

平成29年度 東京大学2次試験前期日程(数学問題)100分
文科(一類, 二類, 三類) 数I・II・A・B

問題 1 2 3 4

1 座標平面において2つの放物線 $A: y = s(x-1)^2$ と $B: y = -x^2 + t^2$ を考える. ただし, s, t は実数で, $0 < s, 0 < t < 1$ をみたすとする. 放物線 A と x 軸および y 軸で囲まれる領域の面積を P とし, 放物線 B の $x \geq 0$ の部分と x 軸および y 軸で囲まれる領域の面積を Q とする. A と B がただ1点を共有するとき, $\frac{Q}{P}$ の最大値を求めよ.

2 1辺の長さが1の正六角形 $ABCDEF$ が与えられている. 点 P が辺 AB 上を, 点 Q が辺 CD 上をそれぞれ独立に動くとき, 線分 PQ を $2:1$ に内分する点 R が通りうる範囲の面積を求めよ.

3 座標平面上で x 座標と y 座標がいずれも整数である点を格子点という. 格子点上を次の規則 (a), (b) に従って動く点 P を考える.

(a) 最初に, 点 P は原点 O にある.

(b) ある時刻で点 P が格子点 (m, n) にあるとき, その1秒後の点 P の位置は, 隣接する格子点 $(m+1, n), (m, n+1), (m-1, n), (m, n-1)$ のいずれかであり, また, これらの点に移動する確率は, それぞれ $\frac{1}{4}$ である.

(1) 最初から1秒後の点 P の座標を (s, t) とする. $t-s = -1$ となる確率を求めよ.

(2) 点 P が, 最初から6秒後に直線 $y = x$ 上にある確率を求めよ.

4 $p = 2 + \sqrt{5}$ とおき, 自然数 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して

$$a_n = p^n + \left(-\frac{1}{p}\right)^n$$

と定める. 以下の問いに答えよ. ただし設問 (1) は結論のみを書けばよい.

(1) a_1, a_2 の値を求めよ.

(2) $n \geq 2$ とする. 積 $a_1 a_n$ を, a_{n+1} と a_{n-1} を用いて表せ.

(3) a_n は自然数であることを示せ.

(4) a_{n+1} と a_n の最大公約数を求めよ.

解答例

- 1 (1) $A: y = s(x-1)^2$ と $B: y = -x^2 + t^2$ から y を消去して、整理すると

$$(s+1)x^2 - 2sx + s - t^2 = 0$$

A と B は接するので、上式の係数について

$$(-s)^2 - (s+1)(s-t^2) = 0$$

これを s について解くと $s = \frac{t^2}{1-t^2}$

$$\text{ゆえに } P = \int_0^1 s(x-1)^2 dx = \left[\frac{s}{3}(x-1)^3 \right]_0^1 = \frac{s}{3} = \frac{t^2}{3(1-t^2)}$$

$$Q = \int_0^t (-x^2 + t^2) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + t^2x \right]_0^t = \frac{2t^3}{3}$$

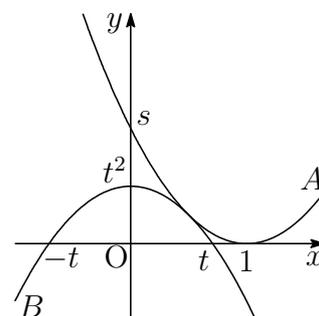
$$\text{したがって } \frac{Q}{P} = \frac{2t^3}{3} \cdot \frac{3(1-t^2)}{t^2} = 2t - 2t^3$$

$f(t) = 2t - 2t^3$ ($0 < t < 1$) とおくと

$$f'(t) = 2 - 6t^2 = -6 \left(t^2 - \frac{1}{3} \right) = -6 \left(t + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left(t - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

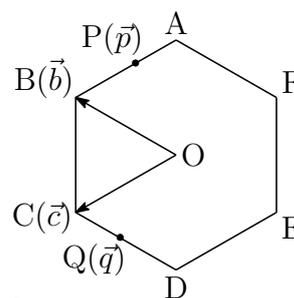
t	(0)	...	$\frac{1}{\sqrt{3}}$...	(1)
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$		↗	極大	↘	

よって、求める最大値は $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{9}$ ■



- 2 正六角形の中心 O に関する 4 点 B, C, P, Q の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{b}, \vec{c}, \vec{p}, \vec{q}$ とする. このとき実数 s, t を用いて ($0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1$)

$$\begin{aligned}\vec{p} &= \vec{b} + s(-\vec{c}) = \vec{b} - s\vec{c} \\ \vec{q} &= \vec{c} + t(-\vec{b}) = -t\vec{b} + \vec{c}\end{aligned}$$



