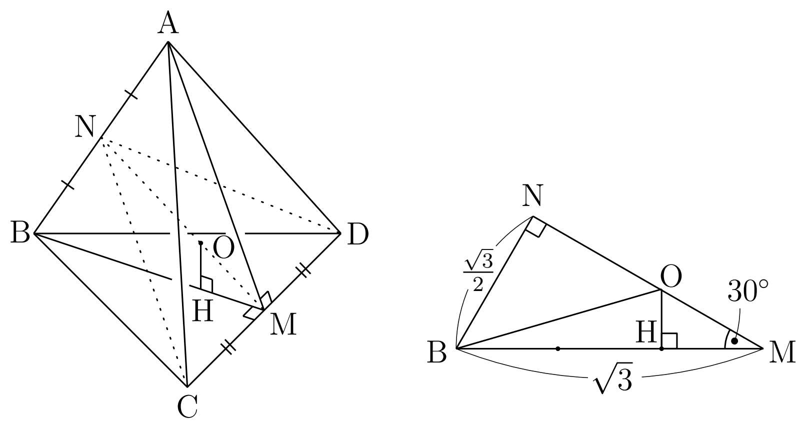
BC = BD = CD = 2より，△BCDは正三角形であるから，Hはその重心で，Hは BMを2 : 1に内分する．

$$\mathrm{BH} = \frac{2}{3}\mathrm{BM} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

$\mathrm{AB} = \mathrm{AM} = \mathrm{BM} = \sqrt{3}$であるから，△ABMは正三角形で，$\angle\mathrm{BMN} = 30^\circ$

$$\mathrm{OH} = \mathrm{MH}\tan 30^\circ = \frac{1}{3}\mathrm{BM}\tan 30^\circ = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$

よって　$$r = \mathrm{OB} = \sqrt{\mathrm{BH}^2 + \mathrm{OH}^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{13}}{3}}$$



■

$\boxed{\mathbf{2}}$ まず，定数 $M,\ N$ を

$$M=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(y)\cos y\,dy,\quad N=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(y)\sin y\,dy$$

とおくと，与えられた等式は

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(x+y)f(y)\,dy+\frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(x-y)f(y)\,dy\\&\quad+\sin x+\cos x\\&=a(M\sin x+N\cos x)+b(M\cos x+N\sin x)+\sin x+\cos x\\&=(aM+bN+1)\sin x+(aN+bM+1)\cos x\end{aligned}\qquad(*)$$

ここで
$$\int_0^{2\pi}\sin^2 x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2x)\,dx=\frac{1}{2}\Big[\,x-\frac{1}{2}\sin 2x\,\Big]_0^{2\pi}=\pi,$$
$$\int_0^{2\pi}\cos^2 x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2x)\,dx=\frac{1}{2}\Big[\,x+\frac{1}{2}\sin 2x\,\Big]_0^{2\pi}=\pi,$$
$$\int_0^{2\pi}\sin x\cos x\,dx=\frac{1}{2}\Big[\,\sin^2 x\,\Big]_0^{2\pi}=0$$

したがって

$$\begin{aligned}M&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(y)\cos y\,dy\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{(aM+bN+1)\sin y+(aN+bM+1)\cos y\}\cos y\,dy\\&=\frac{1}{2}(aN+bM+1),\\N&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(y)\sin y\,dy\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{(aM+bN+1)\sin y+(aN+bM+1)\cos y\}\sin y\,dy\\&=\frac{1}{2}(aM+bN+1)\end{aligned}$$

上の 2 式から　$(b-2)M+aN=-1,\quad aM+(b-2)N=-1$

整理すると　$\{(b-2)^2-a^2\}M=\{(b-2)^2-a^2\}N=a-b+2$

よって，求める条件は　$(b-2)^2-a^2\neq 0$　すなわち　$\boldsymbol{|a|\neq|b-2|}$

条件を満たすとき

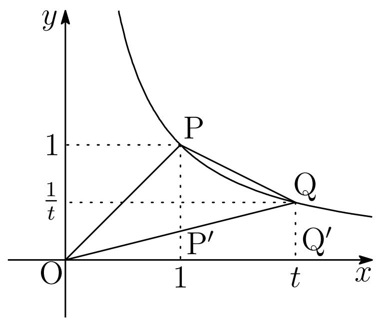
$$M=N=\frac{a-b+2}{(b-2)^2-a^2}=\frac{-(b-2-a)}{(b-2+a)(b-2-a)}=\frac{1}{2-a-b}$$

このとき，$(*)$ の係数について

$$aM + bN + 1 = aN + bM + 1 = \frac{a}{2-a-b} + \frac{b}{2-a-b} + 1 = \frac{2}{2-a-b}$$

