

平成 18 年度 東京大学 2 次試験前期日程 (数学問題)100 分
 文科 (一類, 二類, 三類) 数 I・II・A・B

問題 1 2 3 4

1 四角形 ABCD が, 半径 $\frac{65}{8}$ の円に内接している. この四角形の周の長さが 44 で, 辺 BC と辺 CD の長さがいずれも 13 であるとき, 残りの 2 辺 AB と DA の長さを求めよ.

2 コンピュータの画面に, 記号○と×のいずれかを表示させる操作をくり返し行う. このとき, 各操作で, 直前の記号と同じ記号を続けて表示する確率は, それまでの操作に関係なく, p であるとする.

最初に, コンピュータの画面に記号×が表示された. 操作をくり返し行い, 記号×が最初のものも含めて 3 個出るよりも前に, 記号○が n 個出る確率を P_n とする. ただし, 記号○が n 個出た段階で操作は終了する.

(1) P_2 を p で表せ.

(2) P_3 を p で表せ.

(3) $n \geq 4$ のとき, P_n を p と n で表せ.

3 n を正の整数とする. 実数 x, y, z に対する方程式

$$x^n + y^n + z^n = xyz \quad \cdots \textcircled{1}$$

を考える.

(1) $n = 1$ のとき, ① を満たす正の整数の組 (x, y, z) で, $x \leq y \leq z$ となるものをすべて求めよ.

(2) $n = 3$ のとき, ① を満たす正の実数の組 (x, y, z) は存在しないことを示せ.

4 θ は, $0^\circ < \theta < 45^\circ$ の範囲の角度を表す定数とする. $-1 \leq x \leq 1$ の範囲で, 関数 $f(x) = |x + 1|^3 + |x - \cos 2\theta|^3 + |x - 1|^3$ が最小値をとるときの変数 x の値を, $\cos \theta$ で表せ.

解答例

1 $\triangle BCD$ に正弦定理を適用すると

$$\frac{13}{\sin \theta} = \frac{BD}{\sin(\pi - 2\theta)} = 2 \cdot \frac{65}{8}$$

$$\text{したがって } \sin \theta = \frac{4}{5}, \quad BD = \frac{65}{4} \sin 2\theta$$

$$\theta \text{ は鋭角であるから } \cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \frac{3}{5}$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{24}{25}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \left(\frac{3}{5}\right)^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = -\frac{7}{25}$$

$$\text{ゆえに } BD = \frac{65}{4} \cdot \frac{24}{25} = \frac{78}{5}$$

$x = AB$, $y = DA$ とおくと, 四角形 ABCD の周の長さが 44 であるから

$$x + y + 13 + 13 = 44 \quad \text{ゆえに} \quad x + y = 18$$

$\triangle ABD$ に余弦定理を適用すると $x^2 + y^2 - 2xy \cos 2\theta = BD^2$

$$x^2 + y^2 - 2xy \left(-\frac{7}{25}\right) = \left(\frac{78}{5}\right)^2$$

$$(x + y)^2 - \frac{36}{25}xy = \left(\frac{78}{5}\right)^2$$

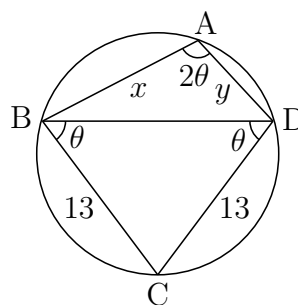
$x + y = 18$ を上式に代入すると

$$18^2 - \frac{36}{25}xy = \left(\frac{78}{5}\right)^2 \quad \text{ゆえに} \quad xy = 56$$

x, y を解とする 2 次方程式は

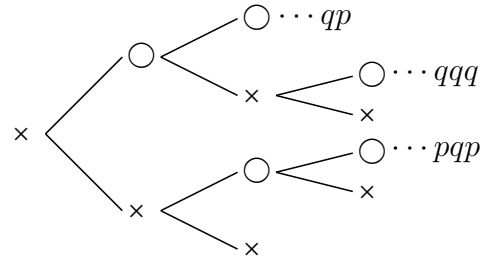
$$t^2 - 18t + 56 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (t - 4)(t - 14) = 0$$

