

平成 17 年度 東京大学 2 次試験前期日程 (数学問題)100 分
 文科 (一類, 二類, 三類) 数 I・II・A・B

問題 1 2 3 4

- 1 $f(x)$ を $f(0) = 0$ をみたす 2 次関数とする. a, b を実数として, 関数 $g(x)$ を次で与える.

$$g(x) = \begin{cases} ax & (x \leq 0) \\ bx & (x > 0) \end{cases}$$

a, b をいろいろ変化させ

$$\int_{-1}^0 \{f'(x) - g'(x)\}^2 dx + \int_0^1 \{f'(x) - g'(x)\}^2 dx$$

が最小になるようにする. このとき,

$$g(-1) = f(-1), \quad g(1) = f(1)$$

であることを示せ.

- 2 3 以上 9999 以下の奇数 a で, $a^2 - a$ が 10000 で割り切れるものをすべて求めよ.

- 3 0 以上の実数 s, t が $s^2 + t^2 = 1$ をみたしながら動くとき, 方程式

$$x^4 - 2(s+t)x^2 + (s-t)^2 = 0$$

の解のとり値の範囲を求めよ.

4 N を 1 以上の整数とする. 数字 $1, 2, \dots, N$ が書かれたカードを 1 枚ずつ, 計 N 枚用意し, 甲, 乙のふたりが次の手順でゲームを行う.

- (i) 甲が 1 枚カードをひく. そのカードに書かれた数を a とする. ひいたカードはもとに戻す.
- (ii) 甲はもう 1 回カードをひくかどうかを選択する. ひいた場合は, そのカードに書かれた数を b とする. ひいたカードはもとに戻す. ひかなかった場合は, $b = 0$ とする. $a + b > N$ の場合は乙の勝ちとし, ゲームは終了する.
- (iii) $a + b \leq N$ の場合は, 乙が 1 枚カードをひく. そのカードに書かれた数を c とする. ひいたカードはもとに戻す. $a + b < c$ の場合は乙の勝ちとし, ゲームは終了する.
- (iv) $a + b \geq c$ の場合は, 乙はもう 1 回カードをひく. そのカードに書かれた数を d とする. $a + b < c + d \leq N$ の場合は乙の勝ちとし, それ以外の場合は甲の勝ちとする.

(ii) の段階で, 甲にとってどちらの選択が有利であるかを, a の値に応じて考える. 以下の問いに答えよ.

- (1) 甲が 2 回目にカードをひかないことにしたとき, 甲の勝つ確率を a を用いて表せ.
- (2) 甲が 2 回目にカードをひくことにしたとき, 甲の勝つ確率を a を用いて表せ.

ただし, 各カードがひかれる確率は等しいものとする.

解答例

$$\boxed{1} \quad g(x) = \begin{cases} ax & (x \leq 0) \\ bx & (x > 0) \end{cases} \quad \text{より}$$

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^0 \{f'(x) - g'(x)\}^2 dx + \int_0^1 \{f'(x) - g'(x)\}^2 dx \\ &= \int_{-1}^0 \{f'(x) - a\}^2 dx + \int_0^1 \{f'(x) - b\}^2 dx \\ &= a^2 - 2a \int_{-1}^0 f'(x) dx + b^2 - 2b \int_0^1 f'(x) dx + \int_{-1}^1 \{f'(x)\}^2 dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(0) = 0 \text{ より } \quad & \int_{-1}^0 f'(x) dx = f(0) - f(-1) = -f(-1) \\ & \int_0^1 f'(x) dx = f(1) - f(0) = f(1) \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= a^2 + 2af(-1) + b^2 - 2bf(1) + \int_{-1}^1 \{f'(x)\}^2 dx \\ &= \{a + f(-1)\}^2 + \{b - f(1)\}^2 \\ &\quad - \{f(-1)\}^2 - \{f(1)\}^2 + \int_{-1}^1 \{f'(x)\}^2 dx \end{aligned}$$

上式は $a + f(-1) = 0$, $b - f(1) = 0$ のとき最小となる.

