平成 26 年度　東京大学 2 次試験前期日程 (数学問題)100 分
文科 (一類，二類，三類)　数 I・II・A・B

1 以下の問いに答えよ．

(1) t を実数の定数とする．実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ を

$$f(x) = -2x^2 + 8tx - 12x + t^3 - 17t^2 + 39t - 18$$

と定める．このとき，関数 $f(x)$ の最大値を t を用いて表せ．

(2) (1) の「関数 $f(x)$ の最大値」を $g(t)$ とする．t が $t \geqq -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の範囲を動くとき，$g(t)$ の最小値を求めよ．

2 a を自然数 (すなわち 1 以上の整数) の定数とする．
白球と赤球があわせて 1 個以上入っている袋 U に対して，次の操作 $(*)$ を考える．

$(*)$ 袋 U から球を 1 個取り出し，

(i) 取り出した球が白球のときは，袋 U の中身が白球 a 個，赤球 1 個となるようにする．

(ii) 取り出した球が赤球のときは，その球を袋 U へ戻すことなく，袋 U の中身はそのままにする．

はじめに袋 U の中に，白球が $a+2$ 個，赤球が 1 個入っているとする．この袋 U に対して操作 $(*)$ を繰り返し行う．

たとえば，1 回目の操作で白球が出たとすると，袋 U の中身は白球 a 個，赤球 1 個となり，さらに 2 回目の操作で赤球が出たとすると，袋 U の中身は白球 a 個のみとなる．

n 回目に取り出した球が赤球である確率を p_n とする．ただし，袋 U の中の個々の球の取り出される確率は等しいものとする．

(1) p_1，p_2 を求めよ．

(2) $n \geqq 3$ に対して p_n を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 座標平面の原点を O で表す．
線分 $y=\sqrt{3}\,x$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ 上の点 P と，線分 $y=-\sqrt{3}\,x$ $(-3 \leqq x \leqq 0)$ 上の点 Q が，線分 OP と線分 OQ の長さの和が 6 となるように動く．このとき，線分 PQ の通過する領域を D とする．

(1) s を $-3 \leqq s \leqq 2$ をみたす実数とするとき，点 $(s,\ t)$ が D に入るような t の範囲を求めよ．

(2) D を図示せよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ r を 0 以上の整数とし，数列 $\{a_n\}$ を次のように定める．

$$a_1=r, \quad a_2=r+1, \quad a_{n+2}=a_{n+1}(a_n+1) \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

また，素数 p を 1 つとり，a_n を p で割った余りを b_n とする．ただし，0 を p で割った余りは 0 とする．

(1) 自然数 n に対し，b_{n+2} は $b_{n+1}(b_n+1)$ を p で割った余りと一致することを示せ．

(2) $r=2$，$p=17$ の場合に，10 以下のすべての自然数 n に対して，b_n を求めよ．

(3) ある 2 つの相異なる自然数 n，m に対して，

$$b_{n+1}=b_{m+1}>0, \quad b_{n+2}=b_{m+2}$$

が成り立ったとする．このとき，$b_n=b_m$ が成り立つことを示せ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $f(x) = -2x^2 + 8tx - 12x + t^3 - 17t^2 + 39t - 18$

$= -2(x - 2t + 3)^2 + t^3 - 9t^2 + 15t$

よって，最大値は　　$\boldsymbol{t^3 - 9t^2 + 15t}$

(2) (1) の結果から　$g(t) = t^3 - 9t^2 + 15t$

ゆえに　　$g'(t) = 3t^2 - 18t + 15 = 3(t-1)(t-5)$

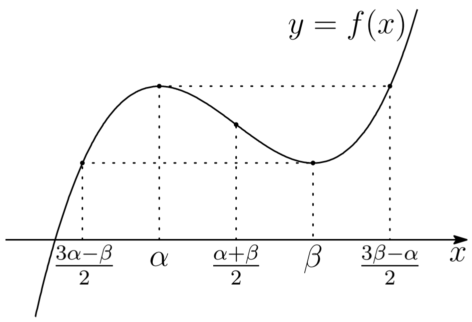
t	$\cdots$	1	$\cdots$	5	$\cdots$
$g'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(t)$	$\nearrow$	極大 7	$\searrow$	極小 -25	$\nearrow$

$g(-1) = -25$，$-1 < -\dfrac{1}{\sqrt{2}} < 1$ より，$g\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) > -25$

よって，求める最小値は　　$g(5) = \boldsymbol{-25}$

補足　極値をとる 2 点 $(1,\ 7)$，$(5, -25)$ の中点 $(3, -18)$ に関して，グラフは対称である．また，$g(-1) = g(5)$，$g(1) = g(7)$．

