令和３年度　東京大学２次試験前期日程 (数学問題)100 分
文科 (一類，二類，三類)　数 I・II・A・B

$\boxed{\mathbf{1}}$ a を正の実数とする．座標平面上の曲線 C を $y = ax^3 - 2x$ で定める．原点を中心とする半径 1 の円と C の共有点の個数が 6 個であるような a の範囲を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ N を 5 以上の整数とする．1 以上 $2N$ 以下の整数から，相異なる N 個の整数を選ぶ．ただし 1 は必ず選ぶこととする．選んだ数の集合を S とし，S に関する以下の条件を考える．

条件 1： S は連続する 2 個の整数からなる集合を 1 つも含まない．

条件 2： S は連続する $N-2$ 個の整数からなる集合を少なくとも 1 つ含む．

ただし，2 以上の整数 k に対して，連続する k 個の整数からなる集合とは，ある整数 l を用いて $\{l,\ l+1, \cdots,\ l+k-1\}$ と表される集合を指す．例えば $\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$ は連続する 3 個の整数からなる集合 $\{1,\ 2,\ 3\}$, $\{7,\ 8,\ 9\}$, $\{8,\ 9,\ 10\}$ を含む．

(1) 条件 1 を満たすような選び方は何通りあるか．

(2) 条件 2 を満たすような選び方は何通りあるか．

$\boxed{\mathbf{3}}$ $a,\ b$ を実数とする．座標平面上の放物線

$$C : y = x^2 + ax + b$$

は放物線 $y = -x^2$ と 2 つの共有点を持ち，一方の共有点の x 座標は $-1 < x < 0$ を満たし，他方の共有点の x 座標は $0 < x < 1$ を満たす．

(1) 点 $(a,\ b)$ のとりうる範囲を座標平面上に図示せよ．

(2) 放物線 C の通りうる範囲を座標平面上に図示せよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 以下の問いに答えよ．

(1) 正の奇数 $K,\ L$ と正の整数 $A,\ B$ が $KA = LB$ を満たしているとする．K を 4 で割った余りが L を 4 で割った余りと等しいならば，A を 4 で割った余りは B を 4 で割った余りと等しいことを示せ．

(2) 正の整数 $a,\ b$ が $a > b$ を満たしているとする．このとき，$A = {}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$，$B = {}_{a}\mathrm{C}_{b}$ に対して $KA = LB$ となるような正の奇数 $K,\ L$ が存在することを示せ．

(3) $a,\ b$ は (2) の通りとし，さらに $a - b$ が 2 で割り切れるとする．${}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$ を 4 で割った余りは ${}_{a}\mathrm{C}_{b}$ を 4 で割った余りと等しいことを示せ．

(4) ${}_{2021}\mathrm{C}_{37}$ を 4 で割った余りを求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ 曲線 $C: y = ax^3 - 2x$ と円 $x^2 + y^2 = 1$ から y を消去すると

$$x^2 + (ax^3 - 2x)^2 = 1 \quad \text{整理すると} \quad a^2x^6 - 4ax^4 + 5x^2 - 1 = 0 \qquad (*)$$

$(*)$ が $-1 \leqq x \leqq 1$ $(x \neq 0)$ に異なる 6 個の実数解をもつとき，3 次方程式

$$a^2t^3 - 4at^2 + 5t - 1 = 0$$

は $0 < t \leqq 1$ に異なる 3 つの実数解をもつ．

$f(t) = a^2t^3 - 4at^2 + 5t - 1$ とおくと

$$f'(t) = 3a^2t^2 - 8at + 5 = (at - 1)(3at - 5)$$

$a > 0$ より，$f(t)$ の増減表は

t	$\cdots$	$\frac{1}{a}$	$\cdots$	$\frac{5}{3a}$	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\nearrow$	$\frac{2}{a} - 1$	$\searrow$	$\frac{50}{27a} - 1$	$\nearrow$

$f(t) = 0$ が $0 < t \leqq 1$ に異なる 3 つの実数解をもつとき

$$0 < \frac{1}{a} < \frac{5}{3a} < 1, \quad f(0) = -1 < 0, \quad f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{2}{a} - 1 > 0,$$
$$f\left(\frac{5}{3a}\right) = \frac{50}{27a} - 1 < 0, \quad f(1) = (a-2)^2 \geqq 0$$

よって，これらを同時に満たす a の値の範囲は $\boldsymbol{\frac{50}{27} < a < 2}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) S の集合を次のように定める．

$$S = \{a_1,\ a_2, \cdots,\ a_N\} \quad (a_1 = 1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_N)$$

条件 1 を満たすとき，$a_N = 2N - 1$ または $a_N = 2N$ である．

(i) $a_N = 2N - 1$ のとき

$a_n = 2n - 1$ $(n = 1, 2, \cdots, N)$ であるから　1 (通り)

