平成 28 年度　東京大学 2 次試験前期日程 (数学問題)100 分
文科 (一類，二類，三類)　数 I・II・A・B

1 座標平面上の 3 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$，$\mathrm{Q}(-x, -y)$，$\mathrm{R}(1,\ 0)$ が鋭角三角形をなすための $(x,\ y)$ についての条件を求めよ．また，その条件をみたす点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の範囲を図示せよ．

2 A，B，C の 3 つのチームが参加する野球の大会を開催する．以下の方式で試合を行い，2 連勝したチームが出た時点で，そのチームを優勝チームとして大会は終了する．

(a) 1 試合目で A と B が対戦する．

(b) 2 試合目で，1 試合目の勝者と，1 試合目で待機していた C が対戦する．

(c) k 試合目で優勝チームが決まらない場合は，k 試合目の勝者と，k 試合目で待機していたチームが $k+1$ 試合目で対戦する．ここで k は 2 以上の整数とする．

なお，すべての対戦において，それぞれのチームが勝つ確率は $\dfrac{1}{2}$ で，引き分けはないものとする．

(1) ちょうど 5 試合目で A が優勝する確率を求めよ．

(2) n を 2 以上の整数とする．ちょうど n 試合目で A が優勝する確率を求めよ．

(3) m を正の整数とする．総試合数が $3m$ 回以下で A が優勝する確率を求めよ．

3 座標平面上の 2 つの放物線

$$A:\ y = x^2$$
$$B:\ y = -x^2 + px + q$$

が点 $(-1,\ 1)$ で接している．ここで，p と q は実数である．さらに，t を正の実数とし，放物線 B を x 軸の正の向きに $2t$，y 軸の正の向きに t だけ平行移動して得られる放物線を C とする．

(1) p と q の値を求めよ．

(2) 放物線 A と C が囲む領域の面積を $S(t)$ とする．ただし，A と C が領域を囲まないときは $S(t) = 0$ と定める．$S(t)$ を求めよ．

(3) $t > 0$ における $S(t)$ の最大値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 以下の問いに答えよ．ただし，(1) については，結論のみを書けばよい．

(1) n を正の整数とし，3^n を 10 で割った余りを a_n とする．a_n を求めよ．

(2) n を正の整数とし，3^n を 4 で割った余りを b_n とする．b_n を求めよ．

(3) 数列 $\{x_n\}$ を次のように定める．

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = 3^{x_n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

x_{10} を 10 で割った余りを求めよ．

解答例

1 △PQR が鋭角三角形であるとき，次の条件式をみたせばよい．

$$\mathrm{PQ}^2+\mathrm{QR}^2>\mathrm{RP}^2,\quad \mathrm{QR}^2+\mathrm{RP}^2>\mathrm{PQ}^2,\quad \mathrm{RP}^2+\mathrm{PQ}^2>\mathrm{QR}^2$$

3 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$，$\mathrm{Q}(-x,-y)$，$\mathrm{R}(1,\ 0)$ から

$$\mathrm{PQ}^2=4x^2+4y^2,\quad \mathrm{QR}^2=(x+1)^2+y^2,\quad \mathrm{RP}^2=(x-1)^2+y^2$$

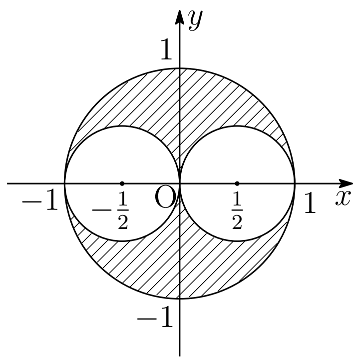
これらを条件式に代入すると

$$\begin{aligned}&4x^2+4y^2+(x+1)^2+y^2>(x-1)^2+y^2,\\&(x+1)^2+y^2+(x-1)^2+y^2>4x^2+4y^2,\\&(x-1)^2+y^2+4x^2+4y^2>(x+1)^2+y^2\end{aligned}$$

整理すると　$x^2+y^2+x>0,\quad x^2+y^2<1,\quad x^2+y^2-x>0$

すなわち　$\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2>\dfrac{1}{4},\quad x^2+y^2<1,\quad \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2>\dfrac{1}{4}$

よって，$\mathrm{P}(x,\ y)$ のみたす領域は，右の図の斜線部分で，境界線を含まない．



2 (1) ちょうど 5 試合目で A が優勝するときの勝敗は次のようになる．

求める確率は　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^5=\mathbf{\dfrac{1}{32}}$

回数	1	2	3	4	5
勝者	A	C	B	A	A
敗者	B	A	C	B	C
控え	C	B	A	C	B

(2) $n_1 \equiv 1 \pmod 3$, $n_2 = n_1 + 1$, $n_3 = n_1 + 2$ とする．
優勝チームが決まらず対戦が続くとき，勝者・敗者・控えは 3 順ごとに，次の (i),(ii) のように繰り返す．

(i) 初戦で A が B に勝つとき

回数	1	2	3	$\cdots$	n_1	n_2	n_3	$\cdots$
勝者	A	C	B	$\cdots$	A	C	B	$\cdots$
敗者	B	A	C	$\cdots$	B	A	C	$\cdots$
控え	C	B	A	$\cdots$	C	B	A	$\cdots$