3 次関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a > 0)$ について，$f'(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解 α，β をもつとき $(\alpha < \beta)$，$y = f(x)$ のグラフは次のようになる．



とくに，数列 $\dfrac{3\alpha - \beta}{2}$，$\alpha$，$\dfrac{\alpha + \beta}{2}$，$\beta$，$\dfrac{3\beta - \alpha}{2}$ は，等差数列をなす．　■

2 (1) 1 回目の袋 U の中には白球が $a+2$ 個，赤球が 1 個入っているから

$$p_1 = \frac{1}{(a+2)+1} = \boldsymbol{\frac{1}{a+3}}$$

1 回目に赤球が出ると，2 回目に球を取り出すとき，袋 U の中には赤球はない．1 回目に白球が出て，2 回目 (袋 U の中に白球 a 個，赤球が 1 個) に赤球が出る確率であるから

$$p_2 = (1-p_1)\times\frac{1}{a+1} = \left(1-\frac{1}{a+3}\right)\frac{1}{a+1} = \boldsymbol{\frac{a+2}{(a+1)(a+3)}}$$

(2) (i) n 回目 ($n \geqq 1$) の試行で赤球が出たとき (確率 p_n)，$n+1$ 回目の試行 (袋 U の中に赤球は 0 個) で赤球が出る確率は　0

(ii) n 回目 ($n \geqq 1$) の試行で白球が出たとき (確率 $1-p_n$)，$n+1$ 回目の試行 (袋 U の中に白球 a 個，赤球 1 個) で赤球が出る確率は

$$(1-p_n)\times\frac{1}{a+1}$$

(i)，(ii) より　$p_{n+1} = 0 + (1-p_n)\times\frac{1}{a+1} = \frac{1}{a+1}(1-p_n)$

したがって　$p_{n+1} - \frac{1}{a+2} = -\frac{1}{a+1}\left(p_n - \frac{1}{a+2}\right)$

よって，$n \geqq 1$ のとき

$$p_n - \frac{1}{a+2} = \left(p_1 - \frac{1}{a+2}\right)\left(-\frac{1}{a+1}\right)^{n-1}$$

$$\boldsymbol{p_n = \frac{1}{a+2} - \frac{1}{(a+2)(a+3)}\left(-\frac{1}{a+1}\right)^{n-1}}$$

■

3 (1) $\mathrm{P}(p,\ \sqrt{3}p)$，$\mathrm{Q}(q, -\sqrt{3}q)$ とすると $(0 \leqq p \leqq 2, -2 \leqq q \leqq 0)$，

$$\mathrm{OP} = 2p, \quad \mathrm{OQ} = -2q$$

$\mathrm{OP}+\mathrm{OQ} = 6$ であるから　$2p + (-2q) = 6$　ゆえに　$q = p - 3$

したがって　$0 \leqq p \leqq 2,\ -3 \leqq p - 3 \leqq 0$　すなわち　$0 \leqq p \leqq 2$

2 点 $\mathrm{P}(p,\ \sqrt{3}p)$，$\mathrm{Q}(p-3, -\sqrt{3}(p-3))$ を通る直線は

$$y - \sqrt{3}p = \frac{2p-3}{\sqrt{3}}(x - p)$$

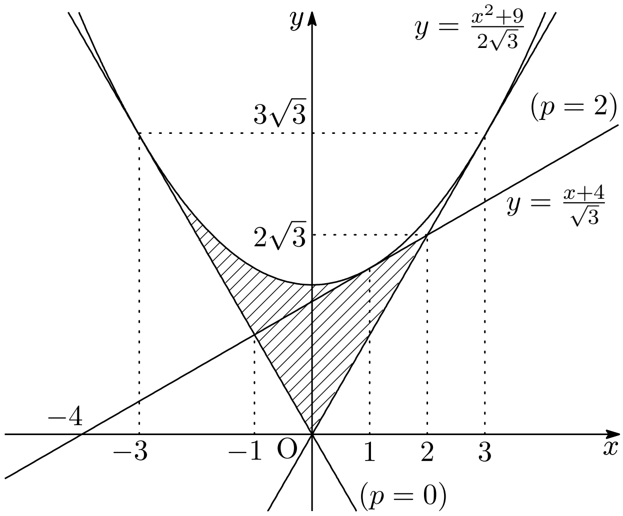
すなわち　$y = \dfrac{(2p-3)x - 2p^2 + 6p}{\sqrt{3}}$　$\cdots$①

