

令和3年度 東京大学2次試験前期日程(数学問題)100分
 文科(一類, 二類, 三類) 数I・II・A・B

問題 1 2 3 4

1 a を正の実数とする. 座標平面上の曲線 C を $y = ax^3 - 2x$ で定める. 原点を中心とする半径1の円と C の共有点の個数が6個であるような a の範囲を求めよ.

2 N を5以上の整数とする. 1以上 $2N$ 以下の整数から, 相異なる N 個の整数を選ぶ. ただし1は必ず選ぶこととする. 選んだ数の集合を S とし, S に関する以下の条件を考える.

条件1: S は連続する2個の整数からなる集合を1つも含まない.

条件2: S は連続する $N-2$ 個の整数からなる集合を少なくとも1つ含む.

ただし, 2以上の整数 k に対して, 連続する k 個の整数からなる集合とは, ある整数 l を用いて $\{l, l+1, \dots, l+k-1\}$ と表される集合を指す. 例えば $\{1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10\}$ は連続する3個の整数からなる集合 $\{1, 2, 3\}$, $\{7, 8, 9\}$, $\{8, 9, 10\}$ を含む.

(1) 条件1を満たすような選び方は何通りあるか.

(2) 条件2を満たすような選び方は何通りあるか.

3 a, b を実数とする. 座標平面上の放物線

$$C: y = x^2 + ax + b$$

は放物線 $y = -x^2$ と2つの共有点を持ち, 一方の共有点の x 座標は $-1 < x < 0$ を満たし, 他方の共有点の x 座標は $0 < x < 1$ を満たす.

(1) 点 (a, b) のとりうる範囲を座標平面上に図示せよ.

(2) 放物線 C の通りうる範囲を座標平面上に図示せよ.

4 以下の問いに答えよ.

- (1) 正の奇数 K, L と正の整数 A, B が $KA = LB$ を満たしているとする. K を 4 で割った余りが L を 4 で割った余りと等しいならば, A を 4 で割った余りは B を 4 で割った余りと等しいことを示せ.
- (2) 正の整数 a, b が $a > b$ を満たしているとする. このとき, $A = {}_{4a+1}C_{4b+1}$, $B = {}_aC_b$ に対して $KA = LB$ となるような正の奇数 K, L が存在することを示せ.
- (3) a, b は (2) の通りとし, さらに $a - b$ が 2 で割り切れるとする. ${}_{4a+1}C_{4b+1}$ を 4 で割った余りは ${}_aC_b$ を 4 で割った余りと等しいことを示せ.
- (4) ${}_{2021}C_{37}$ を 4 で割った余りを求めよ.

解答例

1 曲線 $C: y = ax^3 - 2x$ と円 $x^2 + y^2 = 1$ から y を消去すると

$$x^2 + (ax^3 - 2x)^2 = 1 \quad \text{整理すると} \quad a^2x^6 - 4ax^4 + 5x^2 - 1 = 0 \quad (*)$$

このとき, 上の第1式から $1 - x^2 = (ax^3 - 2x)^2 \geq 0$

$$1 - x^2 \geq 0 \quad \text{これを解いて} \quad -1 \leq x \leq 1$$

(*) が $-1 \leq x \leq 1$ ($x \neq 0$) に異なる6個の実数解をもつとき, 3次方程式

$$a^2t^3 - 4at^2 + 5t - 1 = 0$$

は $0 < t \leq 1$ に異なる3つの実数解をもつ.

$f(t) = a^2t^3 - 4at^2 + 5t - 1$ とおくと

$$f'(t) = 3a^2t^2 - 8at + 5 = (at - 1)(3at - 5)$$

$a > 0$ より, $f(t)$ の増減表は

t	...	$\frac{1}{a}$...	$\frac{5}{3a}$...
$f'(t)$	+	0	-	0	+
$f(t)$	↗	$\frac{2}{a} - 1$	↘	$\frac{50}{27a} - 1$	↗

$f(t) = 0$ が $0 < t \leq 1$ に異なる3つの実数解をもつとき

$$0 < \frac{1}{a} < \frac{5}{3a} < 1, \quad f(0) = -1 < 0, \quad f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{2}{a} - 1 > 0,$$

$$f\left(\frac{5}{3a}\right) = \frac{50}{27a} - 1 < 0, \quad f(1) = (a - 2)^2 \geq 0$$

よって, これらを同時に満たす a の値の範囲は $\frac{50}{27} < a < 2$ ■

2 (1) S の集合を次のように定める.

$$S = \{a_1, a_2, \dots, a_N\} \quad (a_1 = 1 < a_2 < a_3 < \dots < a_N)$$

条件 1 を満たすとき, $a_N = 2N - 1$ または $a_N = 2N$ である.

