平成30年度　東京大学2次試験前期日程(数学問題)100分
文科(一類，二類，三類)　数I・II・A・B

1 座標平面上に放物線 C を

$$y = x^2 - 3x + 4$$

で定め，領域 D を

$$y \geqq x^2 - 3x + 4$$

で定める．原点をとおる2直線 l，m は C に接するものとする．

(1) 放物線 C 上を動く点Aと直線 l，m の距離をそれぞれ L，M とする．$\sqrt{L} + \sqrt{M}$ が最小値をとるときの点Aの座標を求めよ．

(2) 次の条件をみたす点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ の動きうる範囲を求め，座標平面上に図示せよ．

条件：領域 D のすべての点 $(x,\ y)$ に対し不等式 $px + qy \leqq 0$ がなりたつ．

2 数列 a_1，a_2，$\cdots$ を

$$a_n = \frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n!} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

で定める．

(1) a_7 と1の大小を調べよ．

(2) $n \geqq 2$ とする．$\dfrac{a_n}{a_{n-1}} < 1$ をみたす n の範囲を求めよ．

(3) a_n が整数となる $n \geqq 1$ をすべて求めよ．

3 $a > 0$ とし，

$$f(x) = x^3 - 3a^2x$$

とおく．

(1) $x \geqq 1$ で $f(x)$ が単調に増加するための，a についての条件を求めよ．

(2) 次の2条件をみたす点 $(a,\ b)$ の動きうる範囲を求め，座標平面上に図示せよ．

条件1：方程式 $f(x) = b$ は相異なる3実数解をもつ．
条件2：さらに，方程式 $f(x) = b$ の解を $\alpha < \beta < \gamma$ とすると $\beta > 1$ である．

$\boxed{\textbf{4}}$ 放物線 $y = x^2$ のうち $-1 \leqq x \leqq 1$ をみたす部分を C とする．座標平面上の原点Oと点A(1, 0)を考える．

(1) 点Pが C 上を動くとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

をみたす点Qの軌跡を求めよ．

(2) 点Pが C 上を動き，点Rが線分OA上を動くとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OR}}$$

をみたす点Sが動く領域を座標平面上に図示し，その面積を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $C: y = x^2 - 3x + 4$ より　$y' = 2x - 3$

C 上の点 $(t,\ t^2 - 3t + 4)$ における接線の方程式は

$$y - (t^2 - 3t + 4) = (2t - 3)(x - t) \quad \text{ゆえに} \quad y = (2t - 3)x - t^2 + 4$$

この接線が原点を通るとき　$-t^2 + 4 = 0$　これを解いて　$t = \pm 2$

したがって，2 直線 l，m の方程式は　　$x - y = 0,\ \ 7x + y = 0$

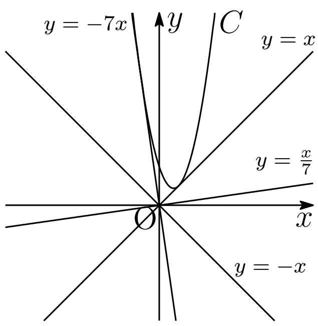
C 上の点 A の座標を $(a,\ a^2 - 3a + 4)$ とすると

$$\sqrt{L} + \sqrt{M} = \sqrt{\frac{|a - (a^2 - 3a + 4)|}{\sqrt{2}}} + \sqrt{\frac{|7a + (a^2 - 3a + 4)|}{5\sqrt{2}}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt[4]{2}}(\sqrt{5}\,|a - 2| + |a + 2|)$$

このとき　$\sqrt{5}\,|a-2|+|a+2| = \begin{cases} -(1+\sqrt{5})a - 2 + 2\sqrt{5} & (a < -2) \\ (1-\sqrt{5})a + 2 + 2\sqrt{5} & (-2 \leqq a \leqq 2) \\ (1+\sqrt{5})a + 2 - 2\sqrt{5} & (2 < a) \end{cases}$

したがって，$\sqrt{L} + \sqrt{M}$ が最小となるのは，$-2 \leqq a \leqq 2$ の範囲であり，$a = 2$ のときである．このとき，点 A の座標は　**(2, 2)**

(2) 領域 D 内の点 $(x,\ y)$ に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OX}} = (x,\ y)$ とすると



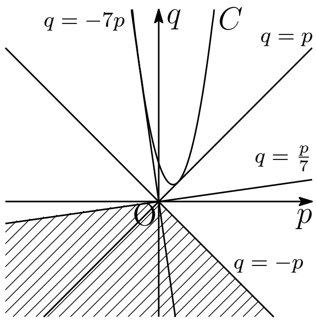
$$px + qy = \overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OX}} \leqq 0 \quad \cdots (*)$$

l，m に垂直な 2 直線は

$$y = -x, \quad y = \frac{x}{7}$$

$(*)$ を満たす点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ は

$$\begin{cases} q \leqq -p \\ q \leqq \dfrac{p}{7} \end{cases}$$



よって，その領域は，右の図の斜線部分である．ただし，境界線を含む．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $a_n = \dfrac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n!}$ より $(n = 1, 2, \cdots)$

$$a_7 = \frac{{}_{14}\mathrm{C}_7}{7!} = \frac{14{\cdot}13{\cdot}12{\cdot}11{\cdot}10{\cdot}9{\cdot}8}{(7!)^2} = \frac{2^4{\cdot}7{\cdot}6{\cdot}5{\cdot}4 \times 13{\cdot}11{\cdot}9}{(7!)^2}$$
$$= \frac{2^4{\cdot}13{\cdot}11{\cdot}9}{3!{\cdot}7!} = \frac{13{\cdot}11}{7{\cdot}6{\cdot}5} = \frac{143}{210} < 1$$