直線 ① の x を固定し，y が極値をとる点では，$\dfrac{dy}{dp} = 0$ であるから

$$\frac{dy}{dp} = \frac{1}{\sqrt{3}}(2x - 4p + 6) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad x = 2p - 3 \quad \cdots ②$$

①，② から p を消去すると　$y = \dfrac{x^2+9}{2\sqrt{3}}$　$\cdots(*)$

D は，$0 \leqq p \leqq 2$ のとき，2 点 $\mathrm{P}(p,\ \sqrt{3}p)$，$\mathrm{Q}(p-3, -\sqrt{3}(p-3))$ を結ぶ線分 PQ(直線 ①) が通過する領域であるから，$(*)$ が直線 PQ の包絡線であることに注意すると，その領域は，下の図の斜線部分で，境界線を含む．



よって，$0 \leqq s \leqq 2$ をみたす点 $(s,\ t)$ が D にあるとき

$-3 \leqq s \leqq 0$ のとき　$\boldsymbol{-\sqrt{3}s \leqq t \leqq \dfrac{s^2+9}{2\sqrt{3}}}$

$0 \leqq s \leqq 1$ のとき　$\boldsymbol{\sqrt{3}s \leqq t \leqq \dfrac{s^2+9}{2\sqrt{3}}}$

$1 \leqq s \leqq 2$ のとき　$\boldsymbol{\sqrt{3}s \leqq t \leqq \dfrac{s+4}{\sqrt{3}}}$

(2) 領域 D は (1) で示した領域．■

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) a_n を素数 p で割った余りが b_n であるから

$$a_{n+2} \equiv b_{n+2}, \quad a_{n+1} \equiv b_{n+1}, \quad a_n \equiv b_n \qquad (\mathrm{mod}\ p)$$

また，$a_{n+2} = a_{n+1}(a_n + 1)$ であるから　$b_{n+2} \equiv b_{n+1}(b_n + 1)\ (\mathrm{mod}\ p)$

よって，b_{n+2} は $b_{n+1}(b_n + 1)$ を p で割った余りと一致する．

(2) $r = 2$ のとき，$a_1 = 2$，$a_2 = 3$ であるから，(1) の結果を用いると

$$b_1 \equiv 2, \quad b_2 \equiv 3, \quad b_{n+2} = b_{n+1}(b_n + 1) \quad (\mathrm{mod}\ 17)$$

したがって，法 17 について

$$\begin{aligned}
b_3 &\equiv b_2(b_1 + 1) \equiv 3(2 + 1) \equiv 9 \\
b_4 &\equiv b_3(b_2 + 1) \equiv 9(3 + 1) \equiv 36 \equiv 2 \\
b_5 &\equiv b_4(b_3 + 1) \equiv 2(9 + 1) \equiv 20 \equiv 3 \\
b_6 &\equiv b_5(b_4 + 1) \equiv 3(2 + 1) \equiv 9 \\
b_7 &\equiv b_6(b_5 + 1) \equiv 9(3 + 1) \equiv 36 \equiv 2 \\
b_8 &\equiv b_7(b_6 + 1) \equiv 2(9 + 1) \equiv 20 \equiv 3 \\
b_9 &\equiv b_8(b_7 + 1) \equiv 3(2 + 1) \equiv 9 \\
b_{10} &\equiv b_9(b_8 + 1) \equiv 9(3 + 1) \equiv 36 \equiv 2
\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{b_1 = 2,\ \ b_2 = 3,\ \ b_3 = 9,\ \ b_4 = 2,\ \ b_5 = 3,}$
$\boldsymbol{b_6 = 9,\ \ b_7 = 2,\ \ b_8 = 3,\ \ b_9 = 9,\ \ b_{10} = 2}$

(3) (1) の結果を用いると

$$b_{n+2} \equiv b_{n+1}(b_n + 1), \quad b_{m+2} \equiv b_{m+1}(b_m + 1) \quad (\mathrm{mod}\ p)$$

$b_{n+2} = b_{m+2}$ より　$b_{n+1}(b_n + 1) \equiv b_{m+1}(b_m + 1)\ (\mathrm{mod}\ p)$

$q = b_{n+1} = b_{m+1}$ とおくと $(q > 0)$

$$q(b_n + 1) \equiv q(b_m + 1) \quad \text{ゆえに} \quad q(b_n - b_m) \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ p)$$

$q \not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p)$ であるから　$b_n - b_m \equiv 0$　すなわち　$b_n \equiv b_m\ (\mathrm{mod}\ p)$

よって，$b_n = b_m$ が成り立つ．■