よって　　$\boldsymbol{f(x) = \dfrac{2}{2-a-b}(\sin x + \cos x)}$ ■

3 O$(0,\ 0)$，P$(1,\ 1)$，Q$\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)$ を頂点する △OPQ の面積 $a(t)$ は $(t > 1)$



$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{1}{2}\left|1\cdot\frac{1}{t} - 1\cdot t\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|\frac{1}{t} - t\right| = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right) \end{aligned}$$

線分 OP，OQ と双曲線 $y = \dfrac{1}{x}$ とで囲まれた部分の面積 $b(t)$ は

$$\begin{aligned} b(t) &= \triangle\mathrm{OPP'} + \int_1^t \frac{dx}{x} - \triangle\mathrm{OQQ'} \\ &= \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 + \Big[\ \log x\ \Big]_1^t - \frac{1}{2}\cdot t\cdot\frac{1}{t} = \log t \end{aligned}$$

$c(t) = \dfrac{b(t)}{a(t)}$ より　$c'(t) = \dfrac{b'(t)a(t) - b(t)a'(t)}{a(t)^2}$　$\cdots(*)$

$$\begin{aligned} b'(t)a(t) - b(t)a'(t) &= \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right) - (\log t)\cdot\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \\ &= \frac{1}{2t^2}\left\{(t^2-1) - (t^2+1)\log t\right\} \\ &= \frac{t^2+1}{2t^2}\left(\frac{t^2-1}{t^2+1} - \log t\right) \quad \cdots(**) \end{aligned}$$

$f(t) = \dfrac{t^2-1}{t^2+1} - \log t = 1 - \dfrac{2}{t^2+1} - \log t$ とおくと

$$f'(t) = \frac{4t}{(t^2+1)^2} - \frac{1}{t} = \frac{4t^2 - (t^2+1)^2}{t(t^2+1)^2} = -\frac{(t+1)^2(t-1)^2}{(t^2+1)^2}$$

$f(1) = 0$，$t > 1$ のとき $f'(t) < 0$ であるから，$t > 1$ で　$f(t) < 0$

$(*)$，$(**)$ より，$t > 1$ で $c'(t) < 0$，すなわち，$c(t)$ は単調減少である． ■

4 (1) 与えられた漸化式より　$a_1=1,\ a_2=i,\ a_3=1+i,\ a_4=1+2i$

$$b_1=\frac{a_2}{a_1}=i,\quad b_2=\frac{a_3}{a_2}=\frac{1+i}{i}=1-i,\quad b_3=\frac{a_4}{a_3}=\frac{1+2i}{1+i}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$$

円 C の中心を $x+yi$ とおくと ($x,\ y$ は実数)

$$|x+yi-i|=|x+yi-(1-i)|=\left|x+yi-\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i\right)\right|$$

$$|x+(y-1)i|=|(x-1)+(y+1)i|=\left|\left(x-\frac{3}{2}\right)+\left(y-\frac{1}{2}\right)i\right|$$

したがって

$$x^2+(y-1)^2=(x-1)^2+(y+1)^2=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$-2y+1=-2x+2y+2=-3x-y+\frac{5}{2}$$

これを解いて　　$x=\frac{1}{2},\ y=0$

よって　C の中心は $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$，半径は　$\left|\frac{1}{2}-i\right|=\boldsymbol{\frac{\sqrt{5}}{2}}$

(2) 与えられた漸化式から

$$b_{n+1}=\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}+a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{1}{b_n} \qquad (*)$$

b_n が C 上にあることを数学的帰納法で示す．

[1] $n=1$ のとき，b_1 は (1) で示したとおり，C 上の点である．

[2] $n=k$ のとき，b_k が C の点であるとき　$\left|b_k-\frac{1}{2}\right|=\frac{\sqrt{5}}{2}$

$(*)$ より，$b_k=\dfrac{1}{b_{k+1}-1}$ であるから，これを上式に代入すると

$$\left|\frac{1}{b_{k+1}-1}-\frac{1}{2}\right|=\frac{\sqrt{5}}{2}\quad ゆえに\quad |3-b_{k+1}|=\sqrt{5}|b_{k+1}-1|$$

したがって　$9-3(b_{k+1}+\overline{b_{k+1}})+|b_{k+1}|^2=5(|b_{k+1}|^2-b_{k+1}-\overline{b_{k+1}}+1)$

整理すると　$4|b_{k+1}|^2-2(b_{k+1}+\overline{b_{k+1}})=4$　ゆえに　$\left|b_{k+1}-\frac{1}{2}\right|=\frac{\sqrt{5}}{2}$

