平成 25 年度　東京大学 2 次試験前期日程 (数学問題)100 分
文科 (一類，二類，三類)　数 I・II・A・B

1 関数 $y = x(x-1)(x-3)$ のグラフを C，原点 O を通る傾き t の直線を ℓ とし，C と ℓ が O 以外に共有点をもつとする．C と ℓ の共有点を O，P，Q とし，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ と $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$ の積を $g(t)$ とおく．ただし，それらの共有点の 1 つが接点である場合は，O，P，Q のうちの 2 つが一致して，その接点であるとする．関数 $g(t)$ の増減を調べ，その極値を求めよ．

2 座標平面上の 3 点

$$\mathrm{P}(0, -\sqrt{2}),\quad \mathrm{Q}(0,\ \sqrt{2}),\quad \mathrm{A}(a,\ \sqrt{a^2+1})\quad (0 \leqq a \leqq 1)$$

を考える．

(1) 2 つの線分の長さの差 $\mathrm{PA} - \mathrm{AQ}$ は a によらない定数であることを示し，その値を求めよ．

(2) Q を端点とし A を通る半直線と放物線 $y = \dfrac{\sqrt{2}}{8}x^2$ との交点を B とする．点 B から直線 $y = 2$ へ下ろした垂線と直線 $y = 2$ との交点を C とする．このとき，線分の長さの和

$$\mathrm{PA} + \mathrm{AB} + \mathrm{BC}$$

は a によらない定数であることを示し，その値を求めよ．

3 a，b を実数の定数とする．実数 x，y が

$$x^2 + y^2 \leqq 25,\quad 2x + y \leqq 5$$

をともに満たすとき，$z = x^2 + y^2 - 2ax - 2by$ の最小値を求めよ．

4 A，B の 2 人がいる．投げたとき表裏の出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ のコインが 1 枚あり，最初は A がそのコインを持っている．次の操作を繰り返す．

(i) A がコインを持っているときは，コインを投げ，表が出れば A に 1 点を与え，コインは A がそのまま持つ．裏が出れば，両者に点を与えず，A はコインを B に渡す．

(ii) B がコインを持っているときは，コインを投げ，表が出れば B に 1 点を与え，コインは B がそのまま持つ．裏が出れば，両者に点を与えず，B はコインを A に渡す．

そして A，B のいずれかが 2 点を獲得した時点で，2 点を獲得した方の勝利とする．たとえば，コインが表，裏，表，表と出た場合，この時点で A は 1 点，B は 2 点を獲得しているので B の勝利となる．
A，B あわせてちょうど n 回コインを投げ終えたときに A の勝利となる確率 $p(n)$ を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ $C: y=x(x-1)(x-3)$ と $\ell: y=tx$ から y を消去すると

$$x(x-1)(x-3)=tx \quad \text{ゆえに} \quad x\{(x-1)(x-3)-t\}=0$$

C と ℓ の原点以外の交点の x 座標は，方程式

$$x^2-4x+3-t=0 \quad \cdots(*)$$

の実数解であるから

$$D/4=(-2)^2-(3-t) \geqq 0 \quad \text{これを解いて} \quad t \geqq -1$$

このとき，方程式 $(*)$ の解を α，β とすると，解と係数の関係により

$$\alpha\beta=3-t$$

P，Q は ℓ 上の点であるから，$\mathrm{P}(\alpha,\ t\alpha)$，$\mathrm{Q}(\beta,\ t\beta)$ とすると

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=|\alpha|\sqrt{1+t^2}, \quad |\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=|\beta|\sqrt{1+t^2}$$

ゆえに　$g(t)=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=|\alpha\beta|(1+t^2)=|3-t|(1+t^2)$

したがって　$g(t)=\begin{cases} (3-t)(1+t^2) & (-1 \leqq t < 3) \\ (t-3)(1+t^2) & (3 \leqq t) \end{cases}$

