平成24年度　東京大学２次試験前期日程 (数学問題)100分
文科 (一類，二類，三類)　数 I・II・A・B

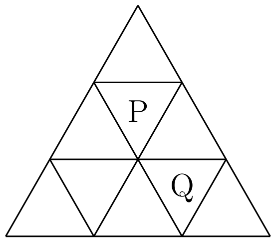
1 座標平面上の点 $(x,\ y)$ が次の方程式を満たす．

$$2x^2 + 4xy + 3y^2 + 4x + 5y - 4 = 0$$

このとき，x のとりうる最大の値を求めよ．

2 実数 t は $0 < t < 1$ を満たすとし，座標平面上の4点 O(0, 0)，A(0, 1)，B(1, 0)，C(t, 0) を考える．また線分 AB 上の点 D を ∠ACO = ∠BCD となるように定める．t を動かしたときの三角形 ACD の面積の最大値を求めよ．

3 図のように，正三角形を9つの部屋に辺で区切り，部屋 P，Q を定める．1つの球が部屋 P を出発し，1秒ごとに，そのままその部屋にとどまることなく，辺を共有する隣の部屋に等確率で移動する．球が n 秒後に部屋 Q にある確率を求めよ．



4 座標平面上の放物線 C を $y = x^2 + 1$ で定める．s，t は実数とし $t < 0$ を満たすとする．点 $(s,\ t)$ から放物線 C へ引いた接線を l_1，l_2 とする．

(1) l_1，l_2 の方程式を求めよ．

(2) a を正の実数とする．放物線 C と直線 l_1，l_2 で囲まれる領域の面積が a となる $(s,\ t)$ を全て求めよ．

解答例

1 与えられた方程式を y について整理すると

$$3y^2+(4x+5)y+(2x^2+4x-4)=0$$

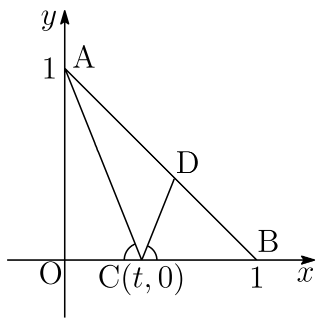
y は実数解をもつから，係数について

$$(4x+5)^2-4{\cdot}3(2x^2+4x-4)\geqq 0$$

ゆえに　$8x^2+8x-73\leqq 0$　これを解いて　$\dfrac{-2-5\sqrt{6}}{4}\leqq x\leqq\dfrac{-2+5\sqrt{6}}{4}$

よって，求める x の最大値は　$\boldsymbol{\dfrac{-2+5\sqrt{6}}{4}}$ ■

2 2 点 A$(0,\ 1)$，C$(t,\ 0)$ を通る直線の傾きは　$-\dfrac{1}{t}$



直線 CD は，傾き $\dfrac{1}{t}$ で点 C$(t,\ 0)$ を通るから

$$y=\frac{1}{t}(x-t)\quad \text{すなわち}\quad y=\frac{1}{t}x-1$$

D はこれと直線 AB : $y=-x+1$ の交点であるから

$$\mathrm{D}\left(\frac{2t}{1+t},\ \frac{1-t}{1+t}\right)$$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(t,\ 0)-(0,\ 1)=(t,-1)$，

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\left(\dfrac{2t}{1+t},\ \dfrac{1-t}{1+t}\right)-(0,\ 1)=\dfrac{2t}{1+t}(1,-1)$

三角形 ACD の面積を S とすると，$0<t<1$ に注意して

$$S=\frac{1}{2}{\cdot}\frac{2t}{1+t}(1-t)=2-t-\frac{2}{1+t}=3-\left(1+t+\frac{2}{1+t}\right)$$

$1+t>0$ であるから，相加平均・相乗平均の大小関係により

$$1+t+\frac{2}{1+t}\geqq 2\sqrt{(1+t){\cdot}\frac{2}{1+t}}=2\sqrt{2}$$

上式で等号が成立するのは

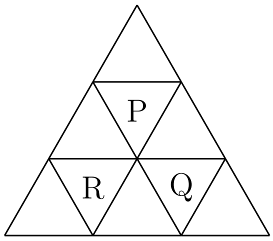
$$1+t=\frac{2}{1+t}\quad \text{ゆえに}\quad t=\sqrt{2}-1$$

したがって　$S\leqq 3-2\sqrt{2}$

よって，△ACD の面積は $t=\sqrt{2}-1$ のとき，最大値 $\boldsymbol{3-2\sqrt{2}}$ をとる． ■

3 右の図のように部屋 R をとると，n 秒後の球は，n が偶数のとき，部屋 P，Q，R にあり，n が奇数のとき，P，Q，R 以外の部屋にある．
したがって，n が奇数のとき，部屋 Q にある確率は

$$0$$



n が偶数のとき，$n=2k$ 秒後に，P，Q，R にある確率を p_k，q_k，r_k とすると

$$p_{k+1} = p_k \times \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) + q_k \times \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + r_k \times \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}$$
$$q_{k+1} = q_k \times \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) + r_k \times \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + p_k \times \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}$$
$$r_{k+1} = r_k \times \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) + p_k \times \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + q_k \times \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}$$

