平成31年度　東京大学2次試験前期日程 (数学問題)100分
文科 (一類，二類，三類)　数I・II・A・B

$\boxed{\mathbf{1}}$ 座標平面の原点をOとし，O，A(1, 0)，B(1, 1)，C(0, 1) を辺の長さが1の正方形の頂点とする．3点P(p, 0)，Q(0, q)，R(r, 1) はそれぞれ辺OA，OC，BC上にあり，3点O，P，Qおよび3点P，Q，Rはどちらも面積が $\dfrac{1}{3}$ の三角形の3頂点であるとする．

(1) q と r を p で表し，p，q，r それぞれのとりうる値の範囲を求めよ．

(2) $\dfrac{\mathrm{CR}}{\mathrm{OQ}}$ の最大値，最小値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ Oを原点とする座標平面において，点A(2, 2) を通り，線分OAと垂直な直線を l とする．座標平面上を点P(p, q) が次の2つの条件をみたしながら動く．

条件1：$8 \leqq \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} \leqq 17$

条件2：点Oと直線 l の距離を c とし，点P(p, q) と直線 l の距離を d とするとき $cd \geqq (p-1)^2$

このとき，Pが動く領域を D とする．さらに，x 軸の正の部分と線分OPのなす角を θ とする．

(1) D を図示し，その面積を求めよ．

(2) $\cos\theta$ のとりうる値の範囲を求めよ．

3 正八角形の頂点を反時計回りにA，B，C，D，E，F，G，Hとする．また，投げたとき表裏の出る確率がそれぞれ$\dfrac{1}{2}$のコインがある．点Pが最初に点Aにある．次の操作を10回繰り返す．

操作：コインを投げ，表が出れば点Pを反時計回りに隣接する頂点に移動させ，裏が出れば点Pを時計回りに隣接する頂点に移動させる．

例えば，点Pが点Hにある状態で，投げたコインの表が出れば点Aに移動させ，裏が出れば点Gに移動させる．以下の事象を考える．

事象S：操作を10回行った後に点Pが点Aにある．

事象T：1回目から10回目の操作によって，点Pは少なくとも1回，点Fに移動する．

(1) 事象Sが起こる確率を求めよ．

(2) 事象Sと事象Tがともに起こる確率を求めよ．

4 Oを原点とする座標平面を考える．不等式

$$|x| + |y| \leqq 1$$

が表す領域をDとする．また，点P，Qが領域Dを動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$をみたす点Rが動く範囲を$E$とする．

(1) D，Eをそれぞれ図示せよ．

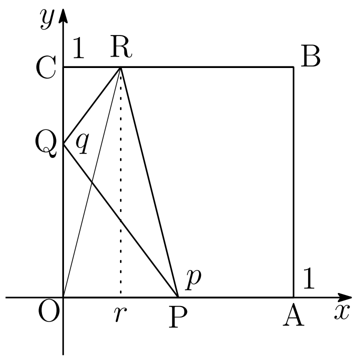
(2) a，bを実数とし，不等式

$$|x-a| + |y-b| \leqq 1$$

が表す領域をFとする．また，点S，Tが領域Fを動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OU}} = \overrightarrow{\mathrm{OS}} - \overrightarrow{\mathrm{OT}}$をみたす点Uが動く範囲を$G$とする．$G$は$E$と一致することを示せ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\triangle\mathrm{OPQ} = \dfrac{1}{2}pq = \dfrac{1}{3}$ より　$p = \dfrac{2}{3q}$，$q = \dfrac{2}{3p}$



$0 < p \leqq 1$，$0 < q \leqq 1$ より

$$0 < \frac{2}{3q} \leqq 1,\quad 0 < \frac{2}{3p} \leqq 1$$

よって　$\boldsymbol{q = \dfrac{2}{3p},\ \ \dfrac{2}{3} \leqq p \leqq 1,\ \ \dfrac{2}{3} \leqq q \leqq 1}$

$\triangle\mathrm{OPR} + \triangle\mathrm{OQR} = \triangle\mathrm{OPQ} + \triangle\mathrm{PQR}$ より

$$\frac{1}{2}p\cdot 1 + \frac{1}{2}qr = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\quad \text{ゆえに}\quad p + qr = \frac{4}{3}$$

上の第 2 式に $q = \dfrac{2}{3p}$ を代入すると

$$p + \frac{2}{3p}\cdot r = \frac{4}{3}\quad \text{ゆえに}\quad \boldsymbol{r = -\frac{3}{2}p^2 + 2p} = -\frac{3}{2}\left(p - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}$$

$\dfrac{2}{3} \leqq p \leqq 1$ であるから　　$\boldsymbol{\dfrac{1}{2} \leqq r \leqq \dfrac{2}{3}}$

