

平成 23 年度 東京大学 2 次試験前期日程 (数学問題)100 分
 文科 (一類, 二類, 三類) 数 I・II・A・B

- 1 x の 3 次関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ が, 3 つの条件

$$f(1) = 1, \quad f(-1) = -1, \quad \int_{-1}^1 (bx^2 + cx + d) dx = 1$$

を全て満たしているとする. このような $f(x)$ の中で定積分

$$I = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \{f''(x)\}^2 dx$$

を最小にするものを求め, そのときの I の値を求めよ. ただし, $f''(x)$ は $f'(x)$ の導関数を表す.

- 2 実数 x の小数部分を, $0 \leq y < 1$ かつ $x - y$ が整数となる実数 y のこととし, これを記号 $\langle x \rangle$ で表す. 実数 a に対して, 無限数列 $\{a_n\}$ の各項 a_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を次のように順次定める.

$$(i) \quad a_1 = \langle a \rangle$$

$$(ii) \quad \begin{cases} a_n \neq 0 \text{ のとき, } a_{n+1} = \left\langle \frac{1}{a_n} \right\rangle \\ a_n = 0 \text{ のとき, } a_{n+1} = 0 \end{cases}$$

(1) $a = \sqrt{2}$ のとき, 数列 $\{a_n\}$ を求めよ.

(2) 任意の自然数 n に対して $a_n = a$ となるような $\frac{1}{3}$ 以上の実数 a をすべて求めよ.

3 p, q を2つの正の整数とする. 整数 a, b, c で条件

$$-q \leq b \leq 0 \leq a \leq p, \quad b \leq c \leq a$$

を満たすものを考え, このような a, b, c を $[a, b; c]$ の形に並べたものを (p, q) パターンと呼ぶ. 各 (p, q) パターン $[a, b; c]$ に対して

$$w([a, b; c]) = p - q - (a + b)$$

とおく.

(1) (p, q) パターンのうち, $w([a, b; c]) = -q$ となるものの個数を求めよ.

また, $w([a, b; c]) = p$ となる (p, q) パターンの個数を求めよ.

以下 $p = q$ の場合を考える.

(2) s を p 以下の整数とする. (p, p) パターンで $w[a, b; c] = -p + s$ となるものの個数を求めよ.

4 座標平面上の1点 $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ をとる. 放物線 $y = x^2$ 上の2点 $Q(\alpha, \alpha^2), R(\beta, \beta^2)$ を, 3点 P, Q, R が QR を底辺とする二等辺三角形をなすように動かすとき, $\triangle PQR$ の重心 $G(X, Y)$ の軌跡を求めよ.

解答例

1 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ について, $f(1) = 1$, $f(-1) = -1$ より

$$\begin{cases} a + b + c + d = 1 \\ -a + b - c + d = -1 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad (*) \begin{cases} a + c = 1 \\ b + d = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^1 (bx^2 + cx + d) dx = 1 \text{ より} \quad \frac{2}{3}b + 2d = 1$$

$$\text{これと} (*) \text{の第2式を連立すると} \quad b = -\frac{3}{4}, \quad d = \frac{3}{4}$$

$$f(x) \text{ から} \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c, \quad f''(x) = 6ax + 2b$$

$$b = -\frac{3}{4} \text{ より, } f''(x) = 3 \left(2ax - \frac{1}{2} \right) \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \{f''(x)\}^2 dx = 9 \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \left(2ax - \frac{1}{2} \right)^2 dx \\ &= 9 \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \left(4a^2x^2 - 2ax + \frac{1}{4} \right) dx \\ &= 9 \left[\frac{4a^2}{3}x^3 - ax^2 + \frac{x}{4} \right]_{-1}^{\frac{1}{2}} = 9 \left(\frac{3}{2}a^2 + \frac{3}{4}a + \frac{3}{8} \right) \\ &= \frac{27}{2} \left(a^2 + \frac{1}{2}a + \frac{1}{4} \right) = \frac{27}{2} \left\{ \left(a + \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{3}{16} \right\} \\ &= \frac{27}{2} \left(a + \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{81}{32} \end{aligned}$$

したがって, $a = -\frac{1}{4}$ のとき, I は最小値 $\frac{81}{32}$ をとる.

