令和４年度　東京大学２次試験前期日程 (数学問題)100 分
文科 (一類，二類，三類)　数 I・II・A・B

問題 1 2 3 4

1 a，b を実数とする．座標平面上の放物線 $y = x^2 + ax + b$ を C とおく．C は，原点で垂直に交わる 2 本の接線 ℓ_1，ℓ_2 を持つとする．ただし，C と ℓ_1 の接点 P_1 の x 座標は，C と ℓ_2 の接点 P_2 の x 座標より小さいとする．

(1) b を a で表せ．また a の値はすべての実数をとりうることを示せ．

(2) $i = 1,\ 2$ に対し，円 D_i を，放物線 C の軸上に中心を持ち，点 P_i で ℓ_i と接するものと定める．D_2 の半径が D_1 の半径の 2 倍となるとき，a の値を求めよ．

2 $y = x^3 - x$ により定まる座標平面上の曲線を C とする．C 上の点 $\mathrm{P}(\alpha,\ \alpha^3 - \alpha)$ を通り，点 P における C の接線と垂直に交わる直線を ℓ とする．C と ℓ は相異なる 3 点で交わるとする．

(1) α のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) C と ℓ の点 P 以外の 2 つの交点の x 座標を $\beta,\ \gamma$ とする．ただし $\beta < \gamma$ とする．$\beta^2 + \beta\gamma + \gamma^2 - 1 \neq 0$ となることを示せ．

(3) (2) の $\beta,\ \gamma$ を用いて，

$$u = 4\alpha^3 + \frac{1}{\beta^2 + \beta\gamma + \gamma^2 - 1}$$

と定める．このとき，u のとりうる値の範囲を求めよ．

3 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める．

$$a_1 = 4, \quad a_{n+1} = {a_n}^2 + n(n+2) \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(1) a_{2022} を 3 で割った余りを求めよ．

(2) a_{2022}，a_{2023}，a_{2024} の最大公約数を求めよ．

4 O を原点とする座標平面上で考える．0 以上の整数 k に対して，ベクトル $\vec{v}_k$ を

$$\vec{v}_k = \left(\cos \frac{2k\pi}{3},\ \sin \frac{2k\pi}{3} \right)$$

と定める．投げたとき表と裏がどちらも $\dfrac{1}{2}$ の確率で出るコインを N 回投げて，座標平面上に点 $\mathrm{X}_0,\ \mathrm{X}_1,\ \mathrm{X}_2, \cdots, \mathrm{X}_N$ を以下の規則 (i)，(ii) に従って定める．

(i) X_0 は O にある．

(ii) n を 1 以上 N 以下の整数とする．X_{n-1} が定まったとし，X_n を次のように定める．

- n 回目のコイン投げで表が出た場合，

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}_n} = \overrightarrow{\mathrm{OX}_{n-1}} + \vec{v}_k$$

により X_n を定める．ただし，k は 1 回目から n 回目までのコイン投げで裏が出た回数とする．

- n 回目のコイン投げで裏が出た場合，X_n を X_{n-1} と定める．

(1) $N = 5$ とする．X_5 が O にある確率を求めよ．

(2) $N = 98$ とする．X_{98} が O にあり，かつ，表が 90 回，裏が 8 回出る確率を求めよ．

解答例

1 (1) 原点を通る直線を $\ell : y = kx$ とする．直線 ℓ と放物線 $C : y = x^2 + ax + b$ の方程式から y を消去して整理すると

$$x^2 + (a - k)x + b = 0 \qquad (*)$$

ℓ と C が接するとき，係数について

$$(a - k)^2 - 4b = 0 \quad \text{ゆえに} \quad k^2 - 2ak + a^2 - 4b = 0 \qquad (**)$$

k に関する 2 次方程式の解を $k_1,\ k_2$ とすると，解と係数の関係により

$$k_1 k_2 = a^2 - 4b$$

このとき，ℓ_1 と ℓ_2 が垂直であるから，$k_1 k_2 = -1$ より

$$a^2 - 4b = -1 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{b = \dfrac{a^2 + 1}{4}}$$

これを $(**)$ に代入して

$$k^2 - 2ak - 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad k = a \pm \sqrt{a^2 + 1}$$

C と ℓ の接点の x 座標は $(*)$ の係数から

$$-\frac{a - k}{2} = \frac{k - a}{2} = \pm\frac{\sqrt{a^2 + 1}}{2} \quad \text{(複号同順)}$$