(2) (1) の結果から

$$\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{OQ}} = \frac{r}{q} = \frac{3p}{2}\left(-\frac{3}{2}p^2 + 2p\right) = -\frac{9}{4}p^3 + 3p^2$$

$f(p) = -\dfrac{9}{4}p^3 + 3p^2$ とおくと $\left(\dfrac{2}{3} \leqq p \leqq 1\right)$

$$f'(p) = -\frac{27}{4}p^2 + 6p = -\frac{27}{4}p\left(p - \frac{8}{9}\right)$$

したがって，$f(p)$ の増減表は，次のようになる．

p	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	$\frac{8}{9}$	$\cdots$	1
$f'(p)$		$+$	0	$-$	
$f(p)$	$\frac{2}{3}$	↗	$\frac{64}{81}$	↘	$\frac{3}{4}$

よって　最大値 $\boldsymbol{\dfrac{64}{81}}$，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) A(2, 2)，P(p, q) より　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(2,\ 2)$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(p,\ q)$

これらを条件 1 に適用すると

$$8 \leqq 2p+2q \leqq 17 \quad \text{ゆえに} \quad 4 \leqq p+q \leqq \frac{17}{2} \quad \cdots①$$

線分 OA に垂直な直線の傾きは　-1

直線 l は点 A(2, 2) を通り傾き -1 であるから

$$y-2=-1(x-2) \quad \text{すなわち} \quad x+y=4$$

$c=\mathrm{OA}$ であるから　$c=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

P(p, q) から直線 l までの距離 d は，① に注意して

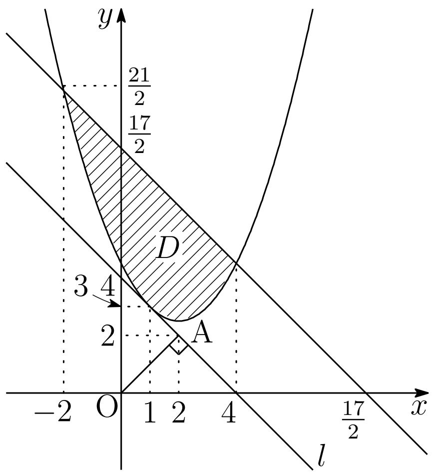
$$d=\frac{|p+q-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{p+q-4}{\sqrt{2}}$$

$cd \geqq (p-1)^2$ より

$$2\sqrt{2}\cdot\frac{p+q-4}{\sqrt{2}} \geqq (p-1)^2 \quad \text{ゆえに} \quad q \geqq \frac{1}{2}p^2-2p+\frac{9}{2}$$

D の表す領域は，上式および ① より

$$\begin{cases} y \leqq -x+\dfrac{17}{2} \\ y \geqq \dfrac{1}{2}x^2-2x+\dfrac{9}{2} \end{cases}$$



上の 2 式の境界線は

$$\begin{cases} y = -x+\dfrac{17}{2} \\ y = \dfrac{1}{2}x^2-2x+\dfrac{9}{2} \end{cases}$$

上の 2 式から y を消去すると

$$-x+\frac{17}{2}=\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{9}{2} \quad \text{これを解いて} \quad x=-2,\ 4$$

領域 D の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{4}\left\{\left(-x+\frac{17}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{9}{2}\right)\right\}dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_{-2}^{4}(x+2)(x-4)\,dx = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}\right)(4+2)^3 = \mathbf{18} \end{aligned}$$

(2) 直線 $y=kx$ および放物線 $y=\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{9}{2}$ の共有点について

$$\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{9}{2}=kx \quad \text{ゆえに} \quad x^2-2(k+2)x+9=0 \quad \cdots②$$

これらの直線と放物線が接するとき，係数について

$$(k+2)^2-9=0 \quad \text{すなわち} \quad k=1,-5$$

共有点の x 座標は，$x=k+2$ より　$x=\pm 3$
θ は $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(p,\ q)$ とベクトル $(1,\ 0)$ のなす角であるから

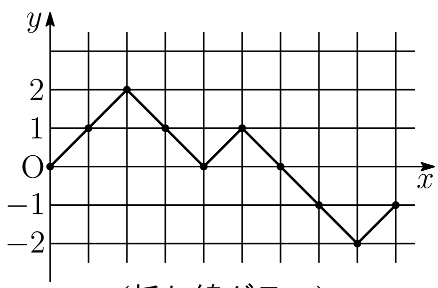
$$\cos\theta=\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}$$

$\cos\theta$ は $\mathrm{P}(3,\ 3)$ で最大となり，$\mathrm{P}\left(-2,\frac{21}{2}\right)$ で最小となるから

$$\frac{-2}{\sqrt{(-2)^2+\left(\frac{21}{2}\right)^2}} \leqq \cos\theta \leqq \frac{3}{\sqrt{3^2+3^2}}$$

