令和５年度　東京大学２次試験前期日程 (数学問題)100 分
文科 (一類，二類，三類)　数 I・II・A・B

問題 1 2 3 4

1 k を正の実数とし，2 次方程式 $x^2+x-k=0$ の 2 つの実数解を $\alpha,\ \beta$ とする．k が $k>2$ の範囲を動くとき，

$$\frac{\alpha^3}{1-\beta}+\frac{\beta^3}{1-\alpha}$$

の最小値を求めよ．

2 座標平面上の放物線 $y=3x^2-4x$ を C とおき，直線 $y=2x$ を ℓ とおく．実数 t に対して，C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ 3t^2-4t)$ と ℓ の距離を $f(t)$ とする．

(1) $-1 \leqq a \leqq 2$ の範囲の実数 a に対し，定積分

$$g(a)=\int_{-1}^{a} f(t)\,dt$$

を求めよ．

(2) a が $0 \leqq a \leqq 2$ の範囲を動くとき，$g(a)-f(a)$ の最大値および最小値を求めよ．

3 黒玉 3 個，赤玉 4 個，白玉 5 個が入っている袋から玉を 1 個ずつ取り出し，取り出した玉を順に横一列に 12 個すべて並べる．ただし，袋から個々の玉が取り出される確率は等しいものとする．

(1) どの赤玉も隣り合わない確率 p を求めよ．

(2) どの赤玉も隣り合わないとき，どの黒玉も隣り合わない条件付き確率 q を求めよ．

4 半径 1 の球面上の相異なる 4 点 A，B，C，D が

$$\mathrm{AB}=1,\quad \mathrm{AC}=\mathrm{BC},\quad \mathrm{AD}=\mathrm{BD},\quad \cos\angle\mathrm{ACB}=\cos\angle\mathrm{ADB}=\frac{4}{5}$$

を満たしているとする．

(1) 三角形 ABC の面積を求めよ．

(2) 四面体 ABCD の体積を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ 2 次方程式 $x^2+x-k=0$ の解が $\alpha,\ \beta$ であるから，解との係数の関係により

$$\alpha+\beta=-1\ (\beta=-1-\alpha),\quad \alpha\beta=-k$$

また，$\alpha^2+\alpha-k=0$ より，$\alpha^2=k-\alpha$ であるから

$$\begin{aligned}\frac{\alpha^3}{1-\beta}&=\frac{\alpha^3}{1-(-1-\alpha)}=\frac{\alpha^3+8}{\alpha+2}-\frac{8}{\alpha+2}\\&=\alpha^2-2\alpha+4-\frac{8}{\alpha+2}\\&=(k-\alpha)-2\alpha+4-\frac{8}{\alpha+2}\\&=k+4-3\alpha-\frac{8}{\alpha+2}\end{aligned}$$

α と β の対称性から

$$\begin{aligned}\frac{\alpha^3}{1-\beta}+\frac{\beta^3}{1-\alpha}&=2(k+4)-3(\alpha+\beta)-8\left(\frac{1}{\alpha+2}+\frac{1}{\beta+2}\right)\\&=2(k+4)-3\cdot(-1)-\frac{8(\alpha+\beta+4)}{\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4}\\&=2k+11-\frac{8(-1+4)}{-k+2(-1)+4}\\&=15+2\left(k-2+\frac{12}{k-2}\right)\end{aligned}$$

$k>2$ より，2 正数 $k-2,\ \dfrac{12}{k-2}$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$k-2+\frac{12}{k-2}\geqq 2\sqrt{(k-2)\cdot\frac{12}{k-2}}=4\sqrt{3}$$

したがって　$\dfrac{\alpha^3}{1-\beta}+\dfrac{\beta^3}{1-\alpha}\geqq 15+8\sqrt{3}$

上式において，等号が成立するのは

$$k-2=\frac{12}{k-2}\quad すなわち\quad k=2+2\sqrt{3}$$

よって，求める最小値は　$\mathbf{15+8\sqrt{3}}$　■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 点 $\mathrm{P}(t,\ 3t^2-4t)$ と直線 $\ell : -2x+y=0$ との距離 $f(t)$ は

$$f(t)=\frac{|-2t+(3t^2-4t)|}{\sqrt{(-2)^2+1^2}}=\frac{|3t^2-6t|}{\sqrt{5}}$$

(i) $-1 \leqq a \leqq 0$ のとき

$$\begin{aligned} g(a) &= \int_{-1}^{a} f(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{5}}\int_{-1}^{a}(3t^2-6t)\,dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\Big[\,t^3-3t^2\,\Big]_{-1}^{a} = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{5}}(a^3-3a^2+4)} \end{aligned}$$

(ii) $0 \leqq a \leqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} g(a) &= \int_{-1}^{a} f(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{5}}\int_{-1}^{0}(3t^2-6t)\,dt - \frac{1}{\sqrt{5}}\int_{0}^{a}(3t^2-6t)\,dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\Big[\,t^3-3t^2\,\Big]_{-1}^{0} - \frac{1}{\sqrt{5}}\Big[\,t^3-3t^2\,\Big]_{0}^{a} \\ &= \boldsymbol{-\frac{1}{\sqrt{5}}(a^3-3a^2-4)} \end{aligned}$$

(2) $0 \leqq a \leqq 2$ のとき　$f(a) = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}(3a^2-6a)$

上式および (ii) の結果から

$$\begin{aligned} g(a)-f(a) &= -\frac{1}{\sqrt{5}}(a^3-3a^2-4)+\frac{1}{\sqrt{5}}(3a^2-6a) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(-a^3+6a^2-6a+4) \end{aligned}$$