(2) $a_n = \dfrac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n!} = \dfrac{(2n)!}{(n!)^3}$ より $(n = 1, 2, \cdots)$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(2n)!}{(n!)^3}\cdot\frac{\{(n-1)!\}^3}{(2n-2)!} = \frac{2n(2n-1)}{n^3} = \frac{2(2n-1)}{n^2}$$

ゆえに　$1 - \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = 1 - \dfrac{2(2n-1)}{n^2} = \dfrac{(n-2)^2 - 2}{n^2} > 0$

上式をみたす n の値の範囲は　$\boldsymbol{n \geqq 4}$

(3)　$a_1 = \dfrac{{}_2\mathrm{C}_1}{1!} = 2$，$a_2 = \dfrac{{}_4\mathrm{C}_2}{2!} = 3$，

また　$a_3 = \dfrac{6!}{(3!)^3}$，　$a_4 = \dfrac{8!}{(4!)^3}$，　$a_5 = \dfrac{10!}{(5!)^3}$，　$a_6 = \dfrac{12!}{(6!)^3}$

a_3，a_4 の既約分数は，その分母に素因数 3 がある．

a_5，a_6 の既約分数は，その分母に素因数 5 がある．

(1)，(2) の結果から，$n \geqq 7$ のとき　$0 < a_n < 1$

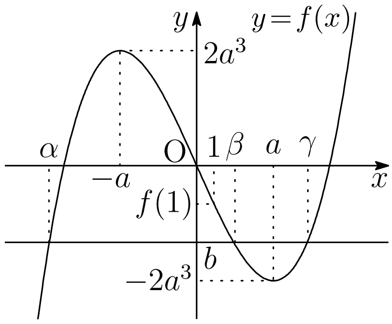
よって，a_n が整数となる $n \geqq 1$ は　　$\boldsymbol{n = 1,\ 2}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $f(x) = x^3 - 3a^2x$ より

$$f'(x) = 3x^2 - 3a^2 = 3(x+a)(x-a)$$

$f(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$2a^3$	$\searrow$	$-2a^3$	$\nearrow$



$x \geqq 1$ で $f(x)$ が単調に増加するから，$a > 0$ に注意して　$\boldsymbol{0 < a \leqq 1}$

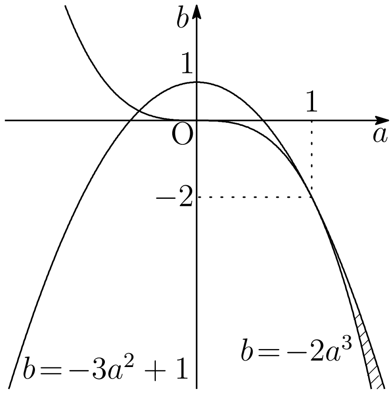
(2) $f(x) = b$ の解 $\alpha < \beta < \gamma$ について，$\beta > 1$ であるから，右上の図より

$$1 < a, \quad -2a^3 < b < f(1)$$

したがって

$$\boldsymbol{-2a^3 < b < -3a^2 + 1 \ \ (a > 1)}$$

点 $(a,\ b)$ の満たす領域は，右の図の斜線部分で，境界線を含まない．



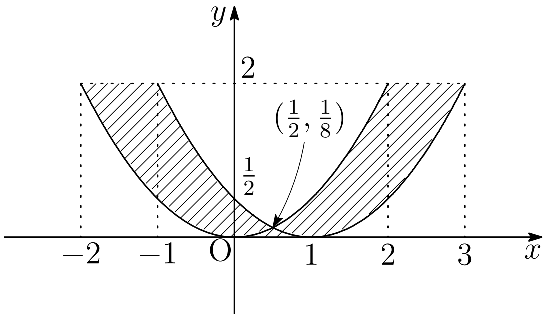
$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ に対して $(-1 \leqq t \leqq 1)$，点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ は，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ より

$$(x,\ y) = 2(t,\ t^2) \quad \text{ゆえに} \quad x = 2t,\ y = 2t^2$$

上の 2 式から t を消去すると　$\boldsymbol{y = \dfrac{x^2}{2}\ \ (-2 \leqq x \leqq 2)}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OR}}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \overrightarrow{\mathrm{OR}}$

したがって，点 S が動く領域は，(1) で求めた Q の軌跡を x 軸方向に 1 だけ平行移動するときに描く図形であるから，次の図の斜線部分である．

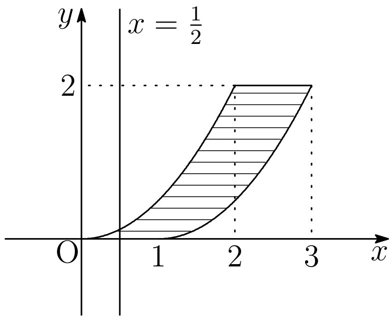


右の図の斜線部分の面積は，カバリエリの原理により

$$1 \cdot 2 = 2$$

斜線部分の $0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$ における面積は

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{2}\,dx = \left[\ \frac{x^3}{6}\ \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{48}$$



図形は直線 $x = \dfrac{1}{2}$ に関して対称であるから，求める図形の面積は

$$2\left(2 - \frac{1}{48}\right) = \boldsymbol{\frac{95}{24}}$$