したがって，b_{k+1} は C 上の点である．

よって，すべての点 b_n $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ は円 C の周上にある．

別解 漸化式 $(*)$ の特性方程式は

$$x = 1 + \frac{1}{x} \quad \text{ゆえに} \quad x^2 - x - 1 = 0$$

この 2 次方程式の 2 つ解を $\alpha,\ \beta$ とすると $(\alpha > \beta)$

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$b_{n+1} = 1 + \frac{1}{b_n}, \quad \alpha = 1 + \frac{1}{\alpha}$$

ゆえに $\quad b_{n+1} - \alpha = \dfrac{1}{b_n} - \dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{\alpha - b_n}{\alpha b_n}$ 　 同様に $\quad b_{n+1} - \beta = \dfrac{\beta - b_n}{\beta b_n}$

したがって $\quad \dfrac{\alpha - b_{n+1}}{\beta - b_{n+1}} = \dfrac{\beta}{\alpha} \cdot \dfrac{\alpha - b_n}{\beta - b_n} \quad \cdots (**)$

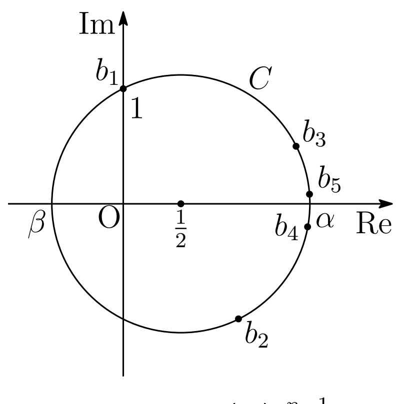
$$\arg \frac{\alpha - b_{n+1}}{\beta - b_{n+1}} = \arg \frac{\beta}{\alpha} + \arg \frac{\alpha - b_n}{\beta - b_n}$$

C は 2 点 $\alpha,\ \beta$ を直径の両端とする円であるから $\quad \arg \dfrac{\alpha - b_1}{\beta - b_1} = \dfrac{\pi}{2}$

$\dfrac{\beta}{\alpha}$ は負の実数であるから $\quad \arg \dfrac{\beta}{\alpha} = \pi$

$$\arg \frac{\alpha - b_n}{\beta - b_n} = \frac{\pi}{2} + (n-1)\pi$$

よって，b_n は，2 点 $\alpha,\ \beta$ を直径の両端とする円 C の周上にある．



補足 また，$(**)$ より $\quad \dfrac{\alpha - b_n}{\beta - b_n} = \dfrac{\alpha - b_1}{\beta - b_1} \left(\dfrac{\beta}{\alpha} \right)^{n-1}$

$$\left| \frac{\beta}{\alpha} \right| < 1 \quad \text{ゆえに} \quad \lim_{n \to \infty} b_n = \alpha$$

なお，b_n の極限が c に収束するとき，c は特性方程式の解である． ■

5 (1) (背理法を用いる)

x リットルの水が入ったビーカーを X とする．X は操作の途中で空にもならず水の量が増えることもない，すなわち，最後まで X は操作されることがないと仮定する．水の入ったビーカーが 3 個残っている時点で，X 以外の 2 つビーカーが操作の対象となり，これら 2 つのビーカーに入っている水の量はともに x リットル以下である．このとき，3 個ビーカーに入っている水の総量は $3x$ リットル以下である．$x < \dfrac{1}{3}$ のとき，$3x < 1$ となり，水の総量が 1 リットル未満となり，矛盾．

(2) (背理法を用いる)

水が入っているビーカーの個数が k である状態を S_k とし，途中 X が操作の対象となると仮定する．

$S_k(k \geqq 4)$ で，X が操作の対象となるとき，x リットル以上入っているビーカーが，X 以外に少なくとも 2 つあり，これら 2 つと X を含めた水の量は $3x$ リットル以上となる．$x > \dfrac{2}{5}$ のとき，$3x > \dfrac{6}{5} > 1$ となり，矛盾．

これから，X が操作の対象となるのは，S_3 の状態に限る．

このとき，X 以外の残り 2 個のビーカーを Y，Z とし，それぞれ y リットル，z リットルの水が入っていて，一般性を失うことなく $y \leqq z$ とする．

S_3 で X が操作の対象となるのは，次の (i)，(ii) の場合である．

(i) $x \leqq y \leqq z$ の場合

$$x > \frac{2}{5} \text{のとき} \quad x + y + z \geqq 3x > \frac{6}{5} > 1 \quad \text{ゆえに} \quad \text{矛盾}$$

