

平成27年度 東京大学2次試験前期日程(数学問題)100分
 文科(一類, 二類, 三類) 数I・II・A・B

問題 1 2 3 4

- 1 以下の命題A, Bそれぞれに対し, その真偽を調べよ. また, 真ならば証明を与え, 偽ならば反例を与えよ.

命題A n が正の整数ならば, $\frac{n^3}{26} + 100 \geq n^2$ が成り立つ.

命題B 整数 n, m, l が $5n + 5m + 3l = 1$ をみたすならば, $10nm + 3ml + 3nl < 0$ が成り立つ.

- 2 座標平面上の2点 $A(-1, 1), B(1, -1)$ を考える. また, P を座標平面上の点とし, その x 座標の絶対値は1以下であるとする. 次の条件(i)または(ii)をみたす点 P の範囲を図示し, その面積を求めよ.

(i) 頂点の x 座標の絶対値が1以上の2次関数のグラフで, 点 A, P, B をすべて通るものがある.

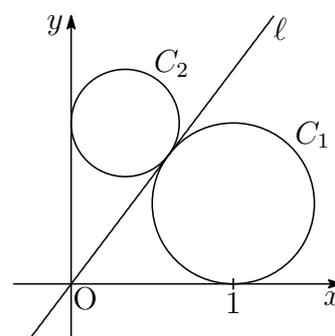
(ii) 点 A, P, B は同一直線上にある.

- 3 l を座標平面上の原点を通り傾きが正の直線とする. さらに, 以下の3条件(i), (ii), (iii)で定まる円 C_1, C_2 を考える.

(i) 円 C_1, C_2 は2つの不等式 $x \geq 0, y \geq 0$ で定まる領域に含まれる.

(ii) 円 C_1, C_2 は直線 l と同一点で接する.

(iii) 円 C_1 は x 軸と点 $(1, 0)$ で接し, 円 C_2 は y 軸と接する.



円 C_1 の半径を r_1 , 円 C_2 の半径を r_2 とする. $8r_1 + 9r_2$ が最小となるような直線 l の方程式と, その最小値を求めよ.

- 4 投げたとき表と裏の出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ のコインを1枚用意し、次のように左から順に文字を書く。コインを投げ、表が出たときは文字列 AA を書き、裏が出たときは文字 B を書く。さらに繰り返しコインを投げ、同じ規則に従って、AA, B をすでにある文字列の右側につなげて書いていく。たとえば、コインを5回投げ、その結果が順に表, 裏, 裏, 表, 裏であったとすると、得られる文字列は

AABBAAB

となる。このとき、左から4番目の文字はB, 5番目の文字はAである。

- (1) n を正の整数とする。 n 回コインを投げ、文字列を作るとき、文字列の左から n 番目の文字が A となる確率を求めよ。
- (2) n を2以上の整数とする。 n 回コインを投げ、文字列を作るとき、文字列の左から $n - 1$ 番目の文字が A で、かつ n 番目の文字が B となる確率を求めよ。

解答例

1 命題 A : $f(x) = \frac{x^3}{26} - x^2 + 100$ ($x > 0$) とおくと

$$f'(x) = \frac{3}{26}x^2 - 2x = \frac{3}{26}x \left(x - \frac{52}{3} \right)$$

x	(0)	...	$\frac{52}{3}$...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		↘	極小	↗

$$17 < \frac{52}{3} < 18 \text{ より } f(17) = 17^2 \left(\frac{17}{26} - 1 \right) + 100 = -\frac{2601}{26} + 100 < 0$$

したがって、 $n = 17$ のとき、不等式 $\frac{n^3}{26} + 100 \geq n^2$ は成立しない。

よって、命題 A は 偽

命題 B : $5n + 5m + 3l = 1$ より、 $3l = 1 - 5(m + n)$ であるから

$$\begin{aligned} 10nm + 3ml + 3nl &= 10mn + 3l(m + n) \\ &= 10mn + \{1 - 5(m + n)\}(m + n) \\ &= 10mn + (m + n) - 5(m + n)^2 \\ &= -5m^2 - 5n^2 + m + n \\ &= -5 \left(m - \frac{1}{10} \right)^2 - 5 \left(n - \frac{1}{10} \right)^2 + \frac{1}{10} \end{aligned}$$

m, n は整数なので

$$-5 \left(m - \frac{1}{10} \right)^2 - 5 \left(n - \frac{1}{10} \right)^2 + \frac{1}{10} \leq 0 \quad (\text{等号は } m = n = 0 \text{ のとき})$$

$m = n = 0$ のとき、 $3l = 1$ を満たす整数 l は存在しないから

$$10nm + 3ml + 3nl = -5 \left(m - \frac{1}{10} \right)^2 - 5 \left(n - \frac{1}{10} \right)^2 + \frac{1}{10} < 0$$

よって、命題 B は 真 ■

2 点 P の x 座標 ($|x| \leq 1$) および条件 (ii) より, 点 P は線分 AB 上にあるから

$$x + y = 0 \quad (-1 \leq x \leq 1) \quad \dots (*)$$

条件 (i) について, 点 A, B, P(x, y) ($-1 \leq x \leq 1$) が満たす 2 次関数を

$$y = ax^2 + bx + c$$

とおくと, このグラフは, 2 点 A($-1, 1$), B($1, -1$) を通るから

$$a - b + c = 1, \quad a + b + c = -1 \quad \text{ゆえに} \quad b = -1, \quad c = -a$$

したがって $y = ax^2 - x - a \quad \dots \textcircled{1}$

すなわち $y = a \left(x - \frac{1}{2a} \right)^2 - a - \frac{1}{4a}$

頂点の x 座標の絶対値が 1 以上であるから

$$\left| \frac{1}{2a} \right| \geq 1 \quad \text{ゆえに} \quad 0 < |a| \leq \frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{2}$$

① により, $x = -1$ のとき点 A, $x = 1$ のとき点 B にある.

