令和２年度　東京大学２次試験前期日程 (数学問題)100 分
文科 (一類，二類，三類)　数 **I・II・A・B**

1 $a > 0$，$b > 0$ とする．座標平面上の曲線

$$C : y = x^3 - 3ax^2 + b$$

が，以下の 2 条件を満たすとする．

条件 1：C は x 軸に接する．
条件 2：x 軸と C で囲まれた領域 (境界は含まない) に，x 座標と y 座標がともに整数である点がちょうど 1 個ある．

b を a で表し，a のとりうる値の範囲を求めよ．

2 座標平面上に 8 本の直線

$$x = a \quad (a = 1, 2, 3, 4), \qquad y = b \quad (b = 1, 2, 3, 4)$$

がある．以下，16 個の点

$$(a,\ b) \quad (a = 1, 2, 3, 4, \quad b = 1, 2, 3, 4)$$

から異なる 5 個の点を選ぶことを考える．

(1) 次の条件を満たす 5 個の点の選び方は何通りあるか．

上の 8 本の直線のうち，選んだ点を 1 個も含まないものがちょうど 2 本ある．

(2) 次の条件を満たす 5 個の点の選び方は何通りあるか．

上の 8 本の直線は，いずれも選んだ点を少なくとも 1 個含む．

$\boxed{\mathbf{3}}$ O を原点とする座標平面において，放物線

$$y = x^2 - 2x + 4$$

のうち $x \geqq 0$ を満たす部分を C とする．

(1) 点 P が C 上を動くとき，O を端点とする半直線 OP が通過する領域を図示せよ．

(2) 実数 a に対して，直線

$$l : y = ax$$

を考える．次の条件を満たす a の範囲を求めよ．

C 上の点 A と l 上の点 B で，3 点 O，A，B が正三角形の 3 頂点となるものがある．

$\boxed{\mathbf{4}}$ n，k を，$1 \leqq k \leqq n$ を満たす整数とする．n 個の整数

$$2^m \quad (m = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$$

から異なる k 個を選んでそれらの積をとる．k 個の整数の選び方すべてに対しこのように積をとることにより得られる ${}_n\mathrm{C}_k$ 個の整数の和を $a_{n,k}$ とおく．例えば，

$$a_{4,3} = 2^0{\cdot}2^1{\cdot}2^2 + 2^0{\cdot}2^1{\cdot}2^3 + 2^0{\cdot}2^2{\cdot}2^3 + 2^1{\cdot}2^2{\cdot}2^3 = 120$$

である．

(1) 2 以上の整数 n に対し，$a_{n,2}$ を求めよ．

(2) 1 以上の整数 n に対し，x についての整式

$$f_n(x) = 1 + a_{n,1}x + a_{n,2}x^2 + \cdots + a_{n,n}x^n$$

を考える．$\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$ と $\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)}$ を x についての整式として表せ．

(3) $\dfrac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}}$ を n，k で表せ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ $f(x)=x^3-3ax^2+b$ とおくと　$f'(x)=3x^2-6ax$

$C:y=f(x)$ の x 軸との接点の x 座標を t とすると，$f(t)=0$，$f'(t)=0$ より

$$(*)\begin{cases} t^3-3at^2+b=0 \\ 3t^2-6at=0 \end{cases}$$

$(*)$ の第 2 式から　$3t(t-2a)=0$　ゆえに　$t=0,\ 2a$

$t=0$ を $(*)$ の第 1 式に代入すると，$b=0$ となり，条件 $b>0$ に反し，不適.

$t=2a$ であるから，これを $(*)$ の第 1 式に代入すると

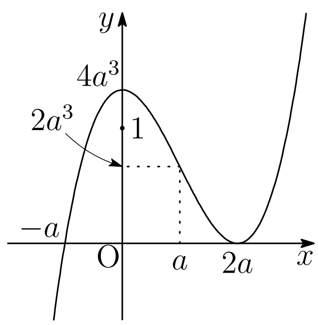
$$(2a)^3-3a\cdot(2a)^2+b=0\quad \text{ゆえに}\quad \boldsymbol{b=4a^3}$$

$$f(x)=(x+a)(x-2a)^2$$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$4a^3$	$\searrow$	0	$\nearrow$

x 軸と C で囲まれる区間は

$$-a\leqq x\leqq 2a$$



y 軸上の格子点 $(0,\ 1)$ に注目し，これが条件 2 の格子点でないと仮定すると，この区間において

$$0\leqq f(x)\leqq 1$$

となり，条件 2 を満たす格子点は存在しない.