(ii) 初戦で B が A に勝つとき

回数	1	2	3	$\cdots$	n_1	n_2	n_3	$\cdots$
勝者	B	C	A	$\cdots$	B	C	A	$\cdots$
敗者	A	B	C	$\cdots$	A	B	C	$\cdots$
控え	C	A	B	$\cdots$	C	A	B	$\cdots$

n 試合目に A が優勝するのは，(i) の場合，$n \equiv 2 \pmod 3$ のとき，A は最後に C に勝って優勝し，(ii) の場合，$n \equiv 1 \pmod 3$ のとき，A は最後に B に勝って優勝する．これらの場合の確率は，ともに $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$．
よって，求める確率は

$$\boldsymbol{n \not\equiv 0 \text{ のとき } \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad n \equiv 0 \text{ のとき } 0 \qquad (\mathrm{mod}\ 3)}$$

(3) (2) の結果から，A が最後に C に勝って，優勝する確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{3m-1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{3m-1}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{1}{7}\left\{2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}\right\}$$

また，A が最後に B に勝って，優勝する確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{3m-2} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4 - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{3m-2}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{1}{7}\left\{\frac{1}{2} - 4\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}\right\}$$

よって，求める確率は

$$\frac{1}{7}\left\{2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}\right\} + \frac{1}{7}\left\{\frac{1}{2} - 4\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}\right\} = \boldsymbol{\frac{1}{14}\left\{5 - 12\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}\right\}}$$

補足 初項 a，公比 r，末項 l の等比数列の和は $\quad \boldsymbol{\dfrac{a - rl}{1 - r}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $f(x)=x^2$，$g(x)=-x^2+px+q$ とおくと，$f'(x)=2x$，$g'(x)=-2x+p$.
A，B が点 $(-1,\ 1)$ で接するとき

$$f(-1)=g(-1),\quad f'(-1)=g'(-1)$$

ゆえに　$1=-1-p+q$，$-2=2+p$　　よって　$\boldsymbol{p=-4,\ \ q=-2}$

(2) (1) の結果から　$g(x)=-x^2-4x-2$
B を x 軸方向に $2t$，y 軸方向に t だけ平行移動した C の方程式は

$$\begin{aligned} y &= g(x-2t)+t=-(x-2t)^2-4(x-2t)-2+t \\ &= -x^2+4(t-1)x-4t^2+9t-2 \end{aligned}$$

$h(x)=-x^2+4(t-1)x-4t^2+9t-2$ とおくと

$$h(x)-f(x)=-2x^2+4(t-1)x-4t^2+9t-2$$

$h(x)-f(x)=0$ とすると

$$2x^2-4(t-1)x+4t^2-9t+2=0 \quad \cdots(*)$$

2 次方程式 $(*)$ の判別式を D とすると

$$D/4=\{-2(t-1)\}^2-2(4t^2-9t+2)=-4t^2+10t=-2t(2t-5)$$

$D>0$ のとき，$t>0$ に注意して　　$0<t<\dfrac{5}{2}$

このとき，2 次方程式 $(*)$ の異なる 2 つの解を α，β とすると $(\alpha<\beta)$

$$\begin{aligned} \beta-\alpha &= \frac{2(t-1)+\sqrt{D/4}}{2}-\frac{2(t-1)-\sqrt{D/4}}{2}=\sqrt{D/4}, \\ S(t) &= \int_\alpha^\beta \{h(x)-f(x)\}dx=-2\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx \\ &= \frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{3}(D/4)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}(-4t^2+10t)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{S(t)=\begin{cases} \dfrac{1}{3}(-4t^2+10t)^{\frac{3}{2}} & \left(0<t<\dfrac{5}{2}\right) \\ 0 & \left(t \geqq \dfrac{5}{2}\right) \end{cases}}$

(3) $0<t<\dfrac{5}{2}$ のとき　$-4t^2+10t=-4\left(t-\dfrac{5}{4}\right)^2+\dfrac{25}{4}$

よって，最大値　$S\left(\dfrac{5}{4}\right)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{25}{4}\right)^{\frac{3}{2}}=\boldsymbol{\dfrac{125}{24}}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $3^1 \equiv 3,\ \ 3^2 \equiv 9,\ \ 3^3 \equiv 7,\ \ 3^4 \equiv 1 \pmod{10}$

したがって　$3^{n+4} \equiv 3^n \pmod{10}$

よって　$$\boldsymbol{a_n = \begin{cases} 3 & (n \equiv 1 \pmod 4) \\ 9 & (n \equiv 2 \pmod 4) \\ 7 & (n \equiv 3 \pmod 4) \\ 1 & (n \equiv 0 \pmod 4) \end{cases}}$$

(2) $3^1 \equiv 3,\ \ 3^2 \equiv 1 \pmod 4$

したがって　$3^{n+2} \equiv 3^n \pmod 4$

よって　$$\boldsymbol{b_n = \begin{cases} 3 & (n \equiv 1 \pmod 2) \\ 1 & (n \equiv 0 \pmod 2) \end{cases}}$$

(3) $x_1 = 1,\ \ x_{n+1} = 3^{x_n}\ \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$

この漸化式で定められた数列 $\{x_n\}$ は奇数からなるから，x_8 は奇数

したがって，(2) の結果から　$3^{x_8} \equiv 3 \pmod 4$　ゆえに　$x_9 \equiv 3 \pmod 4$

さらに，(1) の結果から　$3^{x_9} \equiv 7 \pmod{10}$　ゆえに　$x_{10} \equiv 7 \pmod{10}$

よって，求める余りは　**7**

補足 正の整数 m について，x_m は奇数

したがって，(2) の結果から　$3^{x_m} \equiv 3 \pmod 4$　ゆえに　$x_{m+1} \equiv 3 \pmod 4$

さらに，(1) の結果から　$3^{x_{m+1}} \equiv 7 \pmod{10}$　ゆえに　$x_{m+2} \equiv 7 \pmod{10}$

よって，$l \geqq 3$ の整数について　$x_l \equiv 7 \pmod{10}$