令和６年度　東京大学２次試験前期日程 (数学問題)100 分
文科 (一類，二類，三類)　数 I・II・A・B

問題 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$

$\boxed{\mathbf{1}}$ 座標平面上で，放物線 $C: y = ax^2+bx+c$ が 2 点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{Q}(-\cos\theta,\ \sin\theta)$ を通り，点 P と点 Q のそれぞれにおいて円 $x^2+y^2=1$ と共通の接線を持っている．ただし，$0^\circ < \theta < 90^\circ$ とする．

(1) $a,\ b,\ c$ を $s = \sin\theta$ を用いて表せ．

(2) 放物線 C と x 軸で囲まれた図形の面積 A を s を用いて表せ．

(3) $A \geqq \sqrt{3}$ を示せ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 以下の問いに答えよ．必要ならば，$0.3 < \log_{10} 2 < 0.31$ であることを用いてよい．

(1) $5^n > 10^{19}$ となる最小の自然数 n を求めよ．

(2) $5^m + 4^m > 10^{19}$ となる最小の自然数 m を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 座標平面上に 2 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(0,\ 1)$ となる．x 軸上の 2 点 $\mathrm{P}(p,\ 0)$，$\mathrm{Q}(q,\ 0)$ が，次の条件 (i)，(ii) をともに満たすとする．

(i) $0 < p < 1$ かつ $p < q$

(ii) 線分 AP の中点を M とするとき，$\angle\mathrm{OAP} = \angle\mathrm{PMQ}$

(1) q を p を用いて表せ．

(2) $q = \dfrac{1}{3}$ となる p の値を求めよ．

(3) $\triangle\mathrm{OAP}$ の面積を S，$\triangle\mathrm{PMQ}$ の面積を T とする．$S > T$ となる p の範囲を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ n を 5 以上の奇数とする．平面上の点 O を中心とする円をとり，それに内接する正 n 角形を考える．n 個の頂点から異なる 4 点を同時に選ぶ．ただし，どの 4 点も等確率で選ばれるものとする．選んだ 4 点を頂点とする四角形が O を内部に含む確率 p_n を求めよ．

解答例

1 (1) 2 点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{Q}(-\cos\theta,\ \sin\theta)$ は $C : y = ax^2 + bx + c$ 上の点であるから $(0^\circ < \theta < 90^\circ)$

$$\sin\theta = a(\pm\cos\theta)^2 + b(\pm\cos\theta) + c$$

したがって　$b = 0,\quad \sin\theta = a\cos^2\theta + c \quad \cdots ①$

$f(x) = ax^2 + c$ とおくと　　$f'(x) = 2ax$

$\vec{v} = (1,\ f'(\cos\theta))$ とすると，$\vec{v}\perp\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ であるから，$\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} = 0$ より

$$1\cdot\cos\theta + (2a\cos\theta)\cdot\sin\theta = 0 \quad ゆえに \quad a = -\frac{1}{2\sin\theta} \quad \cdots ②$$

② を ① に代入すると

$$\sin\theta = -\frac{\cos^2\theta}{2\sin\theta} + c \quad ゆえに \quad c = \frac{2\sin^2\theta + \cos^2\theta}{2\sin\theta} = \frac{\sin^2\theta + 1}{2\sin\theta}$$

$s = \sin\theta$ より　　$\boldsymbol{a = -\dfrac{1}{2s},\quad b = 0,\quad c = \dfrac{s^2+1}{2s}}$

(2) (1) の結果から，曲線 C の方程式は $(0 < s < 1)$

$$y = -\frac{1}{2s}x^2 + \frac{s^2+1}{2s} = -\frac{1}{2s}(x + \sqrt{s^2+1})(x - \sqrt{s^2+1})$$

よって，求める図形の面積 A は

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{2s}\int_{-\sqrt{s^2+1}}^{\sqrt{s^2+1}}(x + \sqrt{s^2+1})(x - \sqrt{s^2+1})\,dx \\ &= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2s}(2\sqrt{s^2+1})^3 = \boldsymbol{\frac{2}{3s}(s^2+1)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から，相加平均・相乗平均の大小関係により [1]

$$\begin{aligned} A &= \frac{2}{3}\left(\frac{s^2+1}{s^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\left(s^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{s^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\left(s^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{2s^{\frac{2}{3}}} + \frac{1}{2s^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}} \\ &\geqq \frac{2}{3}\left(3\sqrt[3]{s^{\frac{4}{3}}\cdot\frac{1}{2s^{\frac{2}{3}}}\cdot\frac{1}{2s^{\frac{2}{3}}}}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\cdot 3^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

