平成23年度　東京大学2次試験前期日程(数学問題)100分
文科(一類，二類，三類)　数I・II・A・B

問題 1 2 3 4

1 x の3次関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ が，3つの条件

$$f(1) = 1, \quad f(-1) = -1, \quad \int_{-1}^{1} (bx^2 + cx + d)\,dx = 1$$

を全て満たしているとする．このような $f(x)$ の中で定積分

$$I = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \{f''(x)\}^2\,dx$$

を最小にするものを求め，そのときの I の値を求めよ．ただし，$f''(x)$ は $f'(x)$ の導関数を表す．

2 実数 x の小数部分を，$0 \leqq y < 1$ かつ $x - y$ が整数となる実数 y のこととし，これを記号 $\langle x \rangle$ で表す．実数 a に対して，無限数列 $\{a_n\}$ の各項 a_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を次のように順次定める．

(i)　$a_1 = \langle a \rangle$

(ii)　$\begin{cases} a_n \neq 0 \text{ のとき，} & a_{n+1} = \left\langle \dfrac{1}{a_n} \right\rangle \\ a_n = 0 \text{ のとき，} & a_{n+1} = 0 \end{cases}$

(1) $a = \sqrt{2}$ のとき，数列 $\{a_n\}$ を求めよ．

(2) 任意の自然数 n に対して $a_n = a$ となるような $\dfrac{1}{3}$ 以上の実数 a をすべて求めよ．

3 p，q を 2 つの正の整数とする．整数 $a,\ b,\ c$ で条件

$$-q \leqq b \leqq 0 \leqq a \leqq p, \quad b \leqq c \leqq a$$

を満たすものを考え，このような $a,\ b,\ c$ を $[a,\ b;\ c]$ の形に並べたものを $(p,\ q)$ パターンと呼ぶ．各 $(p,\ q)$ パターン $[a,\ b;\ c]$ に対して

$$w([a,\ b;\ c]) = p - q - (a+b)$$

とおく．

(1) $(p,\ q)$ パターンのうち，$w([a,\ b;\ c]) = -q$ となるものの個数を求めよ．
　　また，$w([a,\ b;\ c]) = p$ となる $(p,\ q)$ パターンの個数を求めよ．

以下 $p=q$ の場合を考える．

(2) s を p 以下の整数とする．$(p,\ p)$ パターンで $w[a,\ b;\ c] = -p+s$ となるものの個数を求めよ．

4 座標平面上の 1 点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$ をとる．放物線 $y=x^2$ 上の 2 点 $\mathrm{Q}(\alpha,\ \alpha^2)$，$\mathrm{R}(\beta,\ \beta^2)$ を，3 点 P，Q，R が QR を底辺とする二等辺三角形をなすように動かすとき，$\triangle$PQR の重心 $\mathrm{G}(X,\ Y)$ の軌跡を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ について，$f(1)=1$，$f(-1)=-1$ より

$$\begin{cases} a+b+c+d=1 \\ -a+b-c+d=-1 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad (*)\begin{cases} a+c=1 \\ b+d=0 \end{cases}$$

$\displaystyle\int_{-1}^{1}(bx^2+cx+d)\,dx=1$ より　$\dfrac{2}{3}b+2d=1$

これと $(*)$ の第 2 式を連立すると　$b=-\dfrac{3}{4}$，$d=\dfrac{3}{4}$

$f(x)$ から　$f'(x)=3ax^2+2bx+c$，$f''(x)=6ax+2b$

$b=-\dfrac{3}{4}$ より，$f''(x)=3\left(2ax-\dfrac{1}{2}\right)$ であるから

$$\begin{aligned}
I&=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\{f''(x)\}^2\,dx=9\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\left(2ax-\frac{1}{2}\right)^2dx \\
&=9\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\left(4a^2x^2-2ax+\frac{1}{4}\right)dx \\
&=9\left[\frac{4a^2}{3}x^3-ax^2+\frac{x}{4}\right]_{-1}^{\frac{1}{2}}=9\left(\frac{3}{2}a^2+\frac{3}{4}a+\frac{3}{8}\right) \\
&=\frac{27}{2}\left(a^2+\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}\right)=\frac{27}{2}\left\{\left(a+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{16}\right\} \\
&=\frac{27}{2}\left(a+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{81}{32}
\end{aligned}$$