よって　$$\boldsymbol{-\frac{4}{\sqrt{457}} \leqq \cos\theta \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

3 座標平面上の原点 O から右斜め 45°，または右斜め −45° の方向に最も近い第 1 番目の格子点をとり，この 2 点を線分で結ぶ．同様にして第 1 番目の格子点から第 2 番目の格子点をとり，第 1 番目と第 2 番目を線分で結ぶ．以下これを有限回繰り返し，こうしてできる線分をつないだものを**折れ線グラフ**ということにする．右図は原点 O と格子点 $(9,-1)$ を結ぶ折れ線グラフの例である．



(折れ線グラフ)

n を自然数，k を $|k|\leqq n$ を満たす整数とする．原点 O から格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフが存在するとき ($n+k$ が偶数)，右斜め 45° の方向に $\frac{n+k}{2}$ 回，右斜め $-45°$ の方向に $\frac{n-k}{2}$ 回進む．原点 O から格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフの数は ${}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}}$ であるから，格子点 $(n,\ k)$ にある確率は

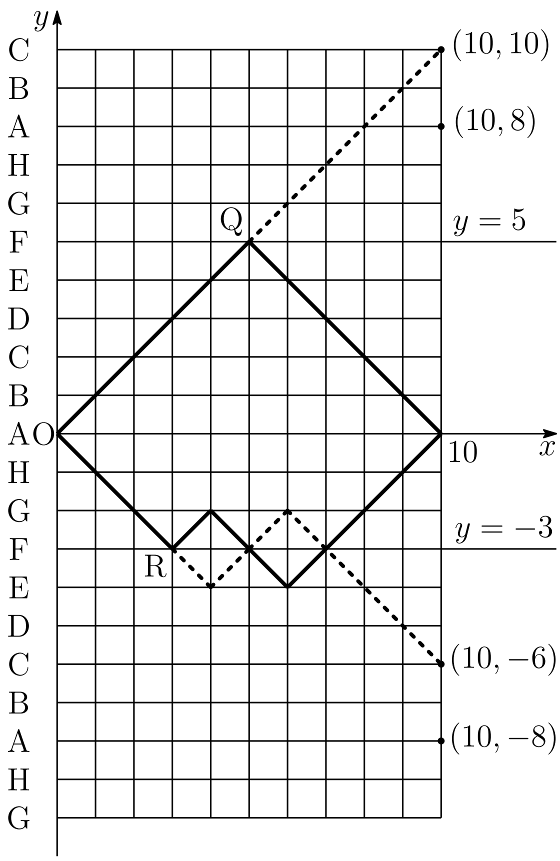
$$P_n(k)=\frac{{}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}}}{2^n}$$

(1) コインの表，裏により，格子点上の点 P がそれぞれ右斜め 45°，右斜め -45° 方向の最も近い格子点に移動するものとする．格子点 $(n,\ k)$ にあるとき，$k \equiv 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7 \pmod 8$ を，それぞれ，A，B，C，D，E，F，G，H に対応させる．操作を 10 回行って点 P が点 A にあるとき，$k = 0, \pm 8$ であるから，求める確率は

$$\begin{aligned} P_{10}(0) + P_{10}(8) + P_{10}(-8) &= \frac{{}_{10}\mathrm{C}_{\frac{10+0}{2}}}{2^{10}} + \frac{{}_{10}\mathrm{C}_{\frac{10+8}{2}}}{2^{10}} + \frac{{}_{10}\mathrm{C}_{\frac{10-8}{2}}}{2^{10}} \\ &= \frac{1}{2^{10}}({}_{10}\mathrm{C}_5 + {}_{10}\mathrm{C}_9 + {}_{10}\mathrm{C}_1) \\ &= \frac{1}{2^{10}}(252 + 10 + 10) = \boldsymbol{\frac{17}{64}} \end{aligned}$$

(2) 原点 O と点 $(10,\ 0)$ を結ぶ折れ線グラフで最初に直線 $y = 5$ と交わる点を Q とすると，点 Q と点 $(10,\ 0)$ を結ぶ折れ線グラフの本数と点 Q と点 $(10, 10)$ を結ぶ折れ線グラフの本数は等しい (鏡像原理)．同様に，原点 O と点 $(10,\ 0)$ を結ぶ折れ線グラフで最初に直線 $y = -3$ と交わる点を R とすると，点 R と点 $(10,\ 0)$ を結ぶ折れ線グラフの本数と点 R と点 $(10, -6)$ を結ぶ折れ線グラフの本数は等しい．よって，求める確率は

$$\begin{aligned} &P_{10}(8) + P_{10}(-8) \\ &\qquad + P_{10}(10) + P_{10}(-6) \\ &= \frac{{}_{10}\mathrm{C}_9}{2^{10}} + \frac{{}_{10}\mathrm{C}_1}{2^{10}} + \frac{{}_{10}\mathrm{C}_{10}}{2^{10}} + \frac{{}_{10}\mathrm{C}_2}{2^{10}} \\ &= \frac{10 + 10 + 1 + 45}{2^{10}} = \boldsymbol{\frac{33}{512}} \end{aligned}$$



