平成 24 年度　東京大学 2 次試験前期日程 (数学問題)100 分
文科 (一類，二類，三類)　数 I・II・A・B

問題 1 2 3 4

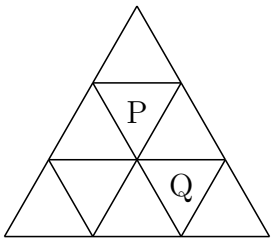
1 座標平面上の点 $(x,\ y)$ が次の方程式を満たす．

$$2x^2 + 4xy + 3y^2 + 4x + 5y - 4 = 0$$

このとき，x のとりうる最大の値を求めよ．

2 実数 t は $0 < t < 1$ を満たすとし，座標平面上の 4 点 $\mathrm{O}(0, 0)$，$\mathrm{A}(0,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ 0)$，$\mathrm{C}(t,\ 0)$ を考える．また線分 AB 上の点 D を $\angle\mathrm{ACO} = \angle\mathrm{BCD}$ となるように定める．t を動かしたときの三角形 ACD の面積の最大値を求めよ．

3 図のように，正三角形を 9 つの部屋に辺で区切り，部屋 P，Q を定める．1 つの球が部屋 P を出発し，1 秒ごとに，そのままその部屋にとどまることなく，辺を共有する隣の部屋に等確率で移動する．球が n 秒後に部屋 Q にある確率を求めよ．



4 座標平面上の放物線 C を $y = x^2 + 1$ で定める．s，t は実数とし $t < 0$ を満たすとする．点 $(s,\ t)$ から放物線 C へ引いた接線を l_1，l_2 とする．

(1) l_1，l_2 の方程式を求めよ．

(2) a を正の実数とする．放物線 C と直線 l_1，l_2 で囲まれる領域の面積が a となる $(s,\ t)$ を全て求めよ．

解答例

1 与えられた方程式を y について整理すると

$$3y^2+(4x+5)y+(2x^2+4x-4)=0$$

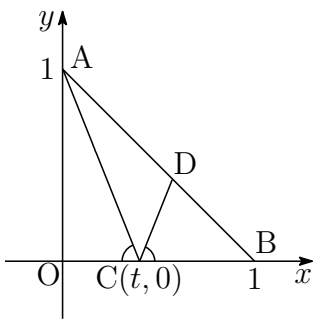
y は実数解をもつから，係数について

$$(4x+5)^2-4\cdot 3(2x^2+4x-4)\geqq 0$$

ゆえに　$8x^2+8x-73\leqq 0$　これを解いて　$\dfrac{-2-5\sqrt{6}}{4}\leqq x\leqq \dfrac{-2+5\sqrt{6}}{4}$

よって，求める x の最大値は　$\boldsymbol{\dfrac{-2+5\sqrt{6}}{4}}$ ■

2 2 点 A(0, 1)，C(t, 0) を通る直線の傾きは　$-\dfrac{1}{t}$



直線 CD は，傾き $\dfrac{1}{t}$ で点 C(t, 0) を通るから

$$y=\frac{1}{t}(x-t)\quad すなわち\quad y=\frac{1}{t}x-1$$

D はこれと直線 AB : $y=-x+1$ の交点であるから

$$\mathrm{D}\left(\frac{2t}{1+t},\ \frac{1-t}{1+t}\right)$$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(t,\ 0)-(0,\ 1)=(t,-1)$,

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\left(\dfrac{2t}{1+t},\ \dfrac{1-t}{1+t}\right)-(0,\ 1)=\dfrac{2t}{1+t}(1,-1)$

三角形 ACD の面積を S とすると，$0<t<1$ に注意して

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{2t}{1+t}(1-t)=2-t-\frac{2}{1+t}=3-\left(1+t+\frac{2}{1+t}\right)$$

$1+t>0$ であるから，相加平均・相乗平均の大小関係により

$$1+t+\frac{2}{1+t}\geqq 2\sqrt{(1+t)\cdot\frac{2}{1+t}}=2\sqrt{2}$$

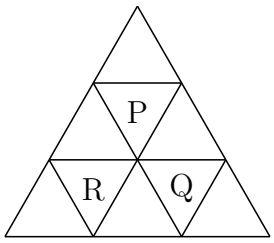
上式で等号が成立するのは

$$1+t=\frac{2}{1+t}\quad ゆえに\quad t=\sqrt{2}-1$$

したがって　$S\leqq 3-2\sqrt{2}$

よって，△ACD の面積は $t=\sqrt{2}-1$ のとき，最大値 $\boldsymbol{3-2\sqrt{2}}$ をとる． ■

3 右の図のように部屋Rをとると，n 秒後の球は，n が偶数のとき，部屋P，Q，Rにあり，n が奇数のとき，P，Q，R以外の部屋にある．
したがって，n が奇数のとき，部屋Qにある確率は



$$0$$

n が偶数のとき，$n=2k$ 秒後に，P，Q，Rにある確率を p_k，q_k，r_k とすると

$$p_{k+1}=p_k\times\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+q_k\times\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+r_k\times\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}$$
$$q_{k+1}=q_k\times\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+r_k\times\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+p_k\times\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}$$
$$r_{k+1}=r_k\times\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+p_k\times\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+q_k\times\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}$$