上式において等号が成立するのは　$s^{\frac{4}{3}} = \dfrac{1}{2s^{\frac{2}{3}}}$　すなわち　$s = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/2022/sigaidai_2022.pdf $\boxed{3}$

2 (1) $5^n > 10^{19}$ より　$\log_{10} 5^n > 19$

$$n(1 - \log_{10} 2) > 19 \quad \text{これを解いて} \quad n > \frac{19}{1 - \log_{10} 2} \quad \cdots ①$$

$\dfrac{3}{10} < \log_{10} 2 < \dfrac{31}{100}$ より，$\dfrac{69}{100} < 1 - \log_{10} 2 < \dfrac{7}{10}$ であるから

$$27\frac{1}{7} = \frac{190}{7} < \frac{19}{1 - \log_{10} 2} < \frac{1900}{69} = 27\frac{37}{69}$$

したがって，① を満たす最小の自然数 n は　$\boldsymbol{n = 28}$

(2) 数列 $\{5^m + 4^m\}$ は単調増加列であるから，(1) の結果から，$5^m + 4^m > 10^{19}$ を満たす最小の自然数 m は，28 以下である．

$\log_{10} 5 = 1 - \log_{10} 2 < 0.7$，$0.3 < \log_{10} 2$ より

$$\begin{aligned}
\log_{10} 5^{27} &= 27 \log_{10} 5 < 27 \times 0.7 = 18.9 = 18 + 3 \times 0.3 \\
&< \log_{10} 10^{18} + 3 \log_{10} 2 = \log_{10}(8 \times 10^{18}), \\
\log_{10} 4^{27} &= 27 \log_{10} 4 < 27 \times 0.62 = 16.74 < \log_{10} 10^{17}
\end{aligned}$$

$5^{27} < 8 \times 10^{18}$，$4^{27} < 10^{17}$ であるから

$$5^{27} + 4^{27} < 8 \times 10^{18} + 10^{17} = 8.1 \times 10^{18} < 10^{19}$$

よって，求める最小の自然数 m は　$\boldsymbol{m = 28}$　■

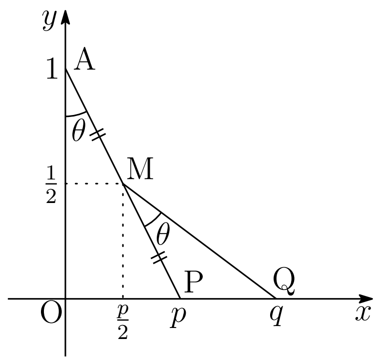
$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\angle\mathrm{OAP} = \theta$ とおくと $(0 < \theta < \frac{\pi}{4})$，$\tan\theta = p$ より

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{2p}{1-p^2}$$

上式から直線 MQ の傾きは

$$-\tan\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) = -\frac{1}{\tan 2\theta} = -\frac{1-p^2}{2p}$$

点 $\mathrm{M}\left(\frac{p}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ を通る直線 MQ の方程式は



$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1-p^2}{2p}\left(x - \frac{p}{2}\right)$$

この直線が点 $\mathrm{Q}(q,\ 0)$ を通るから

$$-\frac{1}{2} = -\frac{1-p^2}{2p}\left(q - \frac{p}{2}\right)$$

q について解くと $\quad \boldsymbol{q = \dfrac{p(3-p^2)}{2(1-p^2)}}$

(2) (1) の結果に $q = \dfrac{1}{3}$ を代入すると

$$\frac{1}{3} = \frac{p(3-p^2)}{2(1-p^2)} \quad \text{整理すると} \quad 3p^3 - 2p^2 - 9p + 2 = 0$$

したがって $\quad (p-2)(3p^2+4p-1) = 0$

$0 < p < q = \dfrac{1}{3}$ に注意して，これを解くと $\quad \boldsymbol{p = \dfrac{-2+\sqrt{7}}{3}}$