条件から，P_1，P_2 の x 座標は，それぞれ

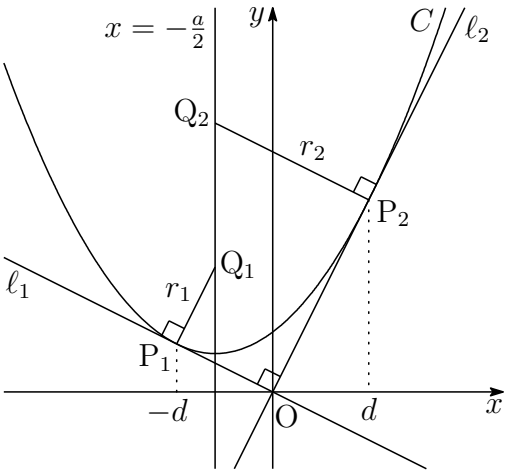
$$-\frac{\sqrt{a^2 + 1}}{2},\ \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{2}$$

したがって，$\ell_1,\ \ell_2$ の傾きは，それぞれ

$$a - \sqrt{a^2 + 1}, \quad a + \sqrt{a^2 + 1}$$

上の諸式において表れる $\sqrt{a^2 + 1}$ の中の符号は，すべての a に対して正である．よって，a の値はすべての実数をとる．

(2) 2 円 D_1, D_2 の中心をそれぞれ，Q_1, Q_2 とし，半径を r_1, r_2 とする．$d=\dfrac{\sqrt{a^2+1}}{2}$ とおくと，P_1, P_2 の x 座標は，それぞれ，$-d$, d である．$P_1Q_1 /\!/ \ell_2$, $P_2Q_2 /\!/ \ell_1$ であるから，P_1Q_1，P_2Q_2 の偏角をそれぞれ α, β とすると $(0<\alpha<\beta<\pi)$



$$\tan\alpha = a+\sqrt{a^2+1},$$
$$\tan\beta = a-\sqrt{a^2+1}$$

$$r_1\cos\alpha = -\frac{a}{2}-(-d) = \frac{-a+\sqrt{a^2+1}}{2} = \frac{1}{2(a+\sqrt{a^2+1})} = \frac{1}{2\tan\alpha},$$
$$r_2|\cos\beta| = d-\left(-\frac{a}{2}\right) = \frac{a+\sqrt{a^2+1}}{2} = \frac{1}{2|a-\sqrt{a^2+1}|} = \frac{1}{2|\tan\beta|}$$

上の 2 式から　　$r_1=\dfrac{1}{2\sin\alpha}$,　$r_2=\dfrac{1}{2\sin\beta}$

$$r_1{}^2 = \frac{1}{4\sin^2\alpha} = \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{\tan^2\alpha}\right)$$
$$r_2{}^2 = \frac{1}{4\sin^2\beta} = \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{\tan^2\beta}\right) = \frac{1}{4}\left(1+\tan^2\alpha\right)$$

$r_2=2r_1$ より，$r_2{}^2=4r_1{}^2$ であるから

$\dfrac{1}{4}\left(1+\tan^2\alpha\right) = 1+\dfrac{1}{\tan^2\alpha}$　整理すると　$\tan^4\alpha-3\tan^2\alpha-4=0$

ゆえに　$(\tan^2\alpha+1)(\tan^2\alpha-4)=0$　$\tan\alpha>0$ より　$\tan\alpha=2$

したがって　$a+\sqrt{a^2+1}=2$　ゆえに　$\sqrt{a^2+1}=2-a$　$\cdots$①

$a^2+1=(2-a)^2$　このとき，①に注意して　$\boldsymbol{a=\dfrac{3}{4}}$

■

2 (1) $C : y = x^3 - x$ を微分すると　$y' = 3x^2 - 1$

$3\alpha^2 - 1 = 0$ のとき，ℓ は y 軸と平行となり，C と ℓ は 1 点で交わるから，不適．ゆえに，$3\alpha^2 - 1 \neq 0$

ℓ は，C 上の点 $(\alpha,\ \alpha^3 - \alpha)$ の点における法線であるから $(3\alpha^2 - 1 \neq 0)$

$$y = -\frac{1}{3\alpha^2 - 1}(x - \alpha) + \alpha^3 - \alpha$$

C と ℓ の方程式から，y を消去すると

$$x^3 - x = -\frac{1}{3\alpha^2 - 1}(x - \alpha) + \alpha^3 - \alpha$$
$$x^3 - \alpha^3 - (x - \alpha) + \frac{1}{3\alpha^2 - 1}(x - \alpha) = 0$$
$$(x - \alpha)\left(x^2 + \alpha x + \alpha^2 - 1 + \frac{1}{3\alpha^2 - 1}\right) = 0$$