補足 操作を 10 回行った後に点 P が点 E にあるとき，10 回目ではじめて点 E に達する条件付き確率について考えてみる．

8 回目以前ですでに点 E を通過する折れ線グラフは，点 $(9, \pm 5)$ または点 $(9, \pm 3)$ と点 $(10, \pm 4)$ を結ぶ (複号同順)．原点 O と点 $(10, \pm 4)$ を結ぶ折れ線グラフで最初に $y = \pm 4$ と交わる点を S とすると，点 S と点 $(10, \pm 5)$ を結ぶ折れ線グラフの本数と点 S と点 $(10, \pm 3)$ を結ぶ折れ線グラフの本数は鏡像原理により等しい (複号同順)．したがって，10 回目で初めて点 E に達する折れ線グラフの本数は

$$({}_{10}\mathrm{C}_{\frac{10+4}{2}} - 2\cdot{}_{9}\mathrm{C}_{\frac{9+5}{2}}) + ({}_{10}\mathrm{C}_{\frac{10-4}{2}} - 2\cdot{}_{9}\mathrm{C}_{\frac{9-5}{2}}) = 2({}_{10}\mathrm{C}_7 - 2\cdot{}_{9}\mathrm{C}_7) \quad (\text{本})$$

求める確率は $\quad \dfrac{2({}_{10}\mathrm{C}_7 - 2\cdot{}_{9}\mathrm{C}_7)}{2\cdot{}_{10}\mathrm{C}_7} = \dfrac{2}{5}$

一般に，原点 O と点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフで，n 回目で初めて $y = k$ に達する折れ線グラフの本数は

$${}_{n}\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}} - 2 \times {}_{n-1}\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}} = {}_{n}\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}} - 2 \times \frac{n-k}{2n}\cdot{}_{n}\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}} = \frac{k}{n} \times {}_{n}\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}}$$

これは，原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフの本数の $\dfrac{k}{n}$ 倍．

よって，求める条件付き確率は $\dfrac{k}{n}$ となる．

$\boxed{\textbf{4}}$ (1) 領域 D にある 2 点 P，Q の座標を，それぞれ $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ とすると

$$|x_1| + |y_1| \leqq 1, \quad |x_2| + |y_2| \leqq 1$$

したがって

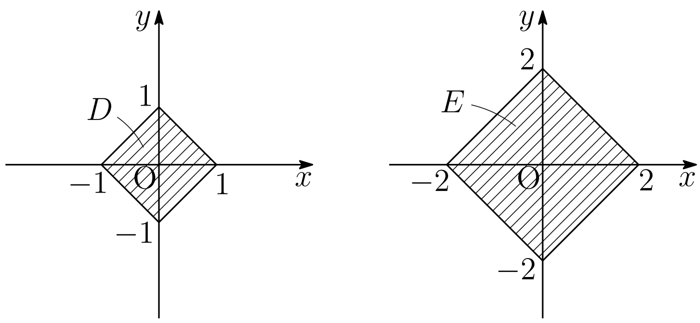
$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (x_1 - x_2,\ y_1 - y_2)$$

$\mathrm{R}(x,\ y)$ とおくと

$$|x| + |y| = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \leqq |x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2| \leqq 2$$

したがって，領域 E の表す不等式は　$|x| + |y| \leqq 2$

よって，D，E の表す領域を図示すると



(2) 領域 F にある 2 点 S，T の座標を，それぞれ $(x_3,\ y_3)$，$(x_4,\ y_4)$ とすると

$$|x_3 - a| + |y_3 - b| \leqq 1, \quad |x_4 - a| + |y_4 - b| \leqq 1$$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{OU}} = \overrightarrow{\mathrm{OS}} - \overrightarrow{\mathrm{OT}} = (x_3,\ y_3) - (x_4,\ y_4) = (x_3 - x_4,\ y_3 - y_4)$$

$\mathrm{U}(x,\ y)$ とおくと

$$\begin{aligned} |x| + |y| &= |x_3 - x_4| + |y_3 - y_4| \\ &= |(x_3 - a) - (x_4 - a)| + |(y_3 - b) - (y_4 - b)| \\ &\leqq |x_3 - a| + |y_3 - b| + |x_4 - a| + |y_4 - b| \leqq 2 \end{aligned}$$

よって，$G : |x| + |y| \leqq 2$ の表す領域は E と一致する．