$-1 < x < 1$ のとき, $a = \frac{x+y}{x^2-1}$ を ② に代入すると $0 < \left| \frac{x+y}{x^2-1} \right| \leq \frac{1}{2}$

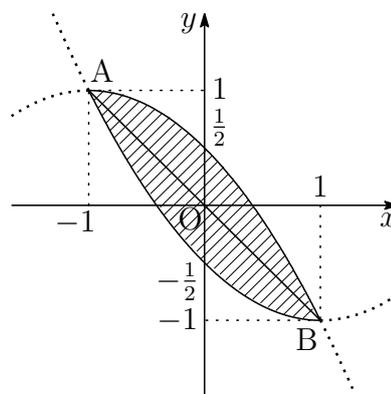
したがって $0 < |x+y| \leq \frac{1}{2}(1-x^2) \quad (-1 < x < 1)$

これに (*) を含めると $|x+y| \leq \frac{1}{2}(1-x^2) \quad (-1 \leq x \leq 1)$

すなわち $\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2} \leq y \leq -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$

よって, 点 P の表す領域は, 右の図の斜線部分で境界を含む. その面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^1 \left\{ \left(-\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2} \right) \right\} dx \\ &= - \int_{-1}^1 (x+1)(x-1) dx \\ &= \frac{1}{6} \{ 1 - (-1) \}^3 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$



- 3 円 C_1 , C_2 の中心をそれぞれ A , B とし, C_1 , C_2 が外接する点を P とすると, 右の図から, $OP = 1$ である. これから, B の y 座標は 1 であるから, $A(1, r_1)$, $B(r_2, 1)$ とおくと, $AB = r_1 + r_2$ より

$$(r_1 + r_2)^2 = (r_2 - 1)^2 + (1 - r_1)^2$$

整理すると $r_1 r_2 + r_1 + r_2 = 1$

$$r_2 = \frac{1 - r_1}{1 + r_1} = \frac{2}{1 + r_1} - 1 \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned} 8r_1 + 9r_2 &= 8r_1 + 9 \left(\frac{2}{1 + r_1} - 1 \right) \\ &= 8(1 + r_1) + \frac{18}{1 + r_1} - 17 \\ &\geq 2\sqrt{8(1 + r_1) \cdot \frac{18}{1 + r_1}} - 17 = 7 \end{aligned}$$

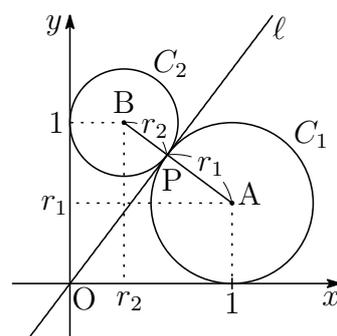
上式において, 等号が成立するとき

$$8(1 + r_1) = \frac{18}{1 + r_1} \quad \text{すなわち} \quad r_1 = \frac{1}{2}, \quad r_2 = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

このとき, 点 P は 2 点 $A\left(1, \frac{1}{2}\right)$, $B\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ を $r_1 : r_2 = 3 : 2$ に内分するから, その座標は

$$\left(\frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot \frac{1}{3}}{3 + 2}, \frac{2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot 1}{3 + 2} \right) \quad \text{すなわち} \quad \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right)$$

よって, ℓ の方程式は $y = \frac{4}{3}x$, 最小値は 7 ■



- 4 (1) 文字列の左から n 番目の文字が A となる確率を p_n とすると, p_{n+2} は最初に裏が出た場合と表が場合により

$$p_{n+2} = \frac{1}{2}p_{n+1} + \frac{1}{2}p_n \quad (n \geq 1) \quad \cdots (*)$$

このとき $p_1 = \frac{1}{2}, p_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

(*) より $p_{n+2} - p_{n+1} = -\frac{1}{2}(p_{n+1} - p_n),$

$$p_{n+2} + \frac{1}{2}p_{n+1} = p_{n+1} + \frac{1}{2}p_n$$

第 1 式から $p_{n+1} - p_n = (p_2 - p_1) \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

第 2 式から $p_{n+1} + \frac{1}{2}p_n = p_2 + \frac{1}{2}p_1 = 1$

上の 2 式から $p_n = \frac{2}{3} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right\} \quad (n \geq 1)$

- (2) 文字列の左から $n-1$ 番目の文字が A で, かつ n 番目の文字列が B となる確率を q_n とすると, q_{n+2} は, (1) と同様に

$$q_{n+2} = \frac{1}{2}q_{n+1} + \frac{1}{2}q_n \quad (n \geq 2) \quad \cdots (**)$$

このとき $q_2 = 0, q_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

(**) より $q_{n+2} - q_{n+1} = -\frac{1}{2}(q_{n+1} - q_n),$

$$q_{n+2} + \frac{1}{2}q_{n+1} = q_{n+1} + \frac{1}{2}q_n$$

第 1 式から $q_{n+1} - q_n = (q_3 - q_2) \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} = \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

第 2 式から $q_{n+1} + \frac{1}{2}q_n = q_3 + \frac{1}{2}q_2 = \frac{1}{4}$

上の 2 式から $q_n = \frac{1}{6} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} \right\} \quad (n \geq 2)$ ■