したがって，k を0以上の整数とすると，次の確率漸化式が成立する．

$$p_0=1,\quad q_0=r_0=0$$
$$p_{k+1}=\frac{2}{3}p_k+\frac{1}{6}q_k+\frac{1}{6}r_k\quad\cdots①$$
$$q_{k+1}=\frac{1}{6}p_k+\frac{2}{3}q_k+\frac{1}{6}r_k\quad\cdots②$$
$$r_{k+1}=\frac{1}{6}p_k+\frac{1}{6}q_k+\frac{2}{3}r_k\quad\cdots③$$

①，②，③の辺々を加えると

$$p_{k+1}+q_{k+1}+r_{k+1}=p_k+q_k+r_k\quad\text{ゆえに}\quad p_k+q_k+r_k=1\quad\cdots④$$

① − ② より　$p_{k+1}-q_{k+1}=\dfrac{1}{2}(p_k-q_k)$　ゆえに　$p_k-q_k=\dfrac{1}{2^k}$　$\cdots⑤$

② − ③ より　$q_{k+1}-r_{k+1}=\dfrac{1}{2}(q_k-r_k)$　ゆえに　$q_k-r_k=0$　$\cdots⑥$

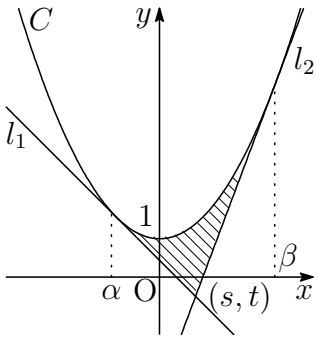
④，⑤，⑥ より　$q_k=\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{2^k}\right)$

よって，求める確率は　**n が奇数のとき　0,**

n が偶数のとき　$\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}}\right)$

■

4 (1) $y=x^2+1$ を微分すると　$y'=2x$



C 上の点 $(\alpha,\ \alpha^2+1)$ における接線を l_1 とすると

$$y-(\alpha^2+1)=2\alpha(x-\alpha)$$

すなわち　　$l_1: y=2\alpha x-\alpha^2+1$

C 上の点 $(\beta,\ \beta^2+1)$ における接線を l_2 とすると

$$l_2: y=2\beta x-\beta^2+1$$

l_1 と l_2 の交点が $(s,\ t)$ であるから

$$s=\frac{\alpha+\beta}{2},\quad t=\alpha\beta+1 \quad \text{ゆえに} \quad \alpha+\beta=2s,\quad \alpha\beta=t-1$$

α，β を解とする 2 次方程式は　$\lambda^2-2s\lambda+t-1=0 \quad \cdots(*)$

これを解いて　　$\lambda=s\pm\sqrt{s^2-t+1}$

$\alpha<\beta$ とすると　$\alpha=s-\sqrt{s^2-t+1}$，$\beta=s+\sqrt{s^2-t+1}$

l_1 は，点 $(s,\ t)$ を通り，傾き 2α の直線であるから

$$\boldsymbol{y=2(s-\sqrt{s^2-t+1})(x-s)+t}$$

l_2 は，点 $(s,\ t)$ を通り，傾き 2β の直線であるから

$$\boldsymbol{y=2(s+\sqrt{s^2-t+1})(x-s)+t}$$

(2) C と l_1，l_2 で囲まれる領域の面積が a であるから

$$\begin{aligned}
a&=\int_\alpha^s\{(x^2+1)-(2\alpha x-\alpha^2+1)\}dx\\
&\qquad+\int_s^\beta\{(x^2+1)-(2\beta x-\beta^2+1)\}dx\\
&=\int_\alpha^s(x-\alpha)^2\,dx+\int_s^\beta(x-\beta)^2\,dx\\
&=\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\right]_\alpha^s+\left[\frac{1}{3}(x-\beta)^3\right]_s^\beta=\frac{1}{3}(s-\alpha)^3+\frac{1}{3}(\beta-s)^3\\
&=\frac{1}{3}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha\right)^3+\frac{1}{3}\left(\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^3\\
&=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{12}(2\sqrt{s^2-t+1})^3=\frac{2}{3}(s^2-t+1)^{\frac{3}{2}} \quad \cdots(**)
\end{aligned}$$

$t<0$ であるから，$(**)$ より　$a>\dfrac{2}{3}$　このとき　$(s^2-t+1)^{\frac{3}{2}}=\dfrac{3a}{2}$

したがって　$t=s^2+1-\left(\dfrac{3a}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$　このとき　$s^2+1-\left(\dfrac{3a}{2}\right)^{\frac{2}{3}}<0$

これを解いて　$-\sqrt{\left(\dfrac{3a}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-1}<s<\sqrt{\left(\dfrac{3a}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-1}$

よって，$a>\dfrac{2}{3}$ のとき，$(s,\ t)$ は

$$\boldsymbol{t=s^2+1-\left(\frac{3a}{2}\right)^{\frac{2}{3}},\quad -\sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-1}<s<\sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-1}}$$

$0<a\leqq\dfrac{2}{3}$ のとき，$(s,\ t)$ は存在しない．

補足 $s=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$，$C$ と l_1，l_2 との接点をそれぞれ P，Q とすると，C と直線 PQ で囲まれた部分の面積は $2a$ となる[1]．■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_bun_2009.pdf $\boxed{4}$ を参照．