したがって，k を 0 以上の整数とすると，次の確率漸化式が成立する．

$$p_0 = 1,\quad q_0 = r_0 = 0$$
$$p_{k+1} = \frac{2}{3}p_k + \frac{1}{6}q_k + \frac{1}{6}r_k \quad \cdots ①$$
$$q_{k+1} = \frac{1}{6}p_k + \frac{2}{3}q_k + \frac{1}{6}r_k \quad \cdots ②$$
$$r_{k+1} = \frac{1}{6}p_k + \frac{1}{6}q_k + \frac{2}{3}r_k \quad \cdots ③$$

①，②，③ の辺々を加えると

$$p_{k+1} + q_{k+1} + r_{k+1} = p_k + q_k + r_k \quad \text{ゆえに} \quad p_k + q_k + r_k = 1 \quad \cdots ④$$

① − ② より $p_{k+1} - q_{k+1} = \frac{1}{2}(p_k - q_k)$ ゆえに $p_k - q_k = \frac{1}{2^k}$ $\cdots ⑤$

② − ③ より $q_{k+1} - r_{k+1} = \frac{1}{2}(q_k - r_k)$ ゆえに $q_k - r_k = 0$ $\cdots ⑥$

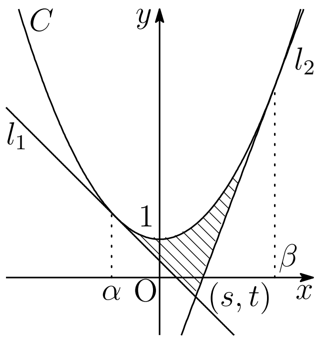
④，⑤，⑥ より $q_k = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$

よって，求める確率は **n が奇数のとき $\mathbf{0}$,**

n が偶数のとき $\boldsymbol{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}\right)}$

■

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $y = x^2 + 1$ を微分すると　$y' = 2x$



C 上の点 $(\alpha,\ \alpha^2+1)$ における接線を l_1 とすると

$$y - (\alpha^2 + 1) = 2\alpha(x - \alpha)$$

すなわち　$l_1 : y = 2\alpha x - \alpha^2 + 1$

C 上の点 $(\beta,\ \beta^2+1)$ における接線を l_2 とすると

$$l_2 : y = 2\beta x - \beta^2 + 1$$

l_1 と l_2 の交点が $(s,\ t)$ であるから

$$s = \frac{\alpha + \beta}{2},\quad t = \alpha\beta + 1 \quad \text{ゆえに} \quad \alpha + \beta = 2s,\quad \alpha\beta = t - 1$$

α，β を解とする 2 次方程式は　$\lambda^2 - 2s\lambda + t - 1 = 0 \quad \cdots (*)$

これを解いて　$\lambda = s \pm \sqrt{s^2 - t + 1}$

$\alpha < \beta$ とすると　$\alpha = s - \sqrt{s^2 - t + 1}$，$\beta = s + \sqrt{s^2 - t + 1}$

l_1 は，点 $(s,\ t)$ を通り，傾き 2α の直線であるから

$$\boldsymbol{y = 2(s - \sqrt{s^2 - t + 1})(x - s) + t}$$

l_2 は，点 $(s,\ t)$ を通り，傾き 2β の直線であるから

$$\boldsymbol{y = 2(s + \sqrt{s^2 - t + 1})(x - s) + t}$$

(2) C と l_1，l_2 で囲まれる領域の面積が a であるから

$$\begin{aligned} a &= \int_\alpha^s \{(x^2 + 1) - (2\alpha x - \alpha^2 + 1)\}dx \\ &\qquad + \int_s^\beta \{(x^2 + 1) - (2\beta x - \beta^2 + 1)\}dx \\ &= \int_\alpha^s (x - \alpha)^2\,dx + \int_s^\beta (x - \beta)^2\,dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x - \alpha)^3\right]_\alpha^s + \left[\frac{1}{3}(x - \beta)^3\right]_s^\beta = \frac{1}{3}(s - \alpha)^3 + \frac{1}{3}(\beta - s)^3 \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \alpha\right)^3 + \frac{1}{3}\left(\beta - \frac{\alpha + \beta}{2}\right)^3 \\ &= \frac{1}{12}(\beta - \alpha)^3 = \frac{1}{12}(2\sqrt{s^2 - t + 1})^3 = \frac{2}{3}(s^2 - t + 1)^{\frac{3}{2}} \quad \cdots (**) \end{aligned}$$

$t<0$ であるから，(**) より　$a>\dfrac{2}{3}$　このとき　$(s^2-t+1)^{\frac{3}{2}}=\dfrac{3a}{2}$

したがって　$t=s^2+1-\left(\dfrac{3a}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$　このとき　$s^2+1-\left(\dfrac{3a}{2}\right)^{\frac{2}{3}}<0$

これを解いて　$-\sqrt{\left(\dfrac{3a}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-1}<s<\sqrt{\left(\dfrac{3a}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-1}$

よって，$a>\dfrac{2}{3}$ のとき，$(s,\ t)$ は

$$\boldsymbol{t=s^2+1-\left(\dfrac{3a}{2}\right)^{\frac{2}{3}},\quad -\sqrt{\left(\dfrac{3a}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-1}<s<\sqrt{\left(\dfrac{3a}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-1}}$$

$0<a\leqq\dfrac{2}{3}$ のとき，$(s,\ t)$ は存在しない．

補足　$s=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$，$C$ と l_1，l_2 との接点をそれぞれ P，Q とすると，C と直線 PQ で囲まれた部分の面積は $2a$ となる [1]．■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_bun_2009.pdf $\boxed{4}$ を参照．