令和４年度　東京大学２次試験前期日程 (数学問題)100 分
文科 (一類，二類，三類)　数 I・II・A・B

問題 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$

$\boxed{\mathbf{1}}$ a，b を実数とする．座標平面上の放物線 $y=x^2+ax+b$ を C とおく．C は，原点で垂直に交わる 2 本の接線 ℓ_1，ℓ_2 を持つとする．ただし，C と ℓ_1 の接点 P_1 の x 座標は，C と ℓ_2 の接点 P_2 の x 座標より小さいとする．

(1) b を a で表せ．また a の値はすべての実数をとりうることを示せ．

(2) $i=1,\ 2$ に対し，円 D_i を，放物線 C の軸上に中心を持ち，点 P_i で ℓ_i と接するものと定める．D_2 の半径が D_1 の半径の 2 倍となるとき，a の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ $y=x^3-x$ により定まる座標平面上の曲線を C とする．C 上の点 $\mathrm{P}(\alpha,\ \alpha^3-\alpha)$ を通り，点 P における C の接線と垂直に交わる直線を ℓ とする．C と ℓ は相異なる 3 点で交わるとする．

(1) α のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) C と ℓ の点 P 以外の 2 つの交点の x 座標を $\beta,\ \gamma$ とする．ただし $\beta<\gamma$ とする．$\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2-1\neq 0$ となることを示せ．

(3) (2) の $\beta,\ \gamma$ を用いて，

$$u=4\alpha^3+\frac{1}{\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2-1}$$

と定める．このとき，u のとりうる値の範囲を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める．

$$a_1=4,\quad a_{n+1}={a_n}^2+n(n+2)\qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

(1) a_{2022} を 3 で割った余りを求めよ．

(2) a_{2022}，a_{2023}，a_{2024} の最大公約数を求めよ．

$\boxed{4}$ O を原点とする座標平面上で考える．0 以上の整数 k に対して，ベクトル $\vec{v}_k$ を

$$\vec{v}_k = \left(\cos\frac{2k\pi}{3},\ \sin\frac{2k\pi}{3}\right)$$

と定める．投げたとき表と裏がどちらも $\frac{1}{2}$ の確率で出るコインを N 回投げて，座標平面上に点 X_0，X_1，$\mathrm{X}_2, \cdots, \mathrm{X}_N$ を以下の規則 (i)，(ii) に従って定める．

(i) X_0 は O にある．

(ii) n を 1 以上 N 以下の整数とする．X_{n-1} が定まったとし，X_n を次のように定める．

- n 回目のコイン投げで表が出た場合，

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}_n} = \overrightarrow{\mathrm{OX}_{n-1}} + \vec{v}_k$$

により X_n を定める．ただし，k は 1 回目から n 回目までのコイン投げで裏が出た回数とする．

- n 回目のコイン投げで裏が出た場合，X_n を X_{n-1} と定める．

(1) $N = 5$ とする．X_5 が O にある確率を求めよ．

(2) $N = 98$ とする．X_{98} が O にあり，かつ，表が 90 回，裏が 8 回出る確率を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 原点を通る直線を $\ell : y = kx$ とする．直線 ℓ と放物線 $C : y = x^2 + ax + b$ の方程式から y を消去して整理すると

