

平成28年度 東京大学2次試験前期日程(数学問題)100分
 文科(一類, 二類, 三類) 数I・II・A・B

問題 1 2 3 4

1 座標平面上の3点 $P(x, y)$, $Q(-x, -y)$, $R(1, 0)$ が鋭角三角形をなすための (x, y) についての条件を求めよ. また, その条件をみたす点 $P(x, y)$ の範囲を図示せよ.

2 A, B, C の3つのチームが参加する野球の大会を開催する. 以下の方式で試合を行い, 2連勝したチームが出た時点で, そのチームを優勝チームとして大会は終了する.

- (a) 1試合目でAとBが対戦する.
- (b) 2試合目で, 1試合目の勝者と, 1試合目で待機していたCが対戦する.
- (c) k 試合目で優勝チームが決まらない場合は, k 試合目の勝者と, k 試合目で待機していたチームが $k+1$ 試合目で対戦する. ここで k は2以上の整数とする.

なお, すべての対戦において, それぞれのチームが勝つ確率は $\frac{1}{2}$ で, 引き分けはないものとする.

- (1) ちょうど5試合目でAが優勝する確率を求めよ.
- (2) n を2以上の整数とする. ちょうど n 試合目でAが優勝する確率を求めよ.
- (3) m を正の整数とする. 総試合数が $3m$ 回以下でAが優勝する確率を求めよ.

3 座標平面上の2つの放物線

$$A: y = x^2$$

$$B: y = -x^2 + px + q$$

が点 $(-1, 1)$ で接している. ここで, p と q は実数である. さらに, t を正の実数とし, 放物線 B を x 軸の正の向きに $2t$, y 軸の正の向きに t だけ平行移動して得られる放物線を C とする.

- (1) p と q の値を求めよ.
- (2) 放物線 A と C が囲む領域の面積を $S(t)$ とする. ただし, A と C が領域を囲まないときは $S(t) = 0$ と定める. $S(t)$ を求めよ.
- (3) $t > 0$ における $S(t)$ の最大値を求めよ.

4 以下の問いに答えよ。ただし、(1)については、結論のみを書けばよい。

(1) n を正の整数とし、 3^n を 10 で割った余りを a_n とする。 a_n を求めよ。

(2) n を正の整数とし、 3^n を 4 で割った余りを b_n とする。 b_n を求めよ。

(3) 数列 $\{x_n\}$ を次のように定める。

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = 3^{x_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

x_{10} を 10 で割った余りを求めよ。

解答例

1 $\triangle PQR$ が鋭角三角形であるとき、次の条件式をみたせばよい。

$$PQ^2 + QR^2 > RP^2, \quad QR^2 + RP^2 > PQ^2, \quad RP^2 + PQ^2 > QR^2$$

3点 $P(x, y)$, $Q(-x, -y)$, $R(1, 0)$ から

$$PQ^2 = 4x^2 + 4y^2, \quad QR^2 = (x+1)^2 + y^2, \quad RP^2 = (x-1)^2 + y^2$$

これらを条件式に代入すると

$$4x^2 + 4y^2 + (x+1)^2 + y^2 > (x-1)^2 + y^2,$$

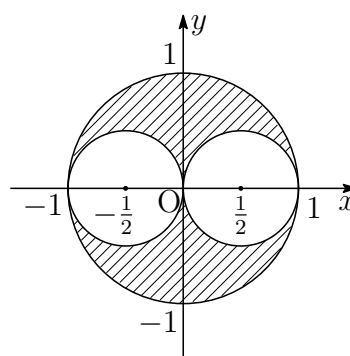
$$(x+1)^2 + y^2 + (x-1)^2 + y^2 > 4x^2 + 4y^2,$$

$$(x-1)^2 + y^2 + 4x^2 + 4y^2 > (x+1)^2 + y^2$$

整理すると $x^2 + y^2 + x > 0$, $x^2 + y^2 < 1$, $x^2 + y^2 - x > 0$

すなわち $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 > \frac{1}{4}$, $x^2 + y^2 < 1$, $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 > \frac{1}{4}$

よって、 $P(x, y)$ のみたす領域は、右の図の斜線部分で、境界線を含まない。



2 (1) ちょうど5試合目でAが優勝するときの勝敗は次のようになる。

求める確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$

回数	1	2	3	4	5
勝者	A	C	B	A	A
敗者	B	A	C	B	C
控え	C	B	A	C	B

(2) $n_1 \equiv 1 \pmod{3}$, $n_2 = n_1 + 1$, $n_3 = n_1 + 2$ とする.

優勝チームが決まらず対戦が続くとき、勝者・敗者・控えは3順ごとに、次の (i),(ii) のように繰り返す.

(i) 初戦で A が B に勝つとき

回数	1	2	3	...	n_1	n_2	n_3	...
勝者	A	C	B	...	A	C	B	...
敗者	B	A	C	...	B	A	C	...
控え	C	B	A	...	C	B	A	...