したがって，$a=-\dfrac{1}{4}$ のとき，I は最小値 $\boldsymbol{\dfrac{81}{32}}$ をとる．

$(*)$ の第 1 式より，$c=\dfrac{5}{4}$ であるから，このとき

$$\boldsymbol{f(x)=-\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}x+\frac{3}{4}}$$

■

2 (1) $a_1 = \langle\sqrt{2}\rangle = \sqrt{2}-1$

$\dfrac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$ より $\left\langle\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}\right\rangle = \langle\sqrt{2}+1\rangle = \sqrt{2}-1$

よって $\boldsymbol{a_n = \sqrt{2}-1 \quad (n = 1, 2, \cdots)}$

(2) $\left\langle\dfrac{1}{a}\right\rangle = \dfrac{1}{a} - m = a$ (m は自然数) であるから

$$a^2 + ma - 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a = \frac{-m \pm \sqrt{m^2+4}}{2}$$

$a \geqq 0$ であるから $a = \dfrac{-m+\sqrt{m^2+4}}{2} \quad \cdots (*)$

$a \geqq \dfrac{1}{3}$ であるから，$\dfrac{-m+\sqrt{m^2+4}}{2} \geqq \dfrac{1}{3}$ より

$$\sqrt{m^2+4} \geqq m + \frac{2}{3} \quad \text{両辺を平方して整理すると} \quad m \leqq \frac{8}{3}$$

m は自然数であるから $m = 1,\ 2$ $(*)$ より $\boldsymbol{a = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2},\ \sqrt{2}-1}$ ■

3 (1) $w([a,\ b;\ c]) = p - q - (a+b)$ より，$w([a,\ b;\ c]) = -q$ となるとき

$$p - q - (a+b) = -q \quad \text{ゆえに} \quad p = a+b$$

$-q \leqq b \leqq 0 \leqq a \leqq p$ より，上式を満たすのは $a = p,\ b = 0$
$b \leqq c \leqq a$ より，$0 \leqq c \leqq p$ であるから，求める個数は $\boldsymbol{p+1}$ **(個)**

$w([a,\ b;\ c]) = p$ となるとき

$$p - q - (a+b) = p \quad \text{ゆえに} \quad q = -a-b$$

$-q \leqq b \leqq 0 \leqq a \leqq p$ より，上式を満たすのは $a = 0,\ b = -q$
$b \leqq c \leqq a$ より，$-q \leqq c \leqq 0$ であるから，求める個数は $\boldsymbol{q+1}$ **(個)**

(2) $p=q$ より，$w([a,\ b;\ c])=-(a+b)$

$w([a,\ b;\ c])=-p+s$ となるとき

$$-(a+b)=-p+s \quad \text{ゆえに} \quad b=-a+p-s$$

これを $-p \leqq b \leqq 0 \leqq a \leqq p$ に代入して

$$-p \leqq -a+p-s \leqq 0 \leqq a \leqq p \quad \text{ゆえに} \quad \begin{cases} 0 \leqq a \leqq p \\ p-s \leqq a \leqq 2p-s \end{cases}$$

ここで，$m=\max(0,\ p-s)$，$M=\min(p,\ 2p-s)$ とおくと

$$m=\frac{p-s+|p-s|}{2}, \quad M=\frac{3p-s-|p-s|}{2}$$

$s \leqq p$ であるから，$|p-s|=p-s$ より

$$m=p-s, \quad M=p$$

求める個数を $f(s)$ とする．

(i) $m>M$ のとき　$p-s>p$

すなわち　$s<0$ のとき　$f(s)=0$

(ii) $m \leqq M$ のとき　$p-s \leqq p$

すなわち，$0 \leqq s \leqq p$ のとき

$$\begin{aligned} f(s) &= \sum_{a=m}^{M}(a-b+1) = \sum_{a=p-s}^{p}\{a-(-a+p-s)+1\} \\ &= \sum_{a=p-s}^{p}(2a-p+s+1) = 2\sum_{a=p-s}^{p} a + (-p+s+1)\sum_{a=p-s}^{p} \\ &= 2\cdot\frac{1}{2}\{(p-s)+p\}\{p-(p-s)+1\} \\ &\qquad\qquad\qquad + (-p+s+1)\{p-(p-s)+1\} \\ &= (2p-s)(s+1)+(-p+s+1)(s+1) \\ &= (p+1)(s+1) \end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{f(s)=\begin{cases} 0 & (s<0) \\ (p+1)(s+1) & (0 \leqq s \leqq p) \end{cases}}$ ■