(ii) $a_N = 2N$ のとき

$$a_2 - a_1,\ a_3 - a_2, \cdots, a_N - a_{N-1}$$

の 1 つだけが 3 で，残りの $N - 2$ 個は 2 であるから

$$\frac{(N-1)!}{1!(N-2)!} = N - 1 \text{ (通り)}$$

(i)，(ii) より，条件 1 を満たす選び方は　$1 + (N - 1) = \boldsymbol{N}$ (通り)

(2) 連続する $N - 2$ 個の整数の最小値を k とする．

(i) $k = a_1$，すなわち，$a_{N-2} - a_1 = N - 3$ のとき

$$N - 1 \leqq a_{N-1} < a_N \leqq 2N$$

$a_{N-1},\ a_N$ の選び方は，$2N - (N - 1) + 1$，すなわち，$N + 2$ 個の中から異なる 2 つを選ぶ組合せであるから

$$_{N+2}\mathrm{C}_2 = \frac{(N+2)(N+1)}{2} \quad \text{(通り)}$$

(ii) $k \neq a_1$ のとき $(k \neq 2)$，連続する $N - 2$ 個の整数は

$$k,\ k+1,\ \cdots,\ k+N-3 \quad (k = 3, 4, \cdots, N+3)$$

であるから，残りの整数は

$$1,\ 2,\ \cdots,\ k-1 \quad \text{および} \quad k+N-2,\ k+N-1,\ \cdots,\ 2N$$

この $N + 2$ 個の中から 1 が選ばれ，残りの 1 個は $k - 1$ を除く N 通りの選び方があるから

$$\sum_{k=3}^{N+3} N = N(N+1)$$

よって　$$\frac{(N+2)(N+1)}{2} + N(N+1) = \boldsymbol{\frac{1}{2}(N+1)(3N+2)}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $C : y = x^2 + ax + b$ と $y = -x^2$ の 2 式から y を消去して整理すると

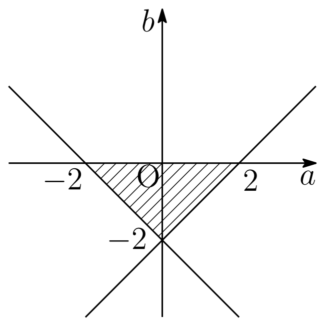
$$2x^2 + ax + b = 0$$

$f(x) = 2x^2+ax+b$ とおく．C と $y = -x^2$ の共有点の x 座標が $-1 < x < 0$，$0 < x < 1$ であるとき，次を満たせばよい．

$$\begin{cases} f(-1) = -a + b + 2 > 0 \\ f(0) = b < 0 \\ f(1) = a + b + 2 > 0 \end{cases}$$

それぞれ整理すると

$$\begin{cases} b > a - 2 \\ b < 0 \\ b > -a - 2 \end{cases}$$



よって，求める領域は，右の図の斜線部分で境界線を含まない．

(2) C の方程式から，$b = -xa + y - x^2$ であるから

$$g(a) = -xa + y - x^2$$

とおくと，$b = g(a)$ は，傾き $-x$，切片 $y - x^2$ の直線である．
これが (1) で求めた領域を通る条件，切片に注目して求めればよい．

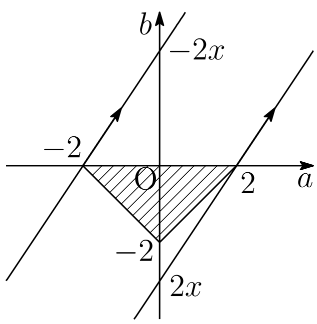
(i) $x \leqq -1$ のとき

$$2x < y - x^2 < -2x \quad \text{ゆえに} \quad x^2 + 2x < y < x^2 - 2x \ \ (x \leqq -1)$$

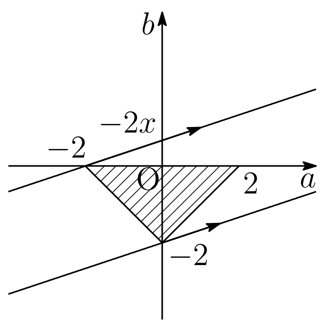
(ii) $-1 \leqq x \leqq 0$ のとき

$$-2 < y - x^2 < -2x \quad \text{ゆえに} \quad x^2 - 2 < y < x^2 - 2x \ \ (-1 \leqq x \leqq 0)$$