(*) の第1式より, $c = \frac{5}{4}$ であるから, このとき

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}$$



2 (1) $a_1 = \langle \sqrt{2} \rangle = \sqrt{2} - 1$

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1 \text{ より } \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}-1} \right\rangle = \langle \sqrt{2} + 1 \rangle = \sqrt{2} - 1$$

よって $a_n = \sqrt{2} - 1 \quad (n = 1, 2, \dots)$

(2) $\left\langle \frac{1}{a} \right\rangle = \frac{1}{a} - m = a$ (m は自然数) であるから

$$a^2 + ma - 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 + 4}}{2}$$

$a \geq 0$ であるから $a = \frac{-m + \sqrt{m^2 + 4}}{2} \quad \dots (*)$

$a \geq \frac{1}{3}$ であるから, $\frac{-m + \sqrt{m^2 + 4}}{2} \geq \frac{1}{3}$ より

$$\sqrt{m^2 + 4} \geq m + \frac{2}{3} \quad \text{両辺を平方して整理すると} \quad m \leq \frac{8}{3}$$

m は自然数であるから $m = 1, 2$ (*) より $a = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}, \sqrt{2} - 1$ ■

3 (1) $w([a, b; c]) = p - q - (a + b)$ より, $w([a, b; c]) = -q$ となるとき

$$p - q - (a + b) = -q \quad \text{ゆえに} \quad p = a + b$$

$-q \leq b \leq 0 \leq a \leq p$ より, 上式を満たすのは $a = p, b = 0$

$b \leq c \leq a$ より, $0 \leq c \leq p$ であるから, 求める個数は $p + 1$ (個)

$w([a, b; c]) = p$ となるとき

$$p - q - (a + b) = p \quad \text{ゆえに} \quad q = -a - b$$

$-q \leq b \leq 0 \leq a \leq p$ より, 上式を満たすのは $a = 0, b = -q$

$b \leq c \leq a$ より, $-q \leq c \leq 0$ であるから, 求める個数は $q + 1$ (個)

(2) $p = q$ より, $w([a, b; c]) = -(a + b)$

$w([a, b; c]) = -p + s$ となるとき

$$-(a + b) = -p + s \quad \text{ゆえに} \quad b = -a + p - s$$

これを $-p \leq b \leq 0 \leq a \leq p$ に代入して

$$-p \leq -a + p - s \leq 0 \leq a \leq p \quad \text{ゆえに} \quad \begin{cases} 0 \leq a \leq p \\ p - s \leq a \leq 2p - s \end{cases}$$

ここで, $m = \max(0, p - s)$, $M = \min(p, 2p - s)$ とおくと

$$m = \frac{p - s + |p - s|}{2}, \quad M = \frac{3p - s - |p - s|}{2}$$

$s \leq p$ であるから, $|p - s| = p - s$ より

$$m = p - s, \quad M = p$$

求める個数を $f(s)$ とする.

(i) $m > M$ のとき $p - s > p$

すなわち $s < 0$ のとき $f(s) = 0$

(ii) $m \leq M$ のとき $p - s \leq p$

すなわち, $0 \leq s \leq p$ のとき

$$\begin{aligned} f(s) &= \sum_{a=m}^M (a - b + 1) = \sum_{a=p-s}^p \{a - (-a + p - s) + 1\} \\ &= \sum_{a=p-s}^p (2a - p + s + 1) = 2 \sum_{a=p-s}^p a + (-p + s + 1) \sum_{a=p-s}^p 1 \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \{(p - s) + p\} \{p - (p - s) + 1\} \\ &\quad + (-p + s + 1) \{p - (p - s) + 1\} \\ &= (2p - s)(s + 1) + (-p + s + 1)(s + 1) \\ &= (p + 1)(s + 1) \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad f(s) = \begin{cases} 0 & (s < 0) \\ (p + 1)(s + 1) & (0 \leq s \leq p) \end{cases}$$