$\boxed{4}$ $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$，$\mathrm{Q}(\alpha,\ \alpha^2)$，$\mathrm{R}(\beta,\ \beta^2)$ とする $\triangle\mathrm{PQR}$ の重心が $\mathrm{G}(X,\ Y)$ であるから

$$3X = \alpha + \beta + \frac{1}{2},\quad 3Y = \alpha^2 + \beta^2 + \frac{1}{4}\quad \text{ゆえに}\quad (*)\begin{cases} \alpha + \beta = 3X - \dfrac{1}{2} \\ \alpha^2 + \beta^2 = 3Y - \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

条件により，$\mathrm{PQ}^2 = \mathrm{PR}^2$ であるから

$$\begin{aligned} \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\alpha^2 - \frac{1}{4}\right)^2 &= \left(\beta - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\beta^2 - \frac{1}{4}\right)^2 \\ \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\beta - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\alpha^2 - \frac{1}{4}\right)^2 - \left(\beta^2 - \frac{1}{4}\right)^2 &= 0 \\ (\alpha - \beta)(\alpha + \beta - 1) + (\alpha^2 - \beta^2)\left(\alpha^2 + \beta^2 - \frac{1}{2}\right) &= 0 \end{aligned}$$

$\mathrm{Q} \neq \mathrm{R}$ より，$\alpha - \beta \neq 0$ であるから

$$\begin{aligned} \alpha + \beta - 1 + (\alpha + \beta)\left(\alpha^2 + \beta^2 - \frac{1}{2}\right) &= 0 \\ (\alpha + \beta)\left(\alpha^2 + \beta^2 + \frac{1}{2}\right) &= 1 \\ \alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{\alpha + \beta} - \frac{1}{2} & \quad \cdots (**) \end{aligned}$$

$(*)$ より，α，β は 2 次方程式の解で，これらは異なる 2 つの実数であるから

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{(\alpha + \beta)^2 + (\alpha - \beta)^2}{2} > \frac{1}{2}(\alpha + \beta)^2$$

これを $(**)$ に代入すると　$\dfrac{1}{\alpha + \beta} - \dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{2}(\alpha + \beta)^2$

ここで，$t = \alpha + \beta$ とおいて整理すると

$$\frac{t^3 + t - 2}{t} < 0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{(t - 1)(t^2 + t + 2)}{t} < 0$$

$t^2 + t + 2 = \left(t + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{7}{4} > 0$ に注意して，これを解くと　$0 < t < 1$

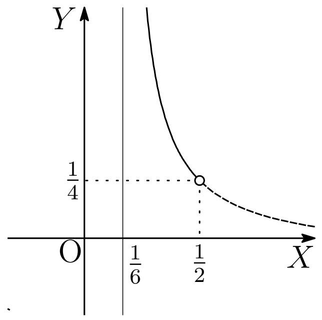
$0 < \alpha + \beta < 1$ であるから，$(*)$ の第 1 式より　$\dfrac{1}{6} < X < \dfrac{1}{2}$

$(*)$ を $(**)$ に代入するとすると　$3Y-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{3X-\dfrac{1}{2}}-\dfrac{1}{2}$

したがって，$\mathrm{G}(X,\ Y)$ の軌跡の方程式は

$$\boldsymbol{Y=\dfrac{1}{9\left(X-\dfrac{1}{6}\right)}-\dfrac{1}{12}\quad\left(\dfrac{1}{6}<X<\dfrac{1}{2}\right)}$$

よって，$\mathrm{G}(X,\ Y)$ の軌跡は，下の図のようになる．



注意　α と β を解とする 2 次方程式は

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$$

この方程式の判別式を D とすると

$$D=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(\alpha-\beta)^2$$

実係数の 2 次方程式の解が α，β であるとき

異なる 2 つの実数解をもつ　$\Longleftrightarrow$　$(\alpha-\beta)^2>0$

■