これを解いて $t = 4, 14$ よって $(AB, DA) = (4, 14), (14, 4)$ ■

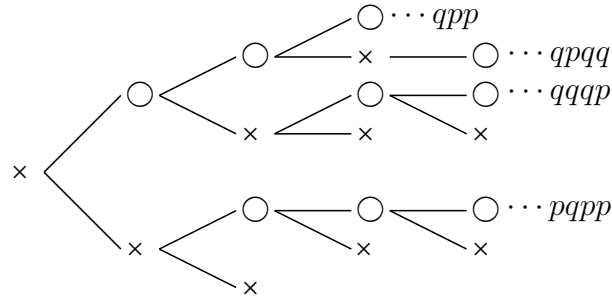


2 (1) $q = 1 - p$ とおくと、右の樹形図より

$$\begin{aligned}
 P_2 &= qp + qq q + pqp \\
 &= q(p + q^2 + p^2) \\
 &= (1 - p)\{p + (1 - p)^2 + p^2\} \\
 &= (1 - p)(2p^2 - p + 1)
 \end{aligned}$$

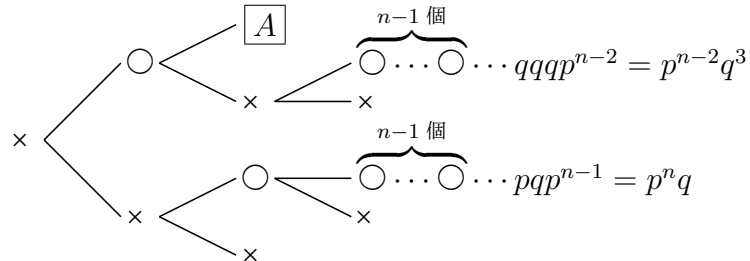


(2) (1) と同様に、○, ×の推移を樹形図に示すと次のようになる.



$$\begin{aligned}
 P_3 &= qpp + qpqq + qqqp + pqpp \\
 &= p^2q + pq^3 + pq^3 + p^3q = p^2q + 2pq^3 + p^3q \\
 &= pq(p + 2q^2 + p^2) \\
 &= p(1 - p)\{p + 2(1 - p)^2 + p^2\} \\
 &= p(1 - p)(3p^2 - 3p + 2)
 \end{aligned}$$

(3) (1),(2) と同様に、○, ×の推移を樹形図に示すと次のようになる.



A には、次の場合がある.

- (i) A に○が $n - 1$ 個連続して出る場合で、その確率は $q \times p^{n-1} = p^{n-1}q$
- (ii) A に $n - 1$ 個の○と 1 個の× (×は最初と最後以外の順番) が出る場合で、ひとまとめの $\boxed{\bigcirc \times \bigcirc}$ と $n - 3$ 個の○が並ぶ確率であるから

$$q \times {}_{n-2}C_1(pqq)p^{n-3} = (n - 2)p^{n-2}q^3$$

(i), (ii) および上の樹形図に示した結果から

$$\begin{aligned}
 P_n &= p^{n-1}q + (n-2)p^{n-2}q^3 + p^{n-2}q^3 + p^nq \\
 &= p^{n-1}q + (n-1)p^{n-2}q^3 + p^nq = p^{n-2}q\{p + (n-1)q^2 + p^2\} \\
 &= p^{n-2}(1-p)\{p + (n-1)(1-p)^2 + p^2\} \\
 &= p^{n-2}(1-p)\{np^2 + (3-2n)p + n-1\}
 \end{aligned}$$

別解 P_{n+1} は, (2) の樹形の先に○が続く確率 $P_n \times p$ および $\times \overbrace{\bigcirc \cdots \bigcirc}^{n \text{ 個}} \times \bigcirc$ である確率 $qp^{n-1}q^3 = p^{n-1}q^3$ の和であるから

$$P_{n+1} = pP_n + p^{n-1}q^3 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{P_{n+1}}{p^{n+1}} = \frac{P_n}{p^n} + \frac{q^3}{p^2}$$