$$x^2 + (a-k)x + b = 0 \qquad (*)$$

ℓ と C が接するとき，係数について

$$(a-k)^2 - 4b = 0 \quad ゆえに \quad k^2 - 2ak + a^2 - 4b = 0 \qquad (**)$$

k に関する 2 次方程式の解を $k_1,\ k_2$ とすると，解と係数の関係により

$$k_1k_2 = a^2 - 4b$$

このとき，ℓ_1 と ℓ_2 が垂直であるから，$k_1k_2 = -1$ より

$$a^2 - 4b = -1 \quad ゆえに \quad \boldsymbol{b = \frac{a^2+1}{4}}$$

これを (**) に代入して

$$k^2 - 2ak - 1 = 0 \quad ゆえに \quad k = a \pm \sqrt{a^2+1}$$

C と ℓ の接点の x 座標は (*) の係数から

$$-\frac{a-k}{2} = \frac{k-a}{2} = \pm\frac{\sqrt{a^2+1}}{2} \quad (複号同順)$$

条件から，P_1，P_2 の x 座標は，それぞれ

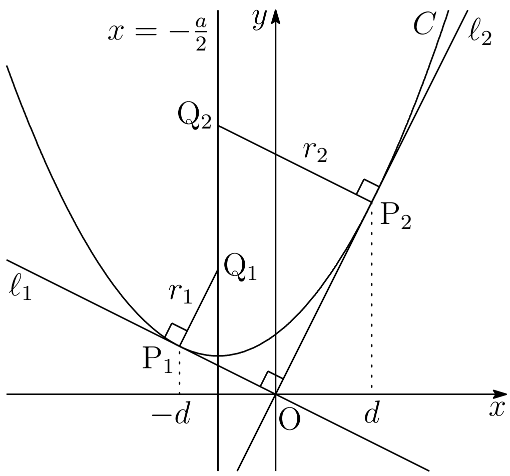
$$-\sqrt{a^2+1},\ \sqrt{a^2+1}$$

したがって，$\ell_1,\ \ell_2$ の傾きは，それぞれ

$$a - \sqrt{a^2+1}, \quad a + \sqrt{a^2+1}$$

上の諸式において表れる $\sqrt{a^2+1}$ の中の符号は，すべての a に対して正である．よって，a の値はすべての実数をとる．

(2) 2 円 D_1, D_2 の中心をそれぞれ，Q_1, Q_2 とし，半径を r_1, r_2 とする．$d=\dfrac{\sqrt{a^2+1}}{2}$ とおくと，P_1, P_2 の x 座標は，それぞれ，$-d$, d である．$\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1/\!/\ell_2$, $\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2/\!/\ell_1$ であるから，$\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1$，$\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2$ の偏角をそれぞれ α, β とすると $(0<\alpha<\beta<\pi)$



$$\tan\alpha=a+\sqrt{a^2+1},$$
$$\tan\beta=a-\sqrt{a^2+1}$$

$$r_1\cos\alpha=-\frac{a}{2}-(-d)=\frac{-a+\sqrt{a^2+1}}{2}=\frac{1}{2(a+\sqrt{a^2+1})}=\frac{1}{2\tan\alpha},$$
$$r_2|\cos\beta|=d-\left(-\frac{a}{2}\right)=\frac{a+\sqrt{a^2+1}}{2}=\frac{1}{2|a-\sqrt{a^2+1}|}=\frac{1}{2|\tan\beta|}$$

上の 2 式から　　$r_1=\dfrac{1}{2\sin\alpha}$,　$r_2=\dfrac{1}{2\sin\beta}$

$$r_1{}^2=\frac{1}{4\sin^2\alpha}=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{\tan^2\alpha}\right)$$
$$r_2{}^2=\frac{1}{4\sin^2\beta}=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{\tan^2\beta}\right)=\frac{1}{4}\left(1+\tan^2\alpha\right)$$

$r_2=2r_1$ より，$r_2{}^2=4r_1{}^2$ であるから

$\dfrac{1}{4}\left(1+\tan^2\alpha\right)=1+\dfrac{1}{\tan^2\alpha}$　整理すると　$\tan^4\alpha-3\tan^2\alpha-4=0$

ゆえに　$(\tan^2\alpha+1)(\tan^2\alpha-4)=0$　$\tan\alpha>0$ より　$\tan\alpha=2$

したがって　$a+\sqrt{a^2+1}=2$　ゆえに　$\sqrt{a^2+1}=2-a$　$\cdots$①

$a^2+1=(2-a)^2$　このとき，①に注意して　$\boldsymbol{a=\dfrac{3}{4}}$

■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $C: y = x^3 - x$ を微分すると　$y' = 3x^2 - 1$

$3\alpha^2 - 1 = 0$ のとき，ℓ は y 軸と平行となり，C と ℓ は 1 点で交わるから，不適．ゆえに，$3\alpha^2 - 1 \neq 0$

ℓ は，C 上の点 $(\alpha,\ \alpha^3 - \alpha)$ の点における法線であるから $(3\alpha^2 - 1 \neq 0)$

$$y = -\frac{1}{3\alpha^2 - 1}(x - \alpha) + \alpha^3 - \alpha$$

C と ℓ の方程式から，y を消去すると

$$\begin{aligned} x^3 - x &= -\frac{1}{3\alpha^2 - 1}(x - \alpha) + \alpha^3 - \alpha \\ x^3 - \alpha^3 - (x - \alpha) + \frac{1}{3\alpha^2 - 1}(x - \alpha) &= 0 \\ (x - \alpha)\left(x^2 + \alpha x + \alpha^2 - 1 + \frac{1}{3\alpha^2 - 1}\right) &= 0 \end{aligned}$$