(ii) $y \leqq x \leqq z$ の場合

$x > \dfrac{2}{5}$ による仮定は，$z \geqq x > \dfrac{2}{5}$ より，Z についても適用される．
すなわち，Z も操作の対象であり，S_4 の状態で

$$z = z_1 + z_2, \quad z_1 \leqq z_2 \leqq y \leqq x \leqq z$$

の操作が行われている．このとき

$$x \leqq z = z_1 + z_2 \leqq 2z_2 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{x}{2} \leqq z_2 \leqq y, \quad x \leqq z$$

$$x > \frac{2}{5} \text{のとき} \quad y + x + z \geqq \frac{5}{2}x > 1 \quad \text{ゆえに} \quad \text{矛盾．}$$

(i)，(ii) より，本命題は成立する． ■

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) n 回コインを投げたとき，$a > b$ となる場合の数を A_n，$a < b$ となる場合の数を B_n とする．ルールにより

$$\text{表}\begin{cases} a > b & \cdots \quad \text{両方} + 1 \\ a \leqq b & \cdots \ a\text{だけ} + 1 \end{cases} \qquad \text{裏}\begin{cases} b > a & \cdots \quad \text{両方} + 1 \\ b \leqq a & \cdots \ b\text{だけ} + 1 \end{cases}$$

したがって，n 回コインを投げた時点で

$$a = b + 1, \quad a = b, \quad a = b - 1$$

のいずれかであり，それぞれの場合の個数を A_n，X_n，B_n とする．
このとき，次の漸化式が成立する．

$$(*)\begin{cases} X_1 = 0,\ A_1 = 1,\ B_1 = 1, \\ X_{n+1} = A_n + B_n, \\ A_{n+1} = A_n + X_n, \\ B_{n+1} = B_n + X_n \end{cases}$$

$X_n + A_n + B_n = 2^n$ より，$(*)$ の第 3 式と第 4 式の辺々を加えると

$$A_{n+1} + B_{n+1} = X_n + (X_n + A_n + B_n)$$

ゆえに　$2^{n+1} - X_{n+1} = X_n + 2^n$　よって　$\boldsymbol{X_{n+1} = 2^n - X_n}$

(2) (1) の結果から　$X_{n+1} - \dfrac{2^{n+1}}{3} = -\left(X_n - \dfrac{2^n}{3}\right)$

ゆえに　$X_n - \dfrac{2^n}{3} = (-1)^{n-1}\left(X_1 - \dfrac{2}{3}\right)$　よって　$\boldsymbol{X_n = \dfrac{2^n}{3} + \dfrac{2}{3}(-1)^n}$

別解 $X_n = (-1)^n x_n$ とおくと　$x_1 = 0$,　$x_{n+1} - x_n = -(-2)^n$

$n > 1$ のとき　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(x_{k+1} - x_x) = -\sum_{k=1}^{n-1}(-2)^k$

したがって　$x_n = \dfrac{2\{1 - (-2)^{n-1}\}}{1 - (-2)} = \dfrac{1}{3}\{2 + (-2)^n\}$

上式は，$n = 1$ のときも成立するから　$X_n = \dfrac{1}{3}\{2(-1)^n + 2^n\}$

(3) $(*)$ の第 3 式と第 4 式の差をとると　$A_{n+1}-B_{n+1}=A_n-B_n$
$A_1-B_1=0$ より，$A_n=B_n$ であるから，これを $(*)$ の第 2 式に代入して

$$A_n=B_n=\frac{1}{2}X_{n+1}=\frac{1}{2}\left\{\frac{2^{n+1}}{3}+\frac{2}{3}(-1)^{n+1}\right\}=\frac{2^n}{3}-\frac{1}{3}(-1)^n$$

k 回目の試行において，a の目が増える期待値を $E(k)$ とすると

$$\begin{aligned}E(k)&=\frac{X^k}{2^k}\left(1\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}\right)+\frac{A_k}{2^k}\left(1\cdot\frac{1}{2}+0\cdot\frac{1}{2}\right)+\frac{B_k}{2^k}\left(0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}\right)\\&=\frac{1}{2^k}\left(X_k+\frac{1}{2}A_k+\frac{1}{2}B_k\right)\\&=\frac{1}{2^k}\left\{\frac{2^{k+1}}{3}+\frac{1}{3}(-1)^k\right\}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^k\end{aligned}$$

よって，求める a の値の平均は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}E(k)&=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^k\right\}\\&=\frac{2}{3}n-\frac{1}{6}\cdot\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}\\&=\boldsymbol{\frac{2}{3}n-\frac{1}{9}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}}\end{aligned}$$

■