(3) (1) の結果により

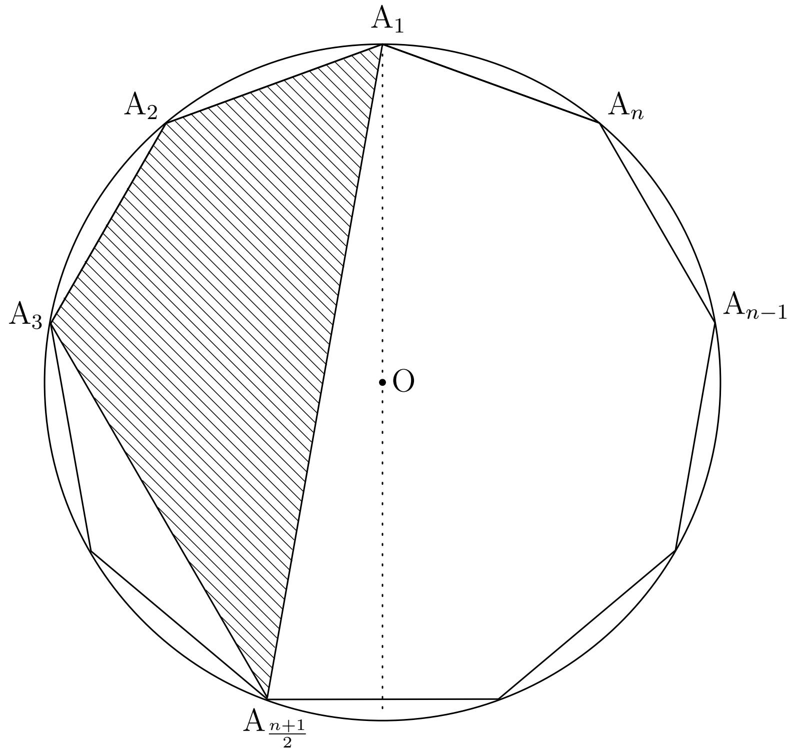
$$S = \triangle\mathrm{OAP} = \frac{1}{2}\cdot p\cdot 1 = \frac{p}{2}$$

$$\begin{aligned} T = \triangle\mathrm{PMQ} &= \frac{1}{2}(q-p)\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}(q-p) \\ &= \frac{1}{4}\left\{\frac{p(3-p^2)}{2(1-p^2)} - p\right\} = \frac{p(p^2+1)}{8(1-p^2)} \end{aligned}$$

$S > T$ より $(0 < p < 1)$ $\quad \dfrac{p}{2} > \dfrac{p(p^2+1)}{8(1-p^2)} \quad$ ゆえに $\quad 5p^2 < 3$

よって $\quad \boldsymbol{0 < p < \dfrac{\sqrt{15}}{5}}$ ■

$\boxed{4}$ n 個の頂点を反時計回りに $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \cdots, \mathrm{A}_n$ をとる (n は 5 以上の奇数)．
2 点 $\mathrm{A}_\ell, \mathrm{A}_m$ について，$\ell \equiv m \pmod{n}$ のとき，これらの 2 点は同一の点する．



$i < j < k < l \leqq i + \frac{n-1}{2}$ とし，点 A_i に対して 3 点 $\mathrm{A}_j, \mathrm{A}_k, \mathrm{A}_l$ をとると，四角形 $\mathrm{A}_i\mathrm{A}_j\mathrm{A}_k\mathrm{A}_l$ は ($n \geqq 7$)，その内部に O を含まない．i の選び方 n 通りに対して，3 点 $\mathrm{A}_j, \mathrm{A}_k, \mathrm{A}_l$ の選び方が ${}_{\frac{n-1}{2}}\mathrm{C}_3$ 通りあるから

$$1 - p_n = n \times {}_{\frac{n-1}{2}}\mathrm{C}_3 \,/\, {}_n\mathrm{C}_4$$

したがって

$$\begin{aligned} p_n &= 1 - n \times {}_{\frac{n-1}{2}}\mathrm{C}_3 \,/\, {}_n\mathrm{C}_4 \\ &= 1 - n \times \frac{\frac{n-1}{2}\left(\frac{n-1}{2} - 1\right)\left(\frac{n-1}{2} - 2\right)}{3\cdot2\cdot1} \times \frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{n(n-1)(n-2)(n-3)} \\ &= \frac{n+1}{2(n-2)} \end{aligned}$$

$p_5 = 1$ であるから，上式は $n = 5$ のときも成立する．

よって　　$\boldsymbol{p_n = \dfrac{n+1}{2(n-2)}}$

補足 例えば，上の図で A_1 を除く点線の左右には $\dfrac{n-1}{2}$ 個ずつ頂点が存在する．■