平成 19 年度　東京大学 2 次試験前期日程 (数学問題)100 分
文科 (一類，二類，三類)　数 I・II・A・B

問題 1 2 3 4

1 連立不等式

$$y(y-|x^2-5|+4) \leqq 0, \quad y+x^2-2x-3 \leqq 0$$

の表す領域を D とする．

(1) D を図示せよ．

(2) D の面積を求めよ．

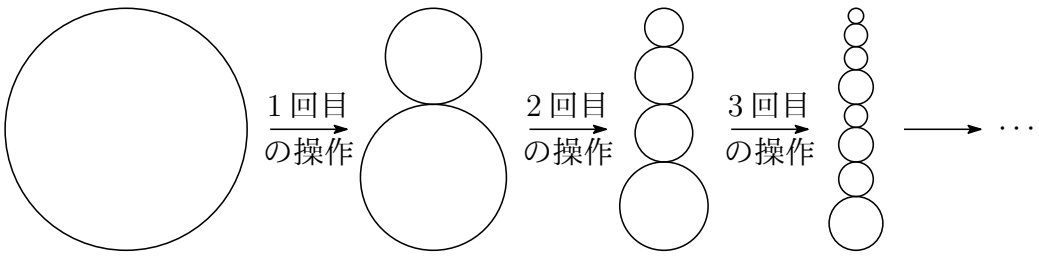
2 r は $0<r<1$ をみたす実数，n は 2 以上の整数とする．平面上に与えられた 1 つの円を，次の条件 ①，② をみたす 2 つの円で置き換える操作 (**P**) を考える．

① 新しい 2 つの円の半径は $r:1-r$ で，半径の和はあもとの円の半径に等しい．

② 新しい 2 つの円は互いに外接し，もとの円に接する．

以下のようにして，平面上に 2^n 個の円を作る．

- 最初に，平面上に半径 1 の円を描く．
- 次に，この円に対して操作 (**P**) を行い，2 つの円を得る (これを 1 回目の操作という)．
- k 回目の操作で得られた 2^k 個の円のそれぞれについて，操作 (**P**) を行い，2^{k+1} 個の円を得る $(1 \leqq k \leqq n-1)$．



(1) n 回目の操作で得られる 2^n 個の円の周の長さの和を求めよ．

(2) 2 回目の操作で得られる 4 つの円の面積の和を求めよ．

(3) n 回目の操作で得られる 2^n 個の円の面積の和を求めよ．

3 正の整数の下2桁(けた)とは，100の位以上を無視した数をいう．たとえば2000，12345の下2桁はそれぞれ0，45である．m が正の整数全体を動くとき，$5m^4$ の下2桁として現れる数をすべて求めよ．

4 表が出る確率が p，裏が出る確率が $1-p$ であるような硬貨がある．ただし，$0<p<1$ とする．この硬貨を投げて，次のルール (**R**) の下で，ブロック積ゲームを行う．

(**R**)
- ① ブロックの高さは，最初は0とする．
- ② 硬貨を投げて裏が出れば高さ1のブロックを1つ積み上げ，裏が出ればブロックをすべて取り除いて高さ0に戻す．

n を正の整数，m を $0 \leqq m \leqq n$ をみたす整数とする．

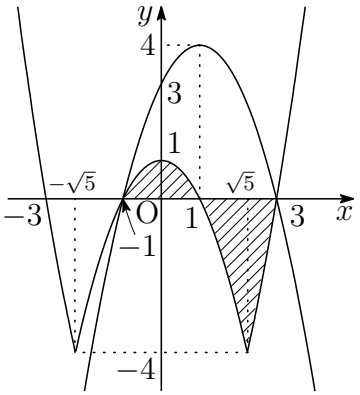
(1) n 回硬貨を投げたとき，最後にブロックの高さが m となる確率 p_m を求めよ．

(2) (1) で，最後にブロックの高さが m 以下となる確率 q_m を求めよ．

(3) ルール (**R**) の下で，n 回の硬貨投げを独立に2度行い，それぞれ最後のおブロックの高さを考える．2度のうち，高い方のブロックの高さが m である確率 r_m を求めよ，ただし，最後のブロックの高さが等しいときはその値を考えるものとする．

解答例

1 (1) $y(y-|x^2-5|+4) \leqq 0$ の表す領域は



(A) $|x| \leqq \sqrt{5}$ のとき，$y(y+x^2-1) \leqq 0$ より

$$\begin{cases} y \geqq 0 \\ y \leqq -x^2+1 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} y \leqq 0 \\ y \geqq -x^2+1 \end{cases}$$

(B) $|x| \geqq \sqrt{5}$ のとき，$y(y-x^2+9) \leqq 0$ より

$$\begin{cases} y \geqq 0 \\ y \leqq x^2-9 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} y \leqq 0 \\ y \geqq x^2-9 \end{cases}$$

(C) $y+x^2-2x-3 \leqq 0$ より　$y \leqq -(x+1)(x-3)$

領域 D は (A) かつ (C) および (B) かつ (C) を満たす領域で右の図の斜線部分で，境界線を含む.