数列 $\left\{\frac{P_n}{p^n}\right\}$ は公差 $\frac{q^3}{p^2}$ の等差数列で, $\frac{P_2}{p^2} = \frac{q(p+q^2+p^2)}{p^2}$ より

$$\frac{P_n}{p^n} = \frac{P_2}{p^2} + \frac{q^3(n-2)}{p^2} \quad \text{よって} \quad P_n = p^{n-2}q\{p + (n-1)q^2 + p^2\}$$

■

3 (1) $n=1$ より $x+y+z=xyz$

x, y, z は正であるから $\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = 1 \quad \cdots (*)$

$2 \leq x$ とすると, $x \leq y \leq z$ より

$$\frac{1}{xy} \leq \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{yz} \leq \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{zx} \leq \frac{1}{4} \quad \text{このとき} \quad \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \leq \frac{3}{4}$$

これは, (*) を満たさない. したがって, $x=1$ であるから

$$1+y+z=yz \quad \text{ゆえに} \quad (y-1)(z-1)=2$$

y, z は正の整数であるから, $y \leq z$ に注意して

$$y-1=1, \quad z-1=2 \quad \text{ゆえに} \quad y=2, \quad z=3$$

よって $(x, y, z) = (1, 2, 3)$

$$(2) \ n=3 \text{ のとき } x^3 + y^3 + z^3 = xyz$$

$$\text{これから } x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = -2xyz$$

$$\begin{aligned} (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) &= -2xyz \\ (x+y+z)\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\} &= -4xyz \end{aligned}$$

x, y, z が正の実数のとき, 上式の左辺は正で, 右辺は負であるから, これを満たす正の実数の組 (x, y, z) は存在しない.

別解 $0 < x \leq y \leq z$ より

$$x^3 + y^3 + z^3 = xyz \leq z^3 \quad \text{ゆえに} \quad x^3 + y^3 \leq 0$$

したがって, 上の第2式を満たす正の実数 x, y は存在しない. ■

4 $0^\circ < \theta < 45^\circ$ より, $c = \cos 2\theta$ とおくと $c > 0$

$f(x) = |x+1|^3 + |x-c|^3 + |x-1|^3 \ (-1 \leq x \leq 1)$ は

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^3 + |x-c|^3 + (1-x)^3 \\ &= 1+3x+3x^2+x^3 + |x-c|^3 + 1-3x+3x^2-x^3 \\ &= |x-c|^3 + 6x^2 + 2 \end{aligned}$$

$$(i) \ c \leq x \leq 1 \text{ のとき } f(x) = (x-c)^3 + 6x^2 + 2$$

このとき, $f(x)$ は単調増加

$$(ii) \ -1 \leq x \leq c \text{ のとき } f(x) = (c-x)^3 + 6x^2 + 2 \text{ より}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^3 + 3(c+2)x^2 - 3c^2x + c^3 + 2 \\ f'(x) &= -3x^2 + 6(c+2)x - 3c^2 \\ &= -3(x-c-2)^2 + 12(c+1) \end{aligned}$$

$$x \leq c \text{ に注意して, } f'(x) = 0 \text{ を解くと } x = c+2-2\sqrt{c+1}$$

$$\alpha = c+2-2\sqrt{c+1} \text{ とおくと}$$

$$\begin{aligned} c - \alpha &= 2\sqrt{c+1} - 2 = 2(\sqrt{c+1} - 1) > 0 \\ \alpha - (-1) &= c+3-2\sqrt{c+1} \\ &= \frac{(c+3)^2 - 4(c+1)}{c+3+2\sqrt{c+1}} = \frac{(c+1)^2 + 4}{c+3+2\sqrt{c+1}} > 0 \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに } -1 < \alpha < c$$

したがって、 $f(x)$ の増減表は

x	-1	$\cdots$	α	$\cdots$	c
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

よって、求める x の値は α であるから

$$\begin{aligned}
 \alpha &= c + 2 - 2\sqrt{c+1} \\
 &= \cos 2\theta + 2 - 2\sqrt{\cos 2\theta + 1} \\
 &= 2\cos^2 \theta + 1 - 2\sqrt{2\cos^2 \theta} \\
 &= 2\cos^2 \theta + 1 - 2\sqrt{2}\cos \theta
 \end{aligned}$$

■