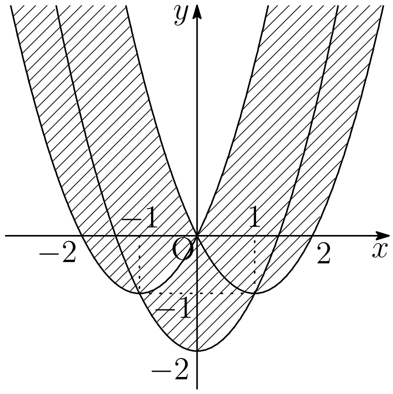
(i) $x \leqq -1$ のとき



(ii) $-1 \leqq x \leqq 0$ のとき



$C : y = x^2 + ax + b$ と放物線 $y = -x^2$ が $-1 < x < 0$ と $0 < x < 1$ の区間でそれぞれ共有点をもつから，x と $-x$ の対称性に注意すると，$x \leqq 0$ で C の通りうる範囲と $0 \leqq x$ で C の通りうる範囲は y 軸について対称である．よって，求める領域は，下の図の斜線部分で境界線を含まない．



$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $KA = LB$ より

$$KA - KB = LB - KB \quad \text{ゆえに} \quad K(A - B) = (L - K)B$$

$K,\ L$ をそれぞれ 4 で割った余りが等しいから　$L - K \equiv 0 \pmod 4$

$$K(A - B) \equiv 0 \pmod 4$$

K は正の奇数であるから　$A - B \equiv 0$　すなわち　$A \equiv B \pmod 4$

よって，A を 4 で割った余りは，B を 4 で割った余りと等しい．

(2) $A = {}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1} = \displaystyle\prod_{j=0}^{4b} \frac{4a+1-j}{4b+1-j}$，$B = {}_a\mathrm{C}_b = \displaystyle\prod_{k=0}^{b-1} \frac{a-k}{b-k}$ より

$$\begin{aligned}
A &= \prod_{j=0}^{4b} \frac{4a+1-j}{4b+1-j} \\
&= \prod_{k=0}^{b} \frac{4a+1-4k}{4b+1-4k} \prod_{k=0}^{b-1} \frac{4a+1-(4k+1)}{4b+1-(4k+1)} \\
&\qquad \times \prod_{k=0}^{b-1} \frac{4a+1-(4k+2)}{4b+1-(4k+2)} \prod_{k=0}^{b-1} \frac{4a+1-(4k+3)}{4b+1-(4k+3)} \\
&= (4a+1-4b) \prod_{k=0}^{b-1} \frac{4a+1-4k}{4b+1-4k} \prod_{k=0}^{b-1} \frac{a-k}{b-k} \\
&\qquad \times \prod_{k=0}^{b-1} \frac{4a-1-4k}{4b-1-4k} \prod_{k=0}^{b-1} \frac{2a-1-2k}{2b-1-2k} \\
&= (4a+1-4b)B \prod_{k=0}^{b-1} \frac{(4a+1-4k)(4a-1-4k)(2a-1-2k)}{(4b+1-4k)(4b-1-4k)(2b-1-2k)}
\end{aligned}$$

これから，正の奇数 K, L を

$$K = \prod_{k=0}^{b-1} (4b+1-4k)(4b-1-4k)(2b-1-2k)$$

$$L = (4a+1-4b) \prod_{k=0}^{b-1} (4a+1-4k)(4a-1-4k)(2a-1-2k)$$

とおくと，次式を満たす正の奇数 K, L が存在する．

$$A = \frac{LB}{K} \quad \text{すなわち} \quad KA = LB$$

(3) 2つの奇数 $K,\ L$ の因数は，法4について ($a-b$ は2で割り切れる)

$$\begin{aligned} &4a+1-4b \equiv 1 && \pmod 4 \\ &4b+1-4k \equiv 4a+1-4k && \pmod 4 \\ &4b-1-4k \equiv 4a-1-4k && \pmod 4 \\ &2b-1-2k = 2a-1-2k-2(a-b) \equiv 2a-1-2k && \pmod 4 \end{aligned}$$

したがって，2つの奇数 $K,\ L$ について　$K \equiv L \pmod 4$

これと $A = {}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$，$B = {}_a\mathrm{C}_b$ を (1) の結論に適用すると

$$(*) \quad {}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1} \equiv {}_a\mathrm{C}_b \qquad \pmod 4$$

よって，${}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$ を4で割った余りは，${}_a\mathrm{C}_b$ を4で割った余りと等しい．

(4) $(*)$ の左辺は $a=505,\ b=9$ を代入したもので $a-b$ は2で割り切れるから

$${}_{2021}\mathrm{C}_{37} \equiv {}_{505}\mathrm{C}_9 \qquad \pmod 4$$

さらに，上式の右辺は，$(*)$ の左辺に $a=126,\ b=2$ を代入したもので $a-b$ は2で割り切れるから

$${}_{505}\mathrm{C}_9 \equiv {}_{126}\mathrm{C}_2 \qquad \pmod 4$$

このとき　${}_{126}\mathrm{C}_2 = \dfrac{126\cdot 125}{2\cdot 1} = 63\cdot 125 \equiv 3\cdot 1 \equiv 3 \pmod 4$

したがって　${}_{2021}\mathrm{C}_{37} \equiv 3 \pmod 4$　よって　求める余りは　**3**