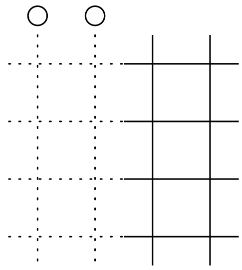
ゆえに，条件 2 を満たす格子点は $(0,\ 1)$ である．したがって

$$1<4a^3\leqq 2\quad \text{これを解いて}\quad \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt[3]{4}}<a\leqq\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ 問題の直線をここでは簡単に行・列と呼び，交点を格子点と呼ぶことにする．

(1) (i) 選んだ点を 1 個も含まない直線 2 本 (○印) が (縦と横に) 平行なとき，この直線上にない 8 個の格子点から 5 個の格子点を次のように選ぶ．

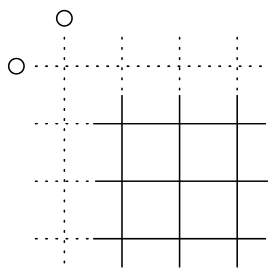
平行な 2 本の直線 (${}_4C_2 \cdot 2$ 通り) に垂直な 4 本の直線に，1 本には 2 個の点を置き (${}_4C_1$ 通り)，残り 3 本の直線には 1 個ずつ点を置く (2^3 通り) 並べ方は



$$ {}_4C_2 \cdot 2 \times {}_4C_1 \times 2^3 = 384 \text{ (通り)} $$

(ii) 選んだ点を 1 個も含まない直線 2 本 (○印) が垂直なとき，この直線上にない 9 個の格子点から 5 個の格子点を次のように選ぶ．

垂直な 2 本の直線 (4^2 通り) 上にない 9 個の格子点から 5 個を選ぶとき，5 個の格子点が特定の 2 本の直線上にある場合を除くから，その総数は



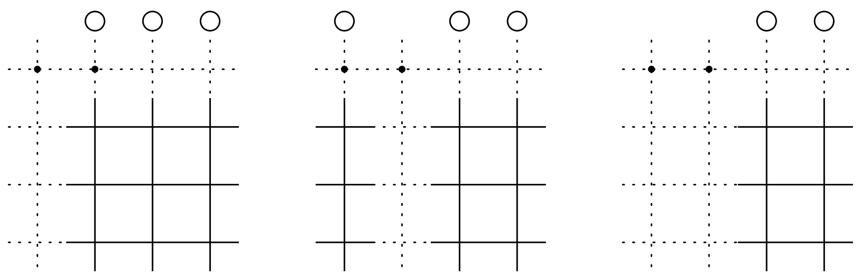
$$ 4^2 \times ({}_9C_5 - 6 \times {}_6C_5) = 1440 \text{(通り)} $$

(i)，(ii) より，求める場合の数は　$384 + 1440 = \mathbf{1824}$ (通り)

(2) 4 行のうち 1 行は 2 個の格子点があり (${}_4C_1 \cdot {}_4C_2$ 通り)，残りの 3 行には 1 個の格子点がある．2 個の格子点がある直線に対して，残り 3 個の格子点を下の図の 3 列 (○印) または 2 列 (○印) に格子点を並べる場合である．

残り 3 個の格子点が 3 列に並ぶ場合の数は　$3! = 6$ (通り)

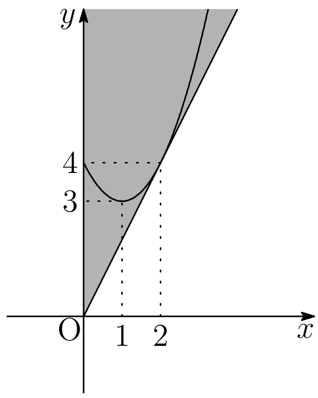
残り 3 個の格子点が 2 列に並ぶ場合の数は　$2^3 - 2 = 6$ (通り)



よって求める総数は　${}_4C_1 \cdot {}_4C_2 \times (6 + 6 + 6) = \mathbf{432}$ (通り)

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $y = x^2 - 2x + 4$ に接する直線を $y = kx$ とおいて，2 式から y を消去すると

$$x^2 - 2x + 4 = kx$$



ゆえに　$x^2 - (k+2)x + 4 = 0$

この方程式の係数について

$$(k+2)^2 - 4{\cdot}1{\cdot}4 = 0$$

したがって　$(k+6)(k-2) = 0$　$k > 0$ に注意して　$k = 2$

よって　$\boldsymbol{x \geqq 0,\ y \geqq 2x}$　**図の灰色の部分で境界を含む.**

(2) (1) の結果から，$\tan\theta = 2$ とおくと

$$\tan\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) \leqq a \leqq \tan\frac{\pi}{6},\quad \tan\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \leqq a \leqq \tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$$