(i) $a_N = 2N - 1$ のとき

$$a_n = 2n - 1 \quad (n = 1, 2, \dots, N) \text{ であるから } 1 \text{ (通り)}$$

(ii) $a_N = 2N$ のとき

$$a_2 - a_1, a_3 - a_2, \dots, a_N - a_{N-1}$$

の 1 つだけが 3 で, 残りの $N - 2$ 個は 2 であるから

$$\frac{(N-1)!}{1!(N-2)!} = N-1 \text{ (通り)}$$

(i), (ii) より, 条件 1 を満たす選び方は $1 + (N - 1) = N$ (通り)

(2) 連続する $N - 2$ 個の整数の最小値を k とする.

(i) $k = a_1$, すなわち, $a_{N-2} - a_1 = N - 3$ のとき

$$N - 1 \leq a_{N-1} < a_N \leq 2N$$

a_{N-1}, a_N の選び方は, $2N - (N - 1) + 1$, すなわち, $N + 2$ 個の中から異なる 2 つを選ぶ組合せであるから

$${}_{N+2}C_2 = \frac{(N+2)(N+1)}{2} \text{ (通り)}$$

(ii) $k \neq a_1$ のとき ($k \neq 2$), 連続する $N - 2$ 個の整数は

$$k, k+1, \dots, k+N-3 \quad (k = 3, 4, \dots, N+3)$$

であるから, 残りの整数は

$$1, 2, \dots, k-1 \quad \text{および} \quad k+N-2, k+N-1, \dots, 2N$$

この $N + 2$ 個の中から 1 が選ばれ, 残りの 1 個は $k - 1$ を除く N 通りの選び方があるから

$$\sum_{k=3}^{N+3} N = N(N+1)$$

よって $\frac{(N+2)(N+1)}{2} + N(N+1) = \frac{1}{2}(N+1)(3N+2)$ ■

- 3 (1) $C: y = x^2 + ax + b$ と $y = -x^2$ の2式から y を消去して整理すると

$$2x^2 + ax + b = 0$$

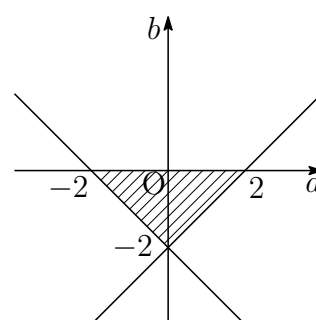
$f(x) = 2x^2 + ax + b$ とおく. C と $y = -x^2$ の共有点の x 座標が $-1 < x < 0$, $0 < x < 1$ であるとき, 次を満たせばよい.

$$\begin{cases} f(-1) = -a + b + 2 > 0 \\ f(0) = b < 0 \\ f(1) = a + b + 2 > 0 \end{cases}$$

それぞれ整理すると

$$\begin{cases} b > a - 2 \\ b < 0 \\ b > -a - 2 \end{cases}$$

よって, 求める領域は, 右の図の斜線部分で境界線を含まない.



- (2) C の方程式から, $b = -xa + y - x^2$ であるから

$$g(a) = -xa + y - x^2$$

とおくと, $b = g(a)$ は, 傾き $-x$, 切片 $y - x^2$ の直線である.

これが (1) で求めた領域を通る条件, 切片に注目して求めればよい.

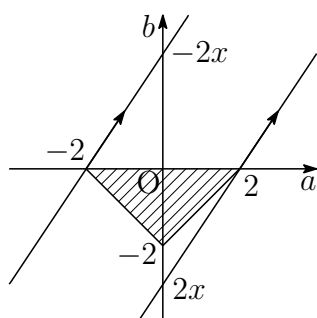
- (i) $x \leq -1$ のとき

$$2x < y - x^2 < -2x \quad \text{ゆえに} \quad x^2 + 2x < y < x^2 - 2x \quad (x \leq -1)$$

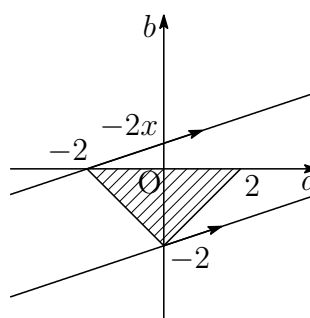
- (ii) $-1 \leq x \leq 0$ のとき

$$-2 < y - x^2 < -2x \quad \text{ゆえに} \quad x^2 - 2 < y < x^2 - 2x \quad (-1 \leq x \leq 0)$$