$f(x) = x^2 + \alpha x + \alpha^2 - 1 + \dfrac{1}{3\alpha^2 - 1}$ とおくと

$$f(\alpha) = 3\alpha^2 - 1 + \frac{1}{3\alpha^2 - 1} = \frac{(3\alpha^2 - 1)^2 + 1}{3\alpha^2 - 1} \neq 0$$

2 次方程式 $f(x) = 0$ の係数について

$$D = \alpha^2 - 4\left(\alpha^2 - 1 + \frac{1}{3\alpha^2 - 1}\right)$$
$$= \frac{-9\alpha^4 + 15\alpha^2 - 8}{3\alpha^2 - 1} = -\frac{9\left(\alpha^2 - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{7}{4}}{3\alpha^2 - 1} > 0$$

したがって　$3\alpha^2 - 1 < 0$　よって　$\boldsymbol{-\dfrac{1}{\sqrt{3}} < \alpha < \dfrac{1}{\sqrt{3}}}$

(2) $\beta,\ \gamma$ は，2 次方程式 $f(x) = 0$ の解であるから，解と係数の関係により

$$\beta + \gamma = -\alpha, \quad \beta\gamma = \alpha^2 - 1 + \frac{1}{3\alpha^2 - 1}$$

上の 2 式から

$$\beta^2 + \beta\gamma + \gamma^2 - 1 = (\beta + \gamma)^2 - \beta\gamma - 1$$
$$= (-\alpha)^2 - \left(\alpha^2 - 1 + \frac{1}{3\alpha^2 - 1}\right) - 1$$
$$= -\frac{1}{3\alpha^2 - 1} \neq 0 \qquad (*)$$

(3) (1)，(2) の結果から

$$\begin{aligned} u &= 4\alpha^3 + \frac{1}{\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2-1} \\ &= 4\alpha^3 - (3\alpha^2 - 1) \\ &= 4\alpha^3 - 3\alpha^2 + 1 \qquad \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} < \alpha < \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \end{aligned}$$

$g(\alpha) = 4\alpha^3 - 3\alpha^2 + 1$ とおくと

$$g'(\alpha) = 12\alpha^2 - 6\alpha = 6\alpha(2\alpha - 1)$$

これから，$-\dfrac{1}{\sqrt{3}} < \alpha < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ における $g(\alpha)$ の増減表は

α	$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
$g'(\alpha)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(\alpha)$		↗	極大	↘	極小	↗	

ここで

$$g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{4\sqrt{3}}{9}, \quad g(0) = 1,$$
$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}, \quad g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{9} = \frac{\sqrt{48}}{9} < 1$$

したがって　$-\dfrac{4\sqrt{3}}{9} < g(\alpha) \leqq 1$　よって　$\boldsymbol{-\dfrac{4\sqrt{3}}{9} < u \leqq 1}$ ■

3 (1) $a_1 = 4,\ a_{n+1} = {a_n}^2 + n(n+2)$ より，法 3 について

$$\begin{aligned} &a_1 \equiv 1, && a_2 \equiv 1^2 + 1\cdot 3 \equiv 1, && a_3 \equiv 1^2 + 2\cdot 4 \equiv 0, \\ &a_4 \equiv 0^2 + 3\cdot 5 \equiv 0, && a_5 \equiv 0^2 + 4\cdot 6 \equiv 0, && a_6 \equiv 0^2 + 5\cdot 7 \equiv 2 \end{aligned}$$

$m = 1, 2, 3, \cdots$ とし，法 3 について

$$\begin{aligned} &a_{6m-5} \equiv 1, && a_{6m-4} \equiv 1, && a_{6m-3} \equiv 0, \\ &a_{6m-2} \equiv 0, && a_{6m-1} \equiv 0, && a_{6m} \equiv 2 \end{aligned} \qquad (*)$$

とする．

［1］$m = 1$ のとき，$(*)$ は成立する．

［2］$m = k$ のとき，$(*)$ が成立すると仮定すると，法 3 について

$$\begin{aligned} a_{6k+1} &= {a_{6k}}^2 + 6k(6k+2) \equiv 2^2 + 0\cdot 2 \equiv 1, \\ a_{6k+2} &= {a_{6k+1}}^2 + (6k+1)(6k+3) \equiv 1^2 + 1\cdot 0 \equiv 1, \\ a_{6k+3} &= {a_{6k+2}}^2 + (6k+2)(6k+4) \equiv 1^2 + 2\cdot 1 \equiv 0, \\ a_{6k+4} &= {a_{6k+3}}^2 + (6k+3)(6k+5) \equiv 0^2 + 0\cdot 2 \equiv 0, \\ a_{6k+5} &= {a_{6k+4}}^2 + (6k+4)(6k+6) \equiv 0^2 + 1\cdot 0 \equiv 0, \\ a_{6k+6} &= {a_{6k+5}}^2 + (6k+5)(6k+7) \equiv 0^2 + 2\cdot 1 \equiv 2 \end{aligned}$$