$-1 \leqq t < 3$ のとき　$g'(t)=-3t^2+6t-1$

このとき，$g'(t)=0$ の解を $\alpha=\dfrac{3-\sqrt{6}}{3}$，$\beta=\dfrac{3+\sqrt{6}}{3}$ とおくと

$$g(t)=-\frac{1}{3}g'(t)(-t+1)+\frac{4}{3}t+\frac{8}{3}$$

ゆえに　$g(\alpha)=\dfrac{4}{3}\alpha+\dfrac{8}{3}=4-\dfrac{4\sqrt{6}}{9}$，　$g(\beta)=\dfrac{4}{3}\beta+\dfrac{8}{3}=4+\dfrac{4\sqrt{6}}{9}$

$3 \leqq t$ のとき　$g'(t)=3t^2-6t+1=3t(t-2)+1>0$

t	-1	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$		$+$
$g(t)$	8	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって　**極小値** $\boldsymbol{g\left(\dfrac{3-\sqrt{6}}{3}\right)=4-\dfrac{4\sqrt{6}}{9}}$，**極小値** $\boldsymbol{g(3)=0}$，

極大値 $\boldsymbol{g\left(\dfrac{3+\sqrt{6}}{3}\right)=4+\dfrac{4\sqrt{6}}{9}}$ ■

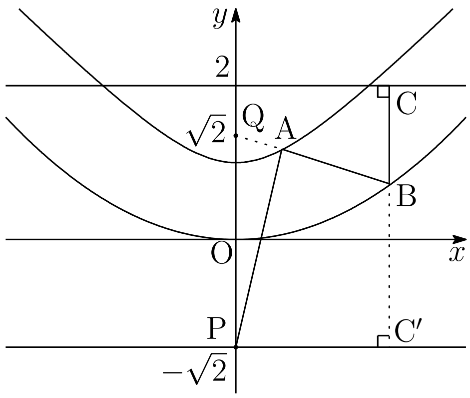
$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\mathrm{P}(0, -\sqrt{2})$，$\mathrm{Q}(0,\ \sqrt{2})$，$\mathrm{A}(a,\ \sqrt{a^2+1})$ より

$$\begin{aligned}\mathrm{PA}^2 &= a^2 + (\sqrt{a^2+1}+\sqrt{2})^2 = 2a^2+3+2\sqrt{2(a^2+1)}\\ &= (2a^2+2)+1+2\sqrt{(2a^2+2)\cdot 1} = (\sqrt{2a^2+2}+1)^2,\\ \mathrm{AQ}^2 &= a^2 + (\sqrt{a^2+1}-\sqrt{2})^2 = 2a^2+3-2\sqrt{2(a^2+1)}\\ &= (2a^2+2)+1-2\sqrt{(2a^2+2)\cdot 1} = (\sqrt{2a^2+2}-1)^2\end{aligned}$$

したがって　$\mathrm{PA} = \sqrt{2a^2+2}+1$，$\mathrm{AQ} = \sqrt{2a^2+2}-1$

$$\mathrm{PA}-\mathrm{AQ} = (\sqrt{2a^2+2}+1)-(\sqrt{2a^2+2}-1) = \mathbf{2}$$

(2) $\mathrm{B}\left(t,\ \dfrac{\sqrt{2}}{8}t^2\right)$ とする $(0 \leqq t \leqq 2\sqrt{2})$.



B から直線 $y = -\sqrt{2}$ へ直線 BC' を下ろすと

$$\mathrm{QB}^2 = t^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{8}t^2 - 2\right)^2 = \frac{1}{32}t^4 + \frac{1}{2}t^2 + 2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{8}t^2 + \sqrt{2}\right)^2$$

