平成 27 年度　東京大学２次試験前期日程 (数学問題)100 分
文科 (一類，二類，三類)　数 I・II・A・B

$\boxed{\mathbf{1}}$ 以下の命題 A，B それぞれに対し，その真偽を調べよ．また，真ならば証明を与え，偽ならば反例を与えよ．

命題 A　n が正の整数ならば，$\dfrac{n^3}{26}+100 \geqq n^2$ が成り立つ．

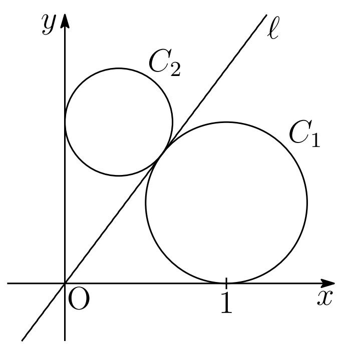
命題 B　整数 n，m，ℓ が $5n+5m+3\ell=1$ をみたすならば，$10nm+3m\ell+3n\ell<0$ が成り立つ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 座標平面上の 2 点 A$(-1,\ 1)$，B$(1,-1)$ を考える．また，P を座標平面上の点とし，その x 座標の絶対値は 1 以下であるとする．次の条件 (i) または (ii) をみたす点 P の範囲を図示し，その面積を求めよ．

(i) 頂点の x 座標の絶対値が 1 以上の 2 次関数のグラフで，点 A，P，B をすべて通るものがある．

(ii) 点 A，P，B は同一直線上にある．

$\boxed{\mathbf{3}}$ ℓ を座標平面上の原点を通り傾きが正の直線とする．さらに，以下の 3 条件 (i)，(ii)，(iii) で定まる円 C_1，C_2 を考える．



(i) 円 C_1，C_2 は 2 つの不等式 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ で定まる領域に含まれる．

(ii) 円 C_1，C_2 は直線 ℓ と同一点で接する．

(iii) 円 C_1 は x 軸と点 $(1,\ 0)$ で接し，円 C_2 は y 軸と接する．

円 C_1 の半径を r_1，円 C_2 の半径を r_2 とする．$8r_1+9r_2$ が最小となるような直線 l の方程式と，その最小値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 投げたとき表と裏の出る確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ のコインを 1 枚用意し，次のように左から順に文字を書く．コインを投げ，表が出たときは文字列 AA を書き，裏が出たときは文字 B を書く．さらに繰り返しコインを投げ，同じ規則に従って，AA，B をすでにある文字列の右側につなげて書いていく．たとえば，コインを 5 回投げ，その結果が順に表，裏，裏，表，裏であったとすると，得られる文字列は

AABBAAB

となる．このとき，左から 4 番目の文字は B，5 番目の文字は A である．

(1) n を正の整数とする．n 回コインを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から n 番目の文字が A となる確率を求めよ．

(2) n を 2 以上の整数とする．n 回コインを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から $n-1$ 番目の文字が A で，かつ n 番目の文字が B となる確率を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ 命題 A：$f(x)=\dfrac{x^3}{26}-x^2+100\ (x>0)$ とおくと

$$f'(x)=\frac{3}{26}x^2-2x=\frac{3}{26}x\left(x-\frac{52}{3}\right)$$

x	(0)	$\cdots$	$\frac{52}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

$17<\dfrac{52}{3}<18$ より　$f(17)=17^2\left(\dfrac{17}{26}-1\right)+100=-\dfrac{2601}{26}+100<0$

したがって，$n=17$ のとき，不等式 $\dfrac{n^3}{26}+100\geqq n^2$ は成立しない.

よって，命題 A は　**偽**

命題 B：$5n+5m+3\ell=1$ より，$3\ell=1-5(m+n)$ であるから

$$\begin{aligned}10nm+3m\ell+3n\ell&=10mn+3\ell(m+n)\\&=10mn+\{1-5(m+n)\}(m+n)\\&=10mn+(m+n)-5(m+n)^2\\&=-5m^2-5n^2+m+n\\&=-5\left(m-\frac{1}{10}\right)^2-5\left(n-\frac{1}{10}\right)^2+\frac{1}{10}\end{aligned}$$

m，n は整数なので

$$-5\left(m-\frac{1}{10}\right)^2-5\left(n-\frac{1}{10}\right)^2+\frac{1}{10}\leqq 0\quad(\text{等号は } m=n=0 \text{ のとき})$$

$m=n=0$ のとき，$3\ell=1$ を満たす整数 ℓ は存在しないから

$$10nm+3m\ell+3n\ell=-5\left(m-\frac{1}{10}\right)^2-5\left(n-\frac{1}{10}\right)^2+\frac{1}{10}<0$$

よって，命題 B は　**真**

$\boxed{\mathbf{2}}$ 点Pの x 座標 $(|x| \leqq 1)$ および条件 (ii) より，点Pは線分AB上にあるから

$$x + y = 0 \quad (-1 \leqq x \leqq 1) \quad \cdots (*)$$

条件 (i) について，点A，B，P$(x,\ y)$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ が満たす2次関数を

$$y = ax^2 + bx + c$$

とおくと，このグラフは，2点A$(-1,\ 1)$，B$(1, -1)$ を通るから

$$a - b + c = 1, \quad a + b + c = -1 \quad \text{ゆえに} \quad b = -1,\ c = -a$$

したがって　$y = ax^2 - x - a \quad \cdots ①$

すなわち　$y = a\left(x - \dfrac{1}{2a}\right)^2 - a - \dfrac{1}{4a}$

頂点の x 座標の絶対値が1以上であるから

$$\left|\frac{1}{2a}\right| \geqq 1 \quad \text{ゆえに} \quad 0 < |a| \leqq \frac{1}{2} \quad \cdots ②$$