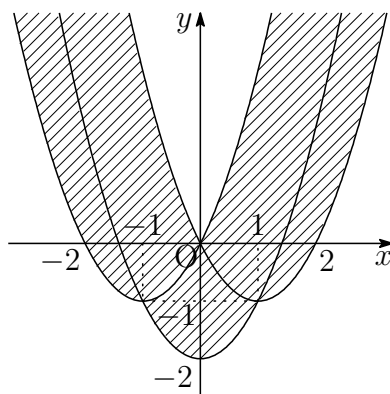
- (i) $x \leq -1$ のとき



- (ii) $-1 \leq x \leq 0$ のとき



$C: y = x^2 + ax + b$ と放物線 $y = -x^2$ が $-1 < x < 0$ と $0 < x < 1$ の区間でそれぞれ共有点をもつから、 x と $-x$ の対称性に注意すると、 $x \leq 0$ で C の通りうる範囲と $0 \leq x$ で C の通りうる範囲は y 軸について対称である。よって、求める領域は、下の図の斜線部分で境界線を含まない。



4 (1) $KA = LB$ より

$$KA - KB = LB - KB \quad \text{ゆえに} \quad K(A - B) = (L - K)B$$

K, L をそれぞれ 4 で割った余りが等しいから $L - K \equiv 0 \pmod{4}$

$$K(A - B) \equiv 0 \pmod{4}$$

K は正の奇数であるから $A - B \equiv 0$ すなわち $A \equiv B \pmod{4}$

よって、 A を 4 で割った余りは、 B を 4 で割った余りと等しい。

$$(2) A = {}_{4a+1}C_{4b+1} = \prod_{j=0}^{4b} \frac{4a+1-j}{4b+1-j}, \quad B = {}_aC_b = \prod_{k=0}^{b-1} \frac{a-k}{b-k} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} A &= \prod_{j=0}^{4b} \frac{4a+1-j}{4b+1-j} \\ &= \prod_{k=0}^b \frac{4a+1-4k}{4b+1-4k} \prod_{k=0}^{b-1} \frac{4a+1-(4k+1)}{4b+1-(4k+1)} \\ &\quad \times \prod_{k=0}^{b-1} \frac{4a+1-(4k+2)}{4b+1-(4k+2)} \prod_{k=0}^{b-1} \frac{4a+1-(4k+3)}{4b+1-(4k+3)} \\ &= (4a+1-4b) \prod_{k=0}^{b-1} \frac{4a+1-4k}{4b+1-4k} \prod_{k=0}^{b-1} \frac{a-k}{b-k} \\ &\quad \times \prod_{k=0}^{b-1} \frac{4a-1-4k}{4b-1-4k} \prod_{k=0}^{b-1} \frac{2a-1-2k}{2b-1-2k} \\ &= (4a+1-4b)B \prod_{k=0}^{b-1} \frac{(4a+1-4k)(4a-1-4k)(2a-1-2k)}{(4b+1-4k)(4b-1-4k)(2b-1-2k)} \end{aligned}$$

これから、正の奇数 K, L を

$$\begin{aligned} K &= \prod_{k=0}^{b-1} (4b+1-4k)(4b-1-4k)(2b-1-2k) \\ L &= (4a+1-4b) \prod_{k=0}^{b-1} (4a+1-4k)(4a-1-4k)(2a-1-2k) \end{aligned}$$

とおくと、次式を満たす正の奇数 K, L が存在する.

$$A = \frac{LB}{K} \quad \text{すなわち} \quad KA = LB$$

(3) 2つの奇数 K, L の因数は, 法 4 について ($a - b$ は 2 で割り切れる)

$$4a + 1 - 4b \equiv 1 \pmod{4}$$

$$4b + 1 - 4k \equiv 4a + 1 - 4k \pmod{4}$$

$$4b - 1 - 4k \equiv 4a - 1 - 4k \pmod{4}$$

$$2b - 1 - 2k = 2a - 1 - 2k - 2(a - b) \equiv 2a - 1 - 2k \pmod{4}$$

したがって, 2つの奇数 K, L について $K \equiv L \pmod{4}$

これと $A = {}_{4a+1}C_{4b+1}$, $B = {}_aC_b$ を (1) の結論に適用すると

$$(*) \quad {}_{4a+1}C_{4b+1} \equiv {}_aC_b \pmod{4}$$

よって, ${}_{4a+1}C_{4b+1}$ を 4 で割った余りは, ${}_aC_b$ を 4 で割った余りと等しい.

(4) (*) の左辺は $a = 505$, $b = 9$ を代入したもので $a - b$ は 2 で割り切れるから

$${}_{2021}C_{37} \equiv {}_{505}C_9 \pmod{4}$$

さらに, 上式の右辺は, (*) の左辺に $a = 126$, $b = 2$ を代入したもので $a - b$ は 2 で割り切れるから

$${}_{505}C_9 \equiv {}_{126}C_2 \pmod{4}$$

$$\text{このとき } {}_{126}C_2 = \frac{126 \cdot 125}{2 \cdot 1} = 63 \cdot 125 \equiv 3 \cdot 1 \equiv 3 \pmod{4}$$

したがって ${}_{2021}C_{37} \equiv 3 \pmod{4}$ よって 求める余りは **3** ■