ゆえに　$\mathrm{QB} = \dfrac{\sqrt{2}}{8}t^2 + \sqrt{2} = \mathrm{BC}'$

(1) の結果および上式により

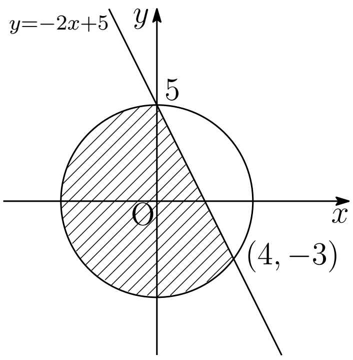
$$\begin{aligned}\mathrm{PA}+\mathrm{AB}+\mathrm{BC} &= (\mathrm{PA}-\mathrm{AQ}) + (\mathrm{QA}+\mathrm{AB}) + \mathrm{BC}\\ &= 2 + \mathrm{QB} + \mathrm{BC}\\ &= 2 + (\mathrm{QB}-\mathrm{BC}') + (\mathrm{BC}'+\mathrm{BC})\\ &= 2 + 0 + \mathrm{CC}' = 2 + (2+\sqrt{2}) = \mathbf{4+\sqrt{2}}\end{aligned}$$

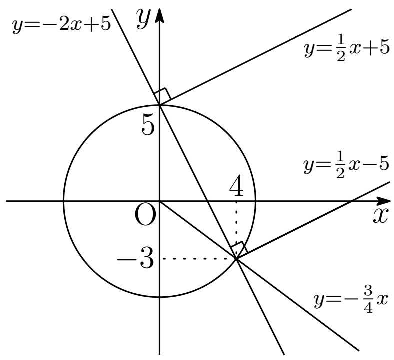
補足 A は双曲線 $x^2-y^2=-1$ 上にあり，P，Q はその焦点であるから，$|\mathrm{PA}-\mathrm{AQ}|$ は双曲線の 2 頂点 $(0,\ 1)$，$(0, -1)$ 間の距離に等しい．
また，Q は放物線 $x^2 = 4\sqrt{2}y$ の焦点で，直線 $x = -\sqrt{2}$ はその準線であるから，$\mathrm{QB} = \mathrm{BC}'$ が成り立つ [1]．■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kyukou/kyukou_jou_2010.pdf $\boxed{3}$ を参照．

3 連立不等式 $\begin{cases} x^2+y^2 \leqq 25 \\ 2x+y \leqq 5 \end{cases}$

の表す領域は下の図の斜線部分で境界線を含む.





座標平面上に 2 点 P$(x,\ y)$，A(a, b) をとると

$$\begin{aligned} z &= x^2+y^2-2ax-2by \\ &= (x-a)^2+(y-b)^2-(a^2+b^2) = \mathrm{AP}^2-\mathrm{OA}^2 \end{aligned}$$

(i) $a^2+b^2 \leqq 25,\ 2a+b \leqq 5$ のとき，P = A より**最小値 $-a^2-b^2$**

(ii) $a^2+b^2 \geqq 25$ かつ $\left(a \leqq 0 \text{ または } b \leqq -\dfrac{3}{4}a\right)$ のとき，AP = OA − 5 より

$$(\mathrm{OA}-5)^2-\mathrm{OA}^2 = 25-10\mathrm{OA} \quad \text{ゆえに} \quad \text{最小値 } \boldsymbol{25-10\sqrt{a^2+b^2}}$$

(iii) $a \geqq 0$，$b \geqq \dfrac{1}{2}a+5$ のとき，P$(0,\ 5)$ より

$$\mathrm{AP}^2-\mathrm{OA}^2 = a^2+(b-5)^2-(a^2+b^2) \quad \text{ゆえに} \quad \text{最小値 } \boldsymbol{25-10b}$$

(iv) $b \geqq -\dfrac{3}{4}a$，$b \leqq \dfrac{1}{2}a-5$ のとき，P$(4, -3)$ より

$$\mathrm{AP}^2-\mathrm{OA}^2 = (a-4)^2+(b+3)^2-(a^2+b^2)$$

ゆえに　最小値 $\boldsymbol{25-8a+6b}$

(v) $b \geqq -2a+5$，$\dfrac{1}{2}a-5 \leqq b \leqq \dfrac{1}{2}a+5$ のとき，$\mathrm{AP} = \dfrac{|2a+b-5|}{\sqrt{5}}$ より

$$\mathrm{AP}^2-\mathrm{OA}^2 = \frac{(2a+b-5)^2}{5}-(a^2+b^2)$$

ゆえに　最小値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{5}(25+4ab-20a-10b-a^2-4b^2)}$ ■