$h(a)=-a^3+6a^2-6a+4$ とおくと　$h'(a)=-3(a^2-4a+2)$

$h'(a)=0$ とすると　$a=2\pm\sqrt{2}$

a	0	$\cdots$	$2-\sqrt{2}$	$\cdots$	2
$h'(a)$		$-$	0	$+$	
$h(a)$	4	$\searrow$	最小	$\nearrow$	8

$h(a)=\dfrac{1}{3}(a-2)h'(a)+4a$ より　$h(2-\sqrt{2})=4(2-\sqrt{2})$

よって　最大値 $\dfrac{1}{\sqrt{5}}h(2)=\boldsymbol{\dfrac{8}{\sqrt{5}}}$，最小値 $\dfrac{1}{\sqrt{5}}h(2-\sqrt{2})=\boldsymbol{\dfrac{4(2-\sqrt{2})}{\sqrt{5}}}$ ■

3 (1) 黒玉 3 個，赤玉 4 個，白玉 5 個の 12 個の玉の並べ方の総数を N とすると

$$N = \frac{12!}{3!4!5!} \quad (\text{通り})$$

黒玉 3 個と，白玉 5 個の 8 個を並べ，その 8 個の玉の両側と間の 9 カ所に赤玉 4 個を並べる場合の総数を A とすると

$$A = \frac{8!}{3!5!} \times \frac{9!}{4!5!} = \frac{8!9!}{3!4!5!5!} \quad (\text{通り})$$

よって，求める確率 p は

$$p = \frac{A}{N} = \frac{8!9!}{3!4!5!5!} \Big/ \frac{12!}{3!4!5!} = \frac{8!}{5!} \cdot \frac{9!}{12!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{12 \cdot 11 \cdot 10} = \mathbf{\frac{14}{55}}$$

(2) 黒玉 3 個のうち 2 個をひとまとめにして，$\boxed{\text{黒黒}}$，黒玉 1 個，白玉 5 個を並べ，その 7 個の両側と間の 8 カ所に赤玉 4 個を並べる場合の総数を B とすると

$$B = \frac{7!}{1!1!5!} \times \frac{8!}{4!4!} = \frac{7!8!}{4!4!5!} \quad (\text{通り})$$

この中には，$\boxed{\text{黒黒}}$黒，または，黒$\boxed{\text{黒黒}}$のように，連続して並ぶ黒玉 3 個が重複する場合がある．黒玉 3 個をひとまとめにして，$\boxed{\text{黒黒黒}}$，白玉 5 個を並べ，その 6 個の両側と間の 7 カ所に赤玉 4 個を並べる場合の総数を C とすると

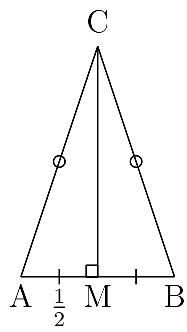
$$C = \frac{6!}{1!5!} \times \frac{7!}{4!3!} = \frac{6!7!}{3!4!5!} \quad (\text{通り})$$

どの赤玉も隣り合わないとき，隣り合う黒玉が存在する条件付き確率は

$$\begin{aligned} \frac{B-C}{A} &= \left(\frac{7!8!}{4!4!5!} - \frac{6!7!}{3!4!5!} \right) \cdot \frac{3!4!5!5!}{8!9!} \\ &= \left(\frac{7!8!}{4!} - \frac{6!7!}{3!} \right) \cdot \frac{3!5!}{8!9!} \\ &= (8 \cdot 7 - 4) \frac{6!7!}{4!} \cdot \frac{3!5!}{8!9!} \\ &= 52 \cdot \frac{6!}{8!} \cdot \frac{7!}{9!} \cdot \frac{5!}{4!} \cdot 3! = \frac{65}{168} \end{aligned}$$

求める確率は，この余事象の確率であるから　$1 - \dfrac{65}{168} = \mathbf{\dfrac{103}{168}}$ ■

4 (1) $A=B$ より，$C=\pi-2A$ であるから



$$\cos(\pi-2A)=\frac{4}{5} \quad \text{ゆえに} \quad 1-2\cos^2 A=\frac{4}{5}$$

$A<\dfrac{\pi}{2}$ に注意して　$\cos A=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

$1+\tan^2 A=\dfrac{1}{\cos^2 A}$ より　$\tan A=3$

AB の中点を M とすると　　$\mathrm{CM}=\mathrm{AM}\tan A=\dfrac{1}{2}\cdot 3=\dfrac{3}{2}$

よって，$\triangle$ABC の面積は　$\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CM}=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\dfrac{3}{2}=\boldsymbol{\dfrac{3}{4}}$

(2) CD の中点を H とすると　$\mathrm{CD}\perp\mathrm{MH}$

対称性から球の中心を O とすると，O は MH 上にある．

$\mathrm{OA}=1,\ \mathrm{AM}=\dfrac{1}{2},\ \mathrm{OA}^2=\mathrm{AM}^2+\mathrm{OM}^2$ より　$\mathrm{OM}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\theta=\angle\mathrm{COH}$ とすると

$$\cos(\pi-\theta)=\frac{\mathrm{OM}^2+\mathrm{OC}^2-\mathrm{CM}^2}{2\mathrm{OM}\cdot\mathrm{OC}}=\frac{\dfrac{3}{4}+1-\dfrac{9}{4}}{2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1}=-\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$\cos\theta=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$ より　$\mathrm{OH}=\mathrm{OC}\cos\theta=\dfrac{1}{2\sqrt{3}},\ \mathrm{CH}=\mathrm{OC}\sin\theta=\dfrac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}$

$\triangle$ABH の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}(\mathrm{OM}+\mathrm{OH})\cdot\mathrm{AB}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)\cdot 1=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

よって，求める体積は　$2\times\dfrac{1}{3}S\cdot\mathrm{CH}=2\times\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{11}}{9}}$