(ii) 初戦で B が A に勝つとき

回数	1	2	3	...	n_1	n_2	n_3	...
勝者	B	C	A	...	B	C	A	...
敗者	A	B	C	...	A	B	C	...
控え	C	A	B	...	C	A	B	...

n 試合目に A が優勝するのは、(i) の場合、 $n \equiv 2 \pmod{3}$ のとき、A は最後に C に勝って優勝し、(ii) の場合、 $n \equiv 1 \pmod{3}$ のとき、A は最後に B に勝って優勝する. これらの場合の確率は、ともに $\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

よって、求める確率は

$$n \not\equiv 0 \text{ のとき } \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad n \equiv 0 \text{ のとき } 0 \quad (\text{mod } 3)$$

(3) (2) の結果から、A が最後に C に勝って、優勝する確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{3m-1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{3m-1}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{1}{7} \left\{ 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{3m} \right\}$$

また、A が最後に B に勝って、優勝する確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{3m-2} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4 - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{3m-2}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{1}{7} \left\{ \frac{1}{2} - 4\left(\frac{1}{2}\right)^{3m} \right\}$$

よって、求める確率は

$$\frac{1}{7} \left\{ 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{3m} \right\} + \frac{1}{7} \left\{ \frac{1}{2} - 4\left(\frac{1}{2}\right)^{3m} \right\} = \frac{1}{14} \left\{ 5 - 12\left(\frac{1}{2}\right)^{3m} \right\}$$

補足 初項 a , 公比 r , 末項 l の等比数列の和は $\frac{a - rl}{1 - r}$ ■

- 3** (1) $f(x) = x^2$, $g(x) = -x^2 + px + q$ とおくと, $f'(x) = 2x$, $g'(x) = -2x + p$.
 A, B が点 $(-1, 1)$ で接するから

$$f(-1) = g(-1), \quad f'(-1) = g'(-1)$$

ゆえに $1 = -1 - p + q$, $-2 = 2 + p$ よって $p = -4$, $q = -2$

- (2) (1) の結果から $g(x) = -x^2 - 4x - 2$
 B を x 軸方向に $2t$, y 軸方向に t だけ平行移動した C の方程式は

$$\begin{aligned} y &= g(x - 2t) + t = -(x - 2t)^2 - 4(x - 2t) - 2 + t \\ &= -x^2 + 4(t - 1)x - 4t^2 + 9t - 2 \end{aligned}$$

$h(x) = -x^2 + 4(t - 1)x - 4t^2 + 9t - 2$ とおくと

$$h(x) - f(x) = -2x^2 + 4(t - 1)x - 4t^2 + 9t - 2$$

$h(x) - f(x) = 0$ とすると

$$2x^2 - 4(t - 1)x + 4t^2 - 9t + 2 = 0 \quad \dots (*)$$

2次方程式 (*) の判別式を D とすると

$$D/4 = \{-2(t - 1)\}^2 - 2(4t^2 - 9t + 2) = -4t^2 + 10t = -2t(2t - 5)$$

$D > 0$ のとき, $t > 0$ に注意して $0 < t < \frac{5}{2}$

このとき, 2次方程式 (*) の異なる2つの解を α, β とすると ($\alpha < \beta$)

$$\beta - \alpha = \frac{2(t - 1) + \sqrt{D/4}}{2} - \frac{2(t - 1) - \sqrt{D/4}}{2} = \sqrt{D/4},$$

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_{\alpha}^{\beta} \{h(x) - f(x)\} dx = -2 \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= \frac{1}{3}(\beta - \alpha)^3 = \frac{1}{3}(D/4)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}(-4t^2 + 10t)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$$\text{よって } S(t) = \begin{cases} \frac{1}{3}(-4t^2 + 10t)^{\frac{3}{2}} & \left(0 < t < \frac{5}{2}\right) \\ 0 & \left(t \geq \frac{5}{2}\right) \end{cases}$$

(3) $0 < t < \frac{5}{2}$ のとき $-4t^2 + 10t = -4\left(t - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{25}{4}$

よって, 最大値 $S\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{125}{24}$ ■

4 (1) $3^1 \equiv 3, 3^2 \equiv 9, 3^3 \equiv 7, 3^4 \equiv 1 \pmod{10}$

したがって $3^{n+4} \equiv 3^n \pmod{10}$

$$\text{よって } a_n = \begin{cases} 3 & (n \equiv 1 \pmod{4}) \\ 9 & (n \equiv 2 \pmod{4}) \\ 7 & (n \equiv 3 \pmod{4}) \\ 1 & (n \equiv 0 \pmod{4}) \end{cases}$$

(2) $3^1 \equiv 3, 3^2 \equiv 1 \pmod{4}$

したがって $3^{n+2} \equiv 3^n \pmod{4}$

$$\text{よって } b_n = \begin{cases} 3 & (n \equiv 1 \pmod{2}) \\ 1 & (n \equiv 0 \pmod{2}) \end{cases}$$

(3) $x_1 = 1, x_{n+1} = 3^{x_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$

この漸化式で定められた数列 $\{x_n\}$ は奇数からなるから、 x_8 は奇数

したがって、(2)の結果から $3^{x_8} \equiv 3 \pmod{4}$ ゆえに $x_9 \equiv 3 \pmod{4}$

さらに、(1)の結果から $3^{x_9} \equiv 7 \pmod{10}$ ゆえに $x_{10} \equiv 7 \pmod{10}$

よって、求める余りは **7**

補足 正の整数 m について、 x_m は奇数

したがって、(2)の結果から $3^{x_m} \equiv 3 \pmod{4}$ ゆえに $x_{m+1} \equiv 3 \pmod{4}$

さらに、(1)の結果から $3^{x_{m+1}} \equiv 7 \pmod{10}$ ゆえに $x_{m+2} \equiv 7 \pmod{10}$

よって、 $l \geq 3$ の整数について $x_l \equiv 7 \pmod{10}$ ■