① により，$x = -1$ のとき点A，$x = 1$ のとき点Bにある．

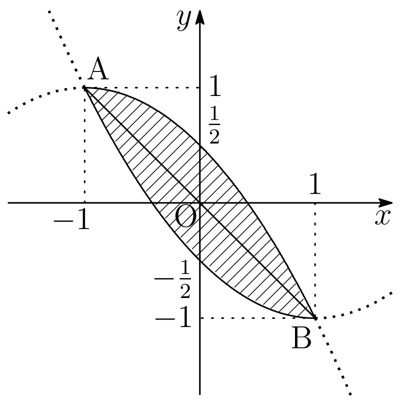
$-1 < x < 1$ のとき，$a = \dfrac{x+y}{x^2-1}$ を ② に代入すると　$0 < \left|\dfrac{x+y}{x^2-1}\right| \leqq \dfrac{1}{2}$

したがって　$0 < |x+y| \leqq \dfrac{1}{2}(1 - x^2) \quad (-1 < x < 1)$

これに $(*)$ を含めると　$|x+y| \leqq \dfrac{1}{2}(1-x^2) \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$

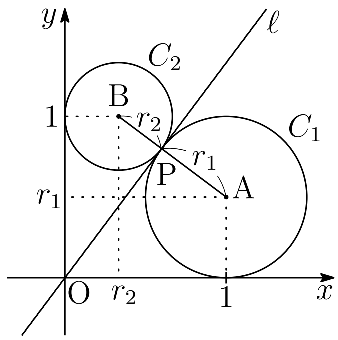
すなわち　$\dfrac{1}{2}x^2 - x - \dfrac{1}{2} \leqq y \leqq -\dfrac{1}{2}x^2 - x + \dfrac{1}{2}$

よって，点Pの表す領域は，右の図の斜線部分で境界を含む．その面積を S とすると



$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{1} \left\{ \left(-\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2}\right) \right\} dx \\ &= -\int_{-1}^{1} (x+1)(x-1)\,dx \\ &= \frac{1}{6}\{1 - (-1)\}^3 = \mathbf{\frac{4}{3}} \end{aligned}$$

3 円C_1，C_2の中心をそれぞれA，Bとし，C_1，C_2が外接する点をPとすると，右の図から，$\mathrm{OP}=1$である．これから，Bのy座標は1であるから，$\mathrm{A}(1,\ r_1)$，$\mathrm{B}(r_2,\ 1)$とおくと，$\mathrm{AB}=r_1+r_2$より



$$(r_1+r_2)^2=(r_2-1)^2+(1-r_1)^2$$

整理すると　　$r_1r_2+r_1+r_2=1$

$r_2=\dfrac{1-r_1}{1+r_1}=\dfrac{2}{1+r_1}-1$であるから

$$\begin{aligned}8r_1+9r_2&=8r_1+9\left(\frac{2}{1+r_1}-1\right)\\&=8(1+r_1)+\frac{18}{1+r_1}-17\\&\geqq 2\sqrt{8(1+r_1)\cdot\frac{18}{1+r_1}}-17=7\end{aligned}$$

上式において，等号が成立するとき

$$8(1+r_1)=\frac{18}{1+r_1}\quad \text{すなわち}\quad r_1=\frac{1}{2},\quad r_2=\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

このとき，点Pは2点$\mathrm{A}\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$，$\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{3},\ 1\right)$を$r_1:r_2=3:2$に内分するから，その座標は

$$\left(\frac{2\cdot 1+3\cdot\frac{1}{3}}{3+2},\ \frac{2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot 1}{3+2}\right)\quad \text{すなわち}\quad \left(\frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\right)$$

よって，ℓの方程式は　$\boldsymbol{y=\dfrac{4}{3}x}$，　最小値は　**7**

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 文字列の左から n 番目の文字が A となる確率を p_n とすると，p_{n+2} は最初に裏が出た場合と表が場合により

$$p_{n+2} = \frac{1}{2}p_{n+1} + \frac{1}{2}p_n \quad (n \geqq 1) \quad \cdots (*)$$

このとき　$p_1 = \frac{1}{2}$，$p_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

$(*)$ より　$p_{n+2} - p_{n+1} = -\frac{1}{2}(p_{n+1} - p_n)$，

$$p_{n+2} + \frac{1}{2}p_{n+1} = p_{n+1} + \frac{1}{2}p_n$$

第 1 式から　$p_{n+1} - p_n = (p_2 - p_1)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

第 2 式から　$p_{n+1} + \frac{1}{2}p_n = p_2 + \frac{1}{2}p_1 = 1$

上の 2 式から　$\boldsymbol{p_n = \frac{2}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\} \quad (n \geqq 1)}$

(2) 文字列の左から $n-1$ 番目の文字が A で，かつ n 番目の文字列が B となる確率を q_n とすると，q_{n+2} は，(1) と同様に

$$q_{n+2} = \frac{1}{2}q_{n+1} + \frac{1}{2}q_n \quad (n \geqq 2) \quad \cdots (**)$$

このとき　$q_2 = 0$，$q_3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$(**)$ より　$q_{n+2} - q_{n+1} = -\frac{1}{2}(q_{n+1} - q_n)$，

$$q_{n+2} + \frac{1}{2}q_{n+1} = q_{n+1} + \frac{1}{2}q_n$$

第 1 式から　$q_{n+1} - q_n = (q_3 - q_2)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

第 2 式から　$q_{n+1} + \frac{1}{2}q_n = q_3 + \frac{1}{2}q_2 = \frac{1}{4}$

上の 2 式から　$\boldsymbol{q_n = \frac{1}{6}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\} \quad (n \geqq 2)}$