$f(x) = x^2 + \alpha x + \alpha^2 - 1 + \dfrac{1}{3\alpha^2 - 1}$ とおくと

$$f(\alpha) = 3\alpha^2 - 1 + \frac{1}{3\alpha^2 - 1} = \frac{(3\alpha^2 - 1)^2 + 1}{3\alpha^2 - 1} \neq 0$$

2 次方程式 $f(x) = 0$ の係数について

$$\begin{aligned} D &= \alpha^2 - 4\left(\alpha^2 - 1 + \frac{1}{3\alpha^2 - 1}\right) \\ &= \frac{-9\alpha^4 + 15\alpha^2 - 8}{3\alpha^2 - 1} = -\frac{9\left(\alpha^2 - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{7}{4}}{3\alpha^2 - 1} > 0 \end{aligned}$$

したがって　$3\alpha^2 - 1 < 0$　よって　$\boldsymbol{-\dfrac{1}{\sqrt{3}} < \alpha < \dfrac{1}{\sqrt{3}}}$

(2) $\beta,\ \gamma$ は，2 次方程式 $f(x) = 0$ の解であるから，解と係数の関係により

$$\beta + \gamma = -\alpha, \quad \beta\gamma = \alpha^2 - 1 + \frac{1}{3\alpha^2 - 1}$$

上の 2 式から

$$\begin{aligned} \beta^2 + \beta\gamma + \gamma^2 - 1 &= (\beta + \gamma)^2 - \beta\gamma - 1 \\ &= (-\alpha)^2 - \left(\alpha^2 - 1 + \frac{1}{3\alpha^2 - 1}\right) - 1 \\ &= -\frac{1}{3\alpha^2 - 1} \neq 0 \end{aligned} \qquad (*)$$

(3) (1)，(2) の結果から

$$\begin{aligned} u &= 4\alpha^3 + \frac{1}{\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2-1} \\ &= 4\alpha^3 - (3\alpha^2-1) \\ &= 4\alpha^3 - 3\alpha^2 + 1 \qquad \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} < \alpha < \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \end{aligned}$$

$g(\alpha) = 4\alpha^3 - 3\alpha^2 + 1$ とおくと

$$g'(\alpha) = 12\alpha^2 - 6\alpha = 6\alpha(2\alpha - 1)$$

これから，$-\dfrac{1}{\sqrt{3}} < \alpha < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ における $g(\alpha)$ の増減表は

α	$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
$g'(\alpha)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(\alpha)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	

ここで

$$g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{4\sqrt{3}}{9}, \quad g(0) = 1,$$
$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}, \quad g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{9} = \frac{\sqrt{48}}{9} < 1$$

したがって　$-\dfrac{4\sqrt{3}}{9} < g(\alpha) \leqq 1$　よって　$\boldsymbol{-\dfrac{4\sqrt{3}}{9} < u \leqq 1}$ ■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $a_1=4,\ a_{n+1}={a_n}^2+n(n+2)$ より，法3について

$$a_1\equiv 1,\qquad a_2\equiv 1^2+1\cdot 3\equiv 1,\quad a_3\equiv 1^2+2\cdot 4\equiv 0,$$
$$a_4\equiv 0^2+3\cdot 5\equiv 0,\quad a_5\equiv 0^2+4\cdot 6\equiv 0,\quad a_6\equiv 0^2+5\cdot 7\equiv 2$$

$m=1,2,3,\cdots$ とし，法3について

$$a_{6m-5}\equiv 1,\quad a_{6m-4}\equiv 1,\quad a_{6m-3}\equiv 0,$$
$$a_{6m-2}\equiv 0,\quad a_{6m-1}\equiv 0,\quad a_{6m}\equiv 2 \qquad (*)$$

とする．

［1］ $m=1$ のとき，$(*)$ は成立する．

［2］ $m=k$ のとき，$(*)$ が成立すると仮定すると，法3について

$$a_{6k+1}={a_{6k}}^2+6k(6k+2)\equiv 2^2+0\cdot 2\equiv 1,$$
$$a_{6k+2}={a_{6k+1}}^2+(6k+1)(6k+3)\equiv 1^2+1\cdot 0\equiv 1,$$
$$a_{6k+3}={a_{6k+2}}^2+(6k+2)(6k+4)\equiv 1^2+2\cdot 1\equiv 0,$$
$$a_{6k+4}={a_{6k+3}}^2+(6k+3)(6k+5)\equiv 0^2+0\cdot 2\equiv 0,$$
$$a_{6k+5}={a_{6k+4}}^2+(6k+4)(6k+6)\equiv 0^2+1\cdot 0\equiv 0,$$
$$a_{6k+6}={a_{6k+5}}^2+(6k+5)(6k+7)\equiv 0^2+2\cdot 1\equiv 2$$