また, $a = -g(-1)$, $b = g(1)$ であるから, このとき, 次式が成立する.

$$g(-1) = f(-1), \quad g(1) = f(1)$$

■

$\boxed{2} \quad a^2 - a = a(a-1)$ について, a が奇数であるから, $a-1$ は偶数. また, a と $a-1$ は互いに素であるから, $a^2 - a$ が $10000 = 2^4 \cdot 5^4$ で割り切れるとき

$$a = 5^4(2n+1) \quad (n = 0, 1, 2, \dots, 7)$$

とおける. このとき, $a-1 = 1250n + 624$ が $2^4 = 16$ で割り切れるから

$$1250n + 624 \equiv 0 \quad \text{すなわち} \quad 2n \equiv 0 \pmod{16}$$

これを満たす n は $n = 0$ よって $a = \mathbf{625}$

■

3 (*) $x^4 - 2(s+t)x^2 + (s-t)^2 = 0$ より

$$\begin{aligned} x^2 &= s+t \pm \sqrt{(s+t)^2 - (s-t)^2} \\ &= s+t \pm 2\sqrt{st} = (\sqrt{s} \pm \sqrt{t})^2 \end{aligned}$$

これを解いて $x = \pm\sqrt{s} \pm \sqrt{t}$ (複号任意)

したがって, 方程式(*)の最小の解と最大の解は, それぞれ

$$-(\sqrt{s} + \sqrt{t}), \quad \sqrt{s} + \sqrt{t}$$

ここで, シュワルツの不等式により

$$\begin{aligned} (1\sqrt{s} + 1\sqrt{t})^2 &\leq (1^2 + 1^2)\{(\sqrt{s})^2 + (\sqrt{t})^2\} \\ (1s + 1t)^2 &\leq (1^2 + 1^2)(s^2 + t^2) = 2 \end{aligned}$$

すなわち $(\sqrt{s} + \sqrt{t})^2 \leq 2(s+t), \quad (s+t)^2 \leq 2$

$s, t > 0$ より, 上の2式は, ともに $s = t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき, 等号が成立する.

したがって $(\sqrt{s} + \sqrt{t})^2 \leq 2\sqrt{2}$ ゆえに $\sqrt{s} + \sqrt{t} \leq \sqrt[4]{8}$

よって, 解のとり値の範囲は $-\sqrt[4]{8} \leq x \leq \sqrt[4]{8}$ ■

4 (1) 乙が勝つのは、次の A, B のどちらかが成立する場合である.

A. (iii) で $a < c$

B. (iii) で $c \leq a$, (iv) で $a < c + d \leq N$

A が成立するとき, $c = a + 1, a + 2, \dots, N$ となる $N - a$ 通りであるから, その確率は

$$\frac{N - a}{N}$$

B が成立するとき, $c = k$ ($k = 1, 2, \dots, a$) に対し, $a + 1 - k \leq d \leq N - k$ であるから (d は $N - a$ 通り), その確率は

$$\sum_{k=1}^a \frac{1}{N} \cdot \frac{N - a}{N} = \frac{a(N - a)}{N^2}$$

したがって, 乙が勝つ確率は $\frac{N - a}{N} + \frac{a(N - a)}{N^2} = 1 - \frac{a^2}{N^2}$

よって, 甲が勝つ確率は $\frac{a^2}{N^2}$

(2) 甲が2回目をひくとき, 甲が勝つには, $b = 1, 2, \dots, N - a$ であることが必要. このとき, (1) の結果から

$$\begin{aligned} \sum_{b=1}^{N-a} \frac{1}{N} \cdot \frac{(a+b)^2}{N^2} &= \sum_{k=a+1}^N \frac{k^3}{N^3} = \sum_{k=1}^N \frac{k^3}{N^3} - \sum_{k=1}^a \frac{k^3}{N^3} \\ &= \frac{1}{6N^3} \{N(N+1)(2N+1) - a(a+1)(2a+1)\} \end{aligned}$$

■