平成29年度　東京大学2次試験前期日程(数学問題)100分
文科(一類，二類，三類)　数I・II・A・B

$\boxed{1}$ 座標平面において2つの放物線 $A: y = s(x-1)^2$ と $B: y = -x^2 + t^2$ を考える．ただし，s，t は実数で，$0 < s$，$0 < t < 1$ をみたすとする．放物線 A と x 軸および y 軸で囲まれる領域の面積を P とし，放物線 B の $x \geqq 0$ の部分と x 軸および y 軸で囲まれる領域の面積を Q とする．A と B がただ1点を共有するとき，$\dfrac{Q}{P}$ の最大値を求めよ．

$\boxed{2}$ 1辺の長さが1の正六角形ABCDEFが与えられている．点Pが辺AB上を，点Qが辺CD上をそれぞれ独立に動くとき，線分PQを2 : 1に内分する点Rが通りうる範囲の面積を求めよ．

$\boxed{3}$ 座標平面上で x 座標と y 座標がいずれも整数である点を格子点という．格子点上を次の規則(a)，(b)に従って動く点Pを考える．

(a) 最初に，点Pは原点Oにある．

(b) ある時刻で点Pが格子点 $(m,\ n)$ にあるとき，その1秒後の点Pの位置は，隣接する格子点 $(m+1,\ n)$，$(m,\ n+1)$，$(m-1,\ n)$，$(m,\ n-1)$ のいずれかであり，また，これらの点に移動する確率は，それぞれ $\dfrac{1}{4}$ である．

(1) 最初から1秒後の点Pの座標を $(s,\ t)$ とする．$t - s = -1$ となる確率を求めよ．

(2) 点Pが，最初から6秒後に直線 $y = x$ 上にある確率を求めよ．

$\boxed{4}$ $p = 2 + \sqrt{5}$ とおき，自然数 $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して

$$a_n = p^n + \left(-\frac{1}{p}\right)^n$$

と定める．以下の問いに答えよ．ただし設問(1)は結論のみを書けばよい．

(1) a_1，a_2 の値を求めよ．

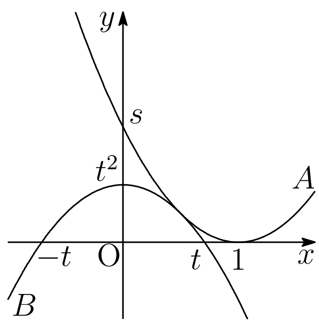
(2) $n \geqq 2$ とする．積 $a_1 a_n$ を，a_{n+1} と a_{n-1} を用いて表せ．

(3) a_n は自然数であることを示せ．

(4) a_{n+1} と a_n の最大公約数を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $A : y = s(x-1)^2$ と $B : y = -x^2 + t^2$ から y を消去して，整理すると



$$(s+1)x^2 - 2sx + s - t^2 = 0$$

A と B は接するので，上式の係数について

$$(-s)^2 - (s+1)(s-t^2) = 0$$

これを s について解くと　$s = \dfrac{t^2}{1-t^2}$

ゆえに　$P = \displaystyle\int_0^1 s(x-1)^2\,dx = \left[\,\frac{s}{3}(x-1)^3\,\right]_0^1 = \frac{s}{3} = \frac{t^2}{3(1-t^2)}$

$$Q = \int_0^t (-x^2+t^2)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + t^2x\,\right]_0^t = \frac{2t^3}{3}$$

したがって　$\dfrac{Q}{P} = \dfrac{2t^3}{3}\cdot\dfrac{3(1-t^2)}{t^2} = 2t - 2t^3$

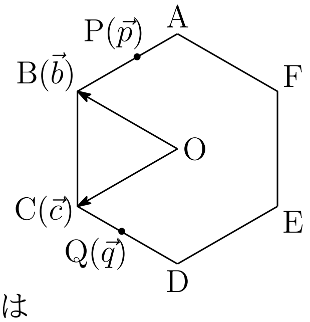
$f(t) = 2t - 2t^3 \ (0 < t < 1)$ とおくと

$$f'(t) = 2 - 6t^2 = -6\left(t^2 - \frac{1}{3}\right) = -6\left(t + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(t - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	(1)
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗	極大	↘	

よって，求める最大値は　$f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \boldsymbol{\dfrac{4\sqrt{3}}{9}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ 正六角形の中心 O に関する 4 点 B，C，P，Q の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{p}$，$\vec{q}$ とする．このとき実数 s，t を用いて $(0 \leqq s \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq 1)$



$$\vec{p} = \vec{b} + s(-\vec{c}) = \vec{b} - s\vec{c}$$
$$\vec{q} = \vec{c} + t(-\vec{b}) = -t\vec{b} + \vec{c}$$