■

4 $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, $Q(\alpha, \alpha^2)$, $R(\beta, \beta^2)$ とする $\triangle PQR$ の重心が $G(X, Y)$ であるから

$$3X = \alpha + \beta + \frac{1}{2}, \quad 3Y = \alpha^2 + \beta^2 + \frac{1}{4} \quad \text{ゆえに} \quad (*) \quad \begin{cases} \alpha + \beta = 3X - \frac{1}{2} \\ \alpha^2 + \beta^2 = 3Y - \frac{1}{4} \end{cases}$$

条件により, $PQ^2 = PR^2$ であるから

$$\begin{aligned} \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\alpha^2 - \frac{1}{4}\right)^2 &= \left(\beta - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\beta^2 - \frac{1}{4}\right)^2 \\ \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\beta - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\alpha^2 - \frac{1}{4}\right)^2 - \left(\beta^2 - \frac{1}{4}\right)^2 &= 0 \\ (\alpha - \beta)(\alpha + \beta - 1) + (\alpha^2 - \beta^2) \left(\alpha^2 + \beta^2 - \frac{1}{2}\right) &= 0 \end{aligned}$$

$Q \neq R$ より, $\alpha - \beta \neq 0$ であるから

$$\begin{aligned} \alpha + \beta - 1 + (\alpha + \beta) \left(\alpha^2 + \beta^2 - \frac{1}{2}\right) &= 0 \\ (\alpha + \beta) \left(\alpha^2 + \beta^2 + \frac{1}{2}\right) &= 1 \\ \alpha^2 + \beta^2 &= \frac{1}{\alpha + \beta} - \frac{1}{2} \quad \dots (**) \end{aligned}$$

(*) より, α, β は 2 次方程式の解で, これらは異なる 2 つの実数であるから

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{(\alpha + \beta)^2 + (\alpha - \beta)^2}{2} > \frac{1}{2}(\alpha + \beta)^2$$

これを (**) に代入すると $\frac{1}{\alpha + \beta} - \frac{1}{2} > \frac{1}{2}(\alpha + \beta)^2$

ここで, $t = \alpha + \beta$ において整理すると

$$\frac{t^3 + t - 2}{t} < 0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{(t-1)(t^2 + t + 2)}{t} < 0$$

$t^2 + t + 2 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$ に注意して, これを解くと $0 < t < 1$

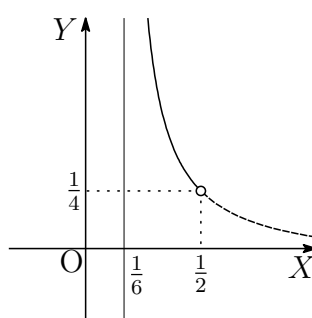
$0 < \alpha + \beta < 1$ であるから, (*) の第 1 式より $\frac{1}{6} < X < \frac{1}{2}$

(*) を (**) に代入すると
$$3Y - \frac{1}{4} = \frac{1}{3X - \frac{1}{2}} - \frac{1}{2}$$

したがって, $G(X, Y)$ の軌跡の方程式は

$$Y = \frac{1}{9\left(X - \frac{1}{6}\right)} - \frac{1}{12} \quad \left(\frac{1}{6} < X < \frac{1}{2}\right)$$

よって, $G(X, Y)$ の軌跡は, 下の図のようになる.



注意 α と β を解とする 2 次方程式は

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$

この方程式の判別式を D とすると

$$D = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (\alpha - \beta)^2$$

実係数の 2 次方程式の解が α, β であるとき

$$\text{異なる 2 つの実数解をもつ} \iff (\alpha - \beta)^2 > 0$$