したがって，$m = k+1$ のときも $(*)$ は成立する．

［1］，［2］より，すべての自然数 m について，$(*)$ は成立する．

$a_{2022} = a_{6\cdot 337}$ であるから，$(*)$ より　$a_{2022} \equiv 2 \pmod 3$

よって，a_{2022} を 3 で割った余りは　**2**

(2) $N = 2022$ とすると

$${a_{N+1}} - {a_N}^2 = N(N+2), \quad {a_{N+2}} - {a_{N+1}}^2 = (N+1)(N+3)$$

ユークリッドの互除法により

$$\begin{aligned} \gcd\big(N(N+2),\ (N+1)(N+3)\big) &= \gcd\big(N(N+2),\ 2N+3\big) \\ &= \gcd\big(2N(N+2),\ 2N+3\big) \\ &= \gcd\big(N(2N+4),\ 2N+3\big) \\ &= \gcd\big(N,\ 2N+3\big) = \gcd\big(N,\ 3\big) \end{aligned}$$

この公約数は 1 または 3 であるが，(1) より a_N は 3 で割れない．

よって，求める最大公約数は　**1**　■

4 (1) $\vec{v}_k = \left(\cos\dfrac{2k\pi}{3},\ \sin\dfrac{2k\pi}{3}\right)$ より

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_3 = \vec{v}_6 = \cdots, \quad \vec{v}_1 = \vec{v}_4 = \vec{v}_7 = \cdots, \quad \vec{v}_2 = \vec{v}_5 = \vec{v}_8 = \cdots$$

$\vec{u}_j$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ を次のように定める.

$$\vec{u}_j = \begin{cases} \vec{v}_k & (j \text{ 回目で表が出て, } k \text{ は } j \text{ 回目までに裏が出た回数}) \\ \vec{0} & (j \text{ 回目で裏が出る}) \end{cases}$$

与えられた漸化式から

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}_n} = \sum_{j=1}^{n} \vec{u}_j$$

$\vec{u}_j \in \left\{\vec{0},\ \vec{v}_0,\ \vec{v}_1,\ \vec{v}_2\right\}$ であり，上式の右辺の $\vec{v}_0,\ \vec{v}_1,\ \vec{v}_2$ の個数をそれぞれ $a,\ b,\ c$ とすると，X_n が O にあるとき，$\vec{v}_0 = -(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$ に注意して

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OX}_n} &= a\vec{v}_0 + b\vec{v}_1 + c\vec{v}_2 = -a(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + b\vec{v}_1 + c\vec{v}_2 \\ &= (b-a)\vec{v}_1 + (c-a)\vec{v}_2 = \vec{0} \end{aligned}$$

$\vec{v}_1,\ \vec{v}_2$ は，1 次独立であるから

$$b - a = c - a = 0 \quad \text{すなわち} \quad a = b = c \qquad (*)$$

このとき，$a + b + c \leqq 5$ であるから $\quad a = b = c = 0,\ 1$

(i) $a = b = c = 0$ のとき，5 回とも裏が出る確率であるから $\quad \left(\dfrac{1}{2}\right)^5$

(ii) $a = b = c = 1$ のとき，裏が k 回出た後に表が連続して出た回数を α_k とすると $(k = 0, 1, 2)$

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}_5} = \alpha_0\vec{v}_0 + \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 = \vec{0}$$

$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 3$，$\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2$ より $\quad \alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 1$

このときの確率は $\quad \left(\dfrac{1}{2}\right)^5$

(i)，(ii) より，求める確率は $\quad \left(\dfrac{1}{2}\right)^5 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^5 = \boldsymbol{\dfrac{1}{16}}$

(2) $(*)$ より，X_n が O にあるとき，表の出た回数 $a+b+c=90$ について，$a=b=c$ であるから

$$a=b=c=30$$

裏が k 回出た後に表が連続して出た回数を t_k とすると $(0 \leqq k \leqq 8)$

$$t_0+t_3+t_6=30$$
$$t_1+t_4+t_7=30$$
$$t_2+t_5+t_8=30$$

上の 3 式を満たす t_k の組は，すべて

$${}_3\mathrm{H}_{30}={}_{3+30-1}\mathrm{C}_{30}={}_{32}\mathrm{C}_{30}={}_{32}\mathrm{C}_2=16{\cdot}31$$

よって，求める確率は

$$(16{\cdot}31)^3\left(\frac{1}{2}\right)^{98}=\frac{\mathbf{31^3}}{\mathbf{2^{86}}}$$

■