4 3回コインを投げ終えたとき，AとBの勝敗は次のようになる．

$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	
表	表		$\cdots$ (2回目にAの勝利)
	裏	表	$\cdots$ A : 1 − 1 : B
		裏	$\cdots$ A : 1 − 0 : B
裏	表	表	$\cdots$ (3回目にBの勝利)
		裏	$\cdots$ A : 0 − 1 : B
	裏	表	$\cdots$ A : 1 − 0 : B
		裏	$\cdots$ A : 0 − 0 : B

したがって　$p(1) = 0$，$p(2) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$，$p(3) = 0$　$\cdots(*)$

コインをちょうど n 回投げ終え $(n \geqq 4)$，Aが勝利するとき，AとBの得点の推移は，次の(i)〜(iii)である．

(i) n 回目よりも前にAだけが得点するのは奇数回目で，n は偶数．

$$\begin{array}{c} \mathrm{A\,B\cdots A\,B\ A\ A\,B\cdots A\,B\ A} \\ \underbrace{\text{裏裏}\cdots\text{裏裏}}_{\text{偶数個}}\ \text{表}\ \underbrace{\text{裏裏}\cdots\text{裏裏}}_{\text{偶数個}}\ \text{表} \end{array}$$

1から $n-1$ の整数の中に奇数は $\dfrac{n}{2}$ 個で，この確率は　$\dfrac{n}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{n}{2^{n+1}}$

(ii) n 回目よりも前にA，Bの順に得点するのは奇数回目で，n は奇数．

$$\begin{array}{c} \mathrm{A\,B\cdots A\,B\ A\ A\,B\cdots A\ B\ B\,A\cdots B\ A} \\ \underbrace{\text{裏裏}\cdots\text{裏裏}}_{\text{偶数個}}\ \text{表}\ \underbrace{\text{裏裏}\cdots\text{裏}}_{\text{奇数個}}\ \text{表}\ \underbrace{\text{裏裏}\cdots\text{裏}}_{\text{奇数個}}\ \text{表} \end{array}$$

1から $n-1$ の整数の中に奇数は $\dfrac{n-1}{2}$ 個で，この確率は

$${}_{\frac{n-1}{2}}\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{(n-1)(n-3)}{2^{n+3}}$$

(iii) n 回目よりも前にB，Aの順に得点するのは偶数回目で，n は奇数．

$$\begin{array}{c} \mathrm{A\,B\cdots A\ B\ B\,A\cdots B\ A\ A\,B\cdots A\,B\ A} \\ \underbrace{\text{裏裏}\cdots\text{裏}}_{\text{奇数個}}\ \text{表}\ \underbrace{\text{裏裏}\cdots\text{裏}}_{\text{奇数個}}\ \text{表}\ \underbrace{\text{裏裏}\cdots\text{裏裏}}_{\text{偶数個}}\ \text{表} \end{array}$$

1から $n-1$ の整数の中に偶数は $\dfrac{n-1}{2}$ 個で，この確率は

$${}_{\frac{n-1}{2}}\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{(n-1)(n-3)}{2^{n+3}}$$

n が偶数のとき，(i) より　　$p(n) = \dfrac{n}{2^{n+1}} \quad (n \geqq 4)$

n が奇数のとき，(ii)，(iii) より

$$p(n) = \frac{(n-1)(n-3)}{2^{n+3}} + \frac{(n-1)(n-3)}{2^{n+3}} = \frac{(n-1)(n-3)}{2^{n+2}} \quad (n \geqq 5)$$

$(*)$ に注意すると，上の 2 式は $n = 1, 2, 3$ のときも成立するから

$$\boldsymbol{p(n) = \begin{cases} \dfrac{(n-1)(n-3)}{2^{n+2}} & (n \text{ が奇数}) \\ \dfrac{n}{2^{n+1}} & (n \text{ が偶数}) \end{cases}}$$

■