したがって，$m=k+1$ のときも $(*)$ は成立する．

［1］，［2］より，すべての自然数 m について，$(*)$ は成立する．

$a_{2022}=a_{6\cdot 337}$ であるから，$(*)$ より　$a_{2022}\equiv 2 \pmod 3$

よって，a_{2022} を3で割った余りは　**2**

(2) $N=2022$ とすると

$$a_{N+1}-{a_N}^2=N(N+2),\quad a_{N+2}-{a_{N+1}}^2=(N+1)(N+3)$$

a_N，a_{N+1}，a_{N+2} の最大公約数を p とすると，$N(N+2)$, $(N+1)(N+3)$ は p を因数にもつ．$N,\ N+1,\ N+2,\ N+3$ は連続する4整数であるから，p は3以下であるが，(1) の結果から，a_N は3で割り切れない．また，$(N+1)(N+3)$ は奇数であるから，p は2でない．

よって，求める最大公約数は　**1** ■

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $\vec{v}_k=\left(\cos\dfrac{2k\pi}{3},\ \sin\dfrac{2k\pi}{3}\right)$ より

$$\vec{v}_0=\vec{v}_3=\vec{v}_6=\cdots,\quad \vec{v}_1=\vec{v}_4=\vec{v}_7=\cdots,\quad \vec{v}_2=\vec{v}_5=\vec{v}_8=\cdots$$

$\vec{u}_j\ (j=1,2,\cdots,n)$ を次のように定める．

$$\vec{u}_j=\begin{cases}\vec{v}_k & (j\text{ 回目で表が出て},k\text{ は }j\text{ 回目までに裏が出た回数})\\ \vec{0} & (j\text{ 回目で裏が出る})\end{cases}$$

与えられた漸化式から

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}}_n=\sum_{j=1}^{n}\vec{u}_j$$

$\vec{u}_j\in\left\{\vec{0},\ \vec{v}_0,\ \vec{v}_1,\ \vec{v}_2\right\}$ であり，上式の右辺の $\vec{v}_0,\ \vec{v}_1,\ \vec{v}_2$ の個数をそれぞれ $a,\ b,\ c$ とすると，X_n が O にあるとき，$\vec{v}_0=-(\vec{v}_1+\vec{v}_2)$ に注意して

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OX}}_n&=a\vec{v}_0+b\vec{v}_1+c\vec{v}_2=-a(\vec{v}_1+\vec{v}_2)+b\vec{v}_1+c\vec{v}_2\\&=(b-a)\vec{v}_1+(c-a)\vec{v}_2=\vec{0}\end{aligned}$$

$\vec{v}_1,\ \vec{v}_2$ は，1 次独立であるから

$$b-a=c-a=0\quad\text{すなわち}\quad a=b=c \qquad (*)$$

このとき，$a+b+c\leqq 5$ であるから　$a=b=c=0,\ 1$

(i) $a=b=c=0$ のとき，5 回とも裏が出る確率であるから　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^5$

(ii) $a=b=c=1$ のとき，裏が k 回出た後に表が連続して出た回数を α_k とすると $(k=0,1,2)$

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}}_5=\alpha_0\vec{v}_0+\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2=\vec{0}$$

$\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2=3$，$\alpha_0=\alpha_1=\alpha_2$ より　$\alpha_0=\alpha_1=\alpha_2=1$

このときの確率は　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^5$

(i)，(ii) より，求める確率は　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^5+\left(\dfrac{1}{2}\right)^5=\mathbf{\dfrac{1}{16}}$

(2) (∗) より，X_n が O にあるとき，表の出た回数 $a+b+c=90$ について，$a=b=c$ であるから

$$a=b=c=30$$

裏が k 回出た後に表が連続して出た回数を t_k とすると $(0 \leqq k \leqq 8)$

$$\begin{aligned} t_0+t_3+t_6&=30 \\ t_1+t_4+t_7&=30 \\ t_2+t_5+t_8&=30 \end{aligned}$$

上の 3 式を満たす t_k の組は，すべて

$${}_3\mathrm{H}_{30}={}_{3+30-1}\mathrm{C}_{30}={}_{32}\mathrm{C}_{30}={}_{30}\mathrm{C}_2=16{\cdot}31$$

よって，求める確率は

$$(16{\cdot}31)^3\left(\frac{1}{2}\right)^{98}=\boldsymbol{\frac{31^3}{2^{86}}}$$

■