線分 PQ を $2:1$ に内分する点 $R(\vec{r})$ の位置ベクトルは

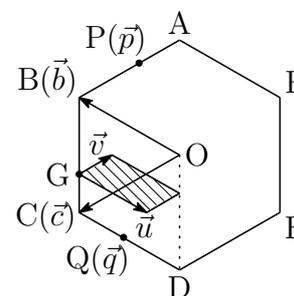
$$\begin{aligned}\vec{r} &= \frac{1}{3}\vec{p} + \frac{2}{3}\vec{q} = \frac{1}{3}(\vec{b} - s\vec{c}) + \frac{2}{3}(-t\vec{b} + \vec{c}) \\ &= \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c} + \frac{2t}{3}(-\vec{b}) + \frac{s}{3}(-\vec{c})\end{aligned}$$

2つのベクトル $-\vec{b}, -\vec{c}$ の大きさはともに 1 で, そのなす角は 60° である.

$0 \leq \frac{2t}{3} \leq \frac{2}{3}, 0 \leq \frac{s}{3} \leq \frac{1}{3}$ であるから, R が通る図形の面積は

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

補足 $\vec{OG} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}, \vec{u} = -\frac{2}{3}\vec{b}, \vec{v} = -\frac{1}{3}\vec{c}$ とおくと, G を始点とする 2つのベクトル \vec{u}, \vec{v} で張られた平行四辺形の内部または周上を点 R は動く.
(右の図の斜線部分)



- 3 (1) 点 $P(s, t)$ は原点 O から 1 秒後に格子点 $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$ に確率 $\frac{1}{4}$ で移動し, このとき, $t - s$ はそれぞれ $-1, 1, 1, -1$ となるから, 求める確率は

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

- (2) x 軸方向に $1, -1$, y 軸方向に $1, -1$ だけ平行移動する回数をそれぞれ i, j, k, l とすると $(0 \leq i, j, k, l \leq 6)$, その確率は

$$\sum_{\substack{i+j+k+l=6 \\ 0 \leq i, j, k, l \leq 6}} \frac{6!}{i!j!k!l!} \left(\frac{1}{4}\right)^6$$

このとき $i + j + k + l = 6$, $i - j = k - l$ すなわち $i + l = j + k = 3$ よって, 求める確率は,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{i+l=j+k=3 \\ 0 \leq i, j, k, l \leq 3}} \frac{6!}{i!j!k!l!} \left(\frac{1}{4}\right)^6 &= \frac{6!}{3!3!} \left(\frac{1}{4}\right)^6 \sum_{\substack{i+l=3 \\ 0 \leq i, l \leq 3}} \frac{3!}{i!l!} \sum_{\substack{j+k=3 \\ 0 \leq j, k \leq 3}} \frac{3!}{j!k!} \\ &= \frac{6!}{3!3!} \left(\frac{1}{4}\right)^6 \cdot 2^3 \cdot 2^3 = \frac{5}{16} \end{aligned}$$

■

- 4 (1) $a_1 = p - \frac{1}{p} = 2 + \sqrt{5} - \frac{1}{2 + \sqrt{5}} = 2 + \sqrt{5} - (\sqrt{5} - 2) = 4$

$$a_2 = p^2 + \frac{1}{p^2} = \left(p - \frac{1}{p}\right)^2 + 2 = 4^2 + 2 = 18$$

- (2) $p^{n+1} + \left(-\frac{1}{p}\right)^{n+1} = \left(p - \frac{1}{p}\right) \left\{ p^n + \left(-\frac{1}{p}\right)^n \right\} + p^{n-1} + \left(-\frac{1}{p}\right)^{n-1}$ より

$$a_{n+1} = a_1 a_n + a_{n-1} \quad \text{よって} \quad a_1 a_n = a_{n+1} - a_{n-1}$$

補足 $\alpha^{n+1} + \beta^{n+1} = (\alpha + \beta)(\alpha^n + \beta^n) - \alpha\beta(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1})$

- (3) (1), (2) の結果から $a_1 = 4, a_2 = 18, a_{n+1} = 4a_n + a_{n-1} \cdots (*)$ よって, すべての自然数 n について, a_n は自然数である.

- (4) 2つの自然数 k, l の最大公約数を $\gcd(k, l)$ とする.

(*) にユークリッドの互除法を順次適用することにより

$$\gcd(a_{n+1}, a_n) = \gcd(a_n, a_{n-1}) = \cdots = \gcd(a_2, a_1) = 2$$

■