ここで

$$\tan\left(\theta \pm \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\tan\theta \pm \tan\frac{\pi}{3}}{1 \mp \tan\theta\tan\frac{\pi}{3}} = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{1 \mp 2\sqrt{3}} = \frac{(2 \pm \sqrt{3})(1 \pm 2\sqrt{3})}{(1 \mp 2\sqrt{3})(1 \pm 2\sqrt{3})}$$

$$= \frac{8 \pm 5\sqrt{3}}{-11} = \frac{-8 \mp 5\sqrt{3}}{11}\quad \text{(複号同順)}$$

よって　$\boldsymbol{\dfrac{-8+5\sqrt{3}}{11} \leqq a \leqq \dfrac{1}{\sqrt{3}},\quad \dfrac{-8-5\sqrt{3}}{11} \leqq a \leqq -\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 等式 $(x_0+x_1+\cdots+x_{n-1})^2=\sum_{k=0}^{n-1}{x_k}^2+2\sum_{0\leqq i<j\leqq n-1}x_ix_j$

において，$x_m=2^m$ とすると $(m=0,1,\ldots,n-1)$

$$(2^0+2^1+\cdots+2^{n-1})^2=\sum_{k=0}^{n-1}(2^k)^2+2\sum_{0\leqq i<j\leqq n-1}2^i\cdot 2^j$$

$$\left(\frac{2^n-1}{2-1}\right)^2=\frac{4^n-1}{4-1}+2a_{n,2}$$

$$4^n-2\cdot 2^n+1=\frac{1}{3}\cdot 4^n-\frac{1}{3}+2a_{n,2}$$

ゆえに　$a_{n,2}=\frac{1}{3}\cdot 4^n-2^n+\frac{2}{3}$　よって　$\boldsymbol{a_{n,2}=\frac{1}{3}(2^n-1)(2^n-2)}$

(2) $f_n(x)=1+a_{n,1}x+a_{n,2}x^2+\cdots+a_{n,n}x^n$ の定義により，次式が成立する．

$$f_n(x)=1+\sum_{k=1}^{n}a_{n,k}x^k=\prod_{k=1}^{n}(1+2^{k-1}x)\quad\cdots(*)$$

したがって

$$\begin{aligned}f_{n+1}(x)&=\prod_{k=1}^{n+1}(1+2^{k-1}x)=(1+2^nx)\prod_{k=1}^{n}(1+2^{k-1}x)\\&=(1+2^nx)f_n(x),\\f_{n+1}(x)&=\prod_{k=1}^{n+1}(1+2^{k-1}x)=(1+x)\prod_{k=2}^{n+1}(1+2^{k-1}x)\\&=(1+x)\prod_{k=1}^{n}(1+2^{k-1}\cdot 2x)=(1+x)f_n(2x)\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}=1+2^nx,\quad \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)}=1+x}$

(3) (2) で示した

$$(**)\begin{cases} f_{n+1}(x)=(1+2^n x)f_n(x) \\ f_{n+1}(x)=(1+x)f_n(2x) \end{cases}$$

の第 1 式から　$f_{n+1}(2x)=(1+2^{n+1}x)f_n(2x)$

これと $(**)$ の第 2 式の辺々の差をとると

$$f_{n+1}(2x)-f_{n+1}(x)=(2^{n+1}-1)xf_n(2x) \qquad \text{(A)}$$

$(*)$ より

$$\begin{aligned} f_{n+1}(2x)-f_{n+1}(x) &= 1+\sum_{k=1}^{n+1}a_{n+1,k}(2x)^k-\left\{1+\sum_{k=1}^{n+1}a_{n+1,k}x^k\right\} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1}(2^k-1)a_{n+1,k}x^k \\ &= a_{n+1,1}x+\sum_{k=2}^{n+1}(2^k-1)a_{n+1,k}x^k \\ &= (2^{n+1}-1)x+\sum_{k=1}^{n}(2^{k+1}-1)a_{n+1,k+1}x^{k+1} \qquad \text{(B)} \\ (2^{n+1}-1)xf_n(2x) &= (2^{n+1}-1)x\left\{1+\sum_{k=1}^{n}a_{n,k}(2x)^k\right\} \\ &= (2^{n+1}-1)x+(2^{n+1}-1)\sum_{k=1}^{n}2^k a_{n,k}x^{k+1} \qquad \text{(C)} \end{aligned}$$

(B)，(C) を (A) に代入して，整理すると

$$\sum_{k=1}^{n}(2^{k+1}-1)a_{n+1,k+1}x^{k+1}=(2^{n+1}-1)\sum_{k=1}^{n}2^k a_{n,k}x^{k+1}$$

上式の同じ次数の項の係数は等しいから

$$(2^{k+1}-1)a_{n+1,k+1}=(2^{n+1}-1)2^k a_{n,k}$$

よって
$$\boldsymbol{\frac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}}=\frac{(2^{n+1}-1)2^k}{2^{k+1}-1}}$$