(2) (1) の結果から，D の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{1}(-x^2+1)\,dx + \int_{1}^{\sqrt{5}}(x^2-1)\,dx + \int_{\sqrt{5}}^{3}(-x^2+9)\,dx \\ &= \frac{2^3}{6} + \left[\frac{x^3}{3}-x\right]_1^{\sqrt{5}} + \left[-\frac{x^3}{3}+9x\right]_{\sqrt{5}}^{3} \\ &= \mathbf{20-\frac{20}{3}\sqrt{5}} \end{aligned}$$

■

2 (1) 操作 (**P**) によって，半径 a の円は，半径 ra と $(1-r)a$ の 2 つの円に置き換わる．元の円の円周は $2\pi a$，置き換わった 2 つの円の円周の和は

$$2\pi ra + 2\pi(1-r)a = 2\pi a$$

したがって，操作 (**P**) による円周の長さの和は不変である．求める円の周の長さは最初の半径 1 の円周の長さに等しいから

$$2\pi\cdot 1 = \boldsymbol{2\pi}$$

(2) 操作 (**P**) によって，半径 a の円は，半径 ra と $(1-r)a$ の 2 つの円に置き換わる．元の円の面積は πa^2，置き換わった 2 つの円の円周の和は

$$\pi(ra)^2 + \pi(1-r)a^2 = 2\pi a^2\{r^2 + (1-r)^2\}$$

したがって，操作 (**P**) による円の面積の和は，元の面積の $r^2+(1-r)^2$ 倍である．よって，求める面積の面積の和は

$$\pi\cdot 1^2 \times \{r^2 + (1-r)^2\}^2 = \boldsymbol{\pi\{r^2 + (1-r^2)\}^2}$$

(3) 求める面積の和は，(2) と同様にして　$\boldsymbol{\pi\{r^2 + (1-r)^2\}^n}$ ■

3 $m = 10n + q$ とおくと $(q = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4,\ 5)$

$$\begin{aligned} 5m^4 &= 5(10n+q)^4 \\ &= 5(10000n^4 + 4000n^3q + 600n^2q^2 + 40nq^3 + q^4) \\ &= 100(500n^4 + 200n^3q + 30n^2q^2 + 2nq^3) + 5q^4 \\ &\equiv 5q^4 \pmod{100} \end{aligned}$$

したがって，法 100 について

$$5\cdot 0^4 \equiv 0, \quad 5\cdot(\pm 1)^4 \equiv 5, \quad 5\cdot(\pm 2)^4 \equiv 80,$$
$$5\cdot(\pm 3)^4 \equiv 5, \quad 5\cdot(\pm 4)^4 \equiv 80, \quad 5\cdot 5^4 \equiv 25$$

よって，求める数は　　**0, 5, 25, 80** ■

4 (1) $m=n$ のとき，n 回とも表であるから　　$\boldsymbol{p_n = p^n}$

$0 \leqq m \leqq n-1$ のとき，$n-m$ 回目に裏が出て，$n-m+1$ 回目から n 回目まで連続して m 回表が出るから

$$\boldsymbol{p_m = (1-p)p^m}$$

(2) $m=n$ のとき，高さは n 以下であるから　　$\boldsymbol{q_n = 1}$

$0 \leqq m \leqq n-1$ のとき，(1) の結果を利用して

$$q_m = \sum_{k=0}^{m} p_k = \sum_{k=0}^{m}(1-p)p^k = (1-p)\cdot\frac{1-p^{m+1}}{1-p} = \boldsymbol{1-p^{m+1}}$$

別解 高さが m より大きくなる (最後の $m+1$ 回が表) 確率は　p^{m+1}

求める確率はこの余事象の確率であるから，$0 \leqq m \leqq n-1$ のとき

$$q_m = 1-p^{m+1}$$

(3)　　1 度目が m，2 度目が m 以下となる事象を　A

1 度目が m 以下，2 度目が m となる事象を　B

とすると，$A \cap B$ は 1 度目も 2 度目も m である事象で，これらの確率は

$$P(A) = p_m q_m, \quad P(B) = q_m p_m, \quad P(A \cap B) = {p_m}^2$$

求める確率は

$$\begin{aligned} r_m = P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 2p_m q_m - {p_m}^2 = p_m(2q_m - p_m) \end{aligned}$$

(i) $m=n$ のとき

$$r_n = p_n(2q_n - p_n) = \boldsymbol{p^n(2-p^n)}$$

(ii) $0 \leqq m \leqq n-1$ のとき

$$\begin{aligned} r_m &= p_m(2q_m - p_m) \\ &= (1-p)p^m\{2(1-p^{m+1}) - (1-p)p^m\} \\ &= \boldsymbol{(1-p)p^m(2-p^m-p^{m+1})} \end{aligned}$$

■