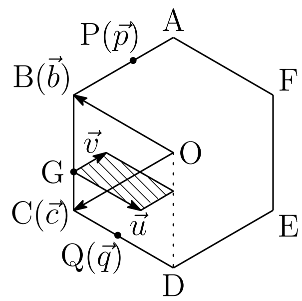
線分 PQ を 2 : 1 に内分する点 R($\vec{r}$) の位置ベクトルは

$$\vec{r} = \frac{1}{3}\vec{p} + \frac{2}{3}\vec{q} = \frac{1}{3}(\vec{b} - s\vec{c}) + \frac{2}{3}(-t\vec{b} + \vec{c})$$
$$= \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c} + \frac{2t}{3}(-\vec{b}) + \frac{s}{3}(-\vec{c})$$

2 つのベクトル $-\vec{b}$，$-\vec{c}$ の大きさはともに 1 で，そのなす角は 60° である．$0 \leqq \dfrac{2t}{3} \leqq \dfrac{2}{3}$，$0 \leqq \dfrac{s}{3} \leqq \dfrac{1}{3}$ であるから，R が通る図形の面積は

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\sin 60^\circ = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{9}}$$

補足 $\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \dfrac{1}{3}\vec{b} + \dfrac{2}{3}\vec{c}$，$\vec{u} = -\dfrac{2}{3}\vec{b}$，$\vec{v} = -\dfrac{1}{3}\vec{c}$ とおくと，G を始点とする 2 つのベクトル $\vec{u}$，$\vec{v}$ で張られた平行四辺形の内部または周上を点 R は動く．
(右の図の斜線部分)



$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ は原点 O から 1 秒後に格子点 $(1,\ 0)$，$(0,\ 1)$，$(-1,\ 0)$，$(0, -1)$ に確率 $\dfrac{1}{4}$ で移動し，このとき，$t-s$ はそれぞれ -1，1，1，-1 となるから，求める確率は

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

(2) x 軸方向に 1，-1，y 軸方向に 1，-1 だけ平行移動する回数をそれぞれ i，j，k，l とすると $(0 \leqq i,\ j,\ k,\ l \leqq 6)$，その確率は

$$\sum_{\substack{i+j+k+l=6 \\ 0\leqq i,j,k,l\leqq 6}} \frac{6!}{i!j!k!l!}\left(\frac{1}{4}\right)^6$$

このとき　$i+j+k+l=6,\quad i-j=k-l$　すなわち　$i+l=j+k=3$

よって，求める確率は,

$$\sum_{\substack{i+l=j+k=3 \\ 0\leqq i,j,k,l\leqq 3}} \frac{6!}{i!j!k!l!}\left(\frac{1}{4}\right)^6=\frac{6!}{3!3!}\left(\frac{1}{4}\right)^6\sum_{\substack{i+l=3 \\ 0\leqq i,l\leqq 3}}\frac{3!}{i!l!}\sum_{\substack{j+k=3 \\ 0\leqq j,k\leqq 3}}\frac{3!}{j!k!}$$

$$=\frac{6!}{3!3!}\left(\frac{1}{4}\right)^6\cdot 2^3\cdot 2^3=\boldsymbol{\frac{5}{16}}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $a_1=p-\dfrac{1}{p}=2+\sqrt{5}-\dfrac{1}{2+\sqrt{5}}=2+\sqrt{5}-(\sqrt{5}-2)=\mathbf{4}$

$$a_2=p^2+\frac{1}{p^2}=\left(p-\frac{1}{p}\right)^2+2=4^2+2=\mathbf{18}$$

(2) $p^{n+1}+\left(-\dfrac{1}{p}\right)^{n+1}=\left(p-\dfrac{1}{p}\right)\left\{p^n+\left(-\dfrac{1}{p}\right)^n\right\}+p^{n-1}+\left(-\dfrac{1}{p}\right)^{n-1}$ より

$$a_{n+1}=a_1a_n+a_{n-1}\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{a_1a_n=a_{n+1}-a_{n-1}}$$

補足 $\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}=(\alpha+\beta)(\alpha^n+\beta^n)-\alpha\beta(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})$

(3) (1)，(2) の結果から　$a_1=4$，$a_2=18$，$a_{n+1}=4a_n+a_{n-1}\quad\cdots(*)$

よって，すべての自然数 n について，a_n は自然数である．

(4) 2 つの自然数 k，l の最大公約数を $\gcd(k,\ l)$ とする．

$(*)$ にユークリッドの互除法を順次適用することにより

$$\gcd(a_{n+1},\ a_n)=\gcd(a_n,\ a_{n-1})=\cdots=\gcd(a_2,\ a_1)=\mathbf{2}$$