

平成 16 年度 東京大学 2 次試験前期日程 (数学問題)100 分
文科 (一類, 二類, 三類) 数 I・II・A・B

問題 1 2 3 4

- 1 xy 平面の放物線 $y = x^2$ 上の 3 点 P, Q, R が次の条件をみたしている.

$\triangle PQR$ は一辺の長さ a の正三角形であり, 点 P, Q を通る直線の傾きは $\sqrt{2}$ である.

このとき, a の値を求めよ.

- 2 a を正の実数とする. 次の 2 つの不等式を同時にみたす点 (x, y) 全体からなる領域を D とする.

$$y \geq x^2$$
$$y \leq -2x^2 + 3ax + 6a^2$$

領域 D における $x + y$ の最大値, 最小値を求めよ.

- 3 関数 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ を次で定める.

$$f(x) = x^3 - 3x$$
$$g(x) = \{f(x)\}^3 - 3f(x)$$
$$h(x) = \{g(x)\}^3 - 3g(x)$$

このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) a を実数とする. $f(x) = a$ をみたす実数 x の個数を求めよ.
- (2) $g(x) = 0$ をみたす実数 x の個数を求めよ.
- (3) $h(x) = 0$ をみたす実数 x の個数を求めよ.

- 4 片面を白色に、もう片面を黒色に塗った正方形の板が3枚ある．この3枚の板を机の上に横に並べ、次の操作を繰り返す行う．

さいころを振り、出た目が1, 2であれば左端の板を裏返し、3, 4であればまん中の板を裏返し、5, 6であれば右端の板を裏返す．

たとえば、最初、板の表の色の並び方が「白白白」であったとし、1回目の操作で出たさいころの目が1であれば、色の並び方は「黒白白」となる．さらに2回目の操作を行って出たさいころの目が5であれば、色の並び方は「黒白黒」となる．

- (1) 「白白白」から始めて、3回の操作の結果、色の並び方が「黒白白」となる確率を求めよ．
- (2) 「白白白」から始めて、 n 回の操作の結果、色の並び方が「黒白白」または「白黒白」または「白白黒」となる確率を p_n とする．
 p_{2k+1} (k は自然数) を求めよ．

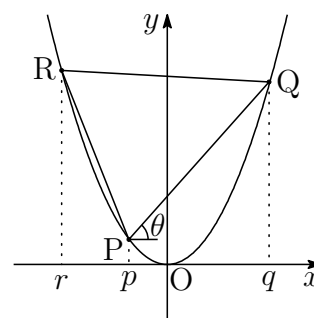
注意：さいころは1から6までの目が等確率で出るものとする．

解答例

- 1 放物線 $y = x^2$ 上の 3 点 P, Q, R の x 座標をそれぞれ p, q, r とする. 直線 PQ の偏角を θ とすると, 直線 PR, QR の偏角はそれぞれ $\theta + \frac{\pi}{3}, \theta - \frac{\pi}{3}$ であるから

$$\begin{aligned}\tan\left(\theta \pm \frac{\pi}{3}\right) &= \frac{\tan \theta \pm \tan \frac{\pi}{3}}{1 \mp \tan \theta \tan \frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{3}}{1 \mp \sqrt{2}\sqrt{3}} \\ &= \frac{(\sqrt{2} \pm \sqrt{3})(1 \pm \sqrt{6})}{(1 \mp \sqrt{6})(1 \pm \sqrt{6})} = \frac{-4\sqrt{2} \mp 3\sqrt{3}}{5}\end{aligned}$$

(複号同順)



したがって, 直線 PR, QR の傾きは, それぞれ

$$\begin{aligned}\frac{r^2 - p^2}{r - p} = r + p &= \frac{-4\sqrt{2} - 3\sqrt{3}}{5} \\ \frac{r^2 - q^2}{r - q} = r + q &= \frac{-4\sqrt{2} + 3\sqrt{3}}{5}\end{aligned}$$

上の第 2 式から第 1 式の辺々を引くと $q - p = \frac{6\sqrt{3}}{5}$

$\tan \theta = \sqrt{2}$ ($-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$) より, $\cos \theta > 0$ であるから

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{よって } PQ = \frac{q - p}{\cos \theta} = \frac{6\sqrt{3}}{5} \cdot \sqrt{3} = \frac{18}{5}$$

補足 直線 PQ の傾きから $p + q = \sqrt{2}$

これと上の結果を連立すると

$$p = \frac{5\sqrt{2} - 6\sqrt{3}}{10}, \quad q = \frac{5\sqrt{2} + 6\sqrt{3}}{10}, \quad r = -\frac{13}{10}\sqrt{2}$$

一般に, 放物線 $y = f(x)$ 上の 2 点 $A(\alpha, f(\alpha)), B(\beta, f(\beta))$ を結ぶ直線 AB の傾きは $f'\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$ に等しい.

本題においても, 3 直線 PQ, QR, RP の傾きから, $\triangle PQR$ の 3 辺の中点の x 座標を求めることで, 3 点 P, Q, R の x 座標が求まる. ■

- 2 $f(x) = x^2$, $g(x) = -2x^2 + 3ax + 6a^2$ とおく.
 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の共有点は

$$\begin{aligned} x^2 &= -2x^2 + 3ax + 6a^2 \\ 3(x+a)(x-2a) &= 0 \end{aligned}$$

したがって $(-a, a^2)$, $(2a, 4a^2)$

$f'(x) = 2x$, $g'(x) = -4x + 3a$ より

$$f'(-a) = -2a, \quad g'(2a) = -5a$$

$y = f(x)$ の接線の傾きが -1 になる点は

$$2x = -1 \quad \text{ゆえに} \quad \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

$y = g(x)$ の接線の傾きが -1 になる点は

$$-4x + 3a = -1 \quad \text{ゆえに} \quad \left(\frac{3a+1}{4}, \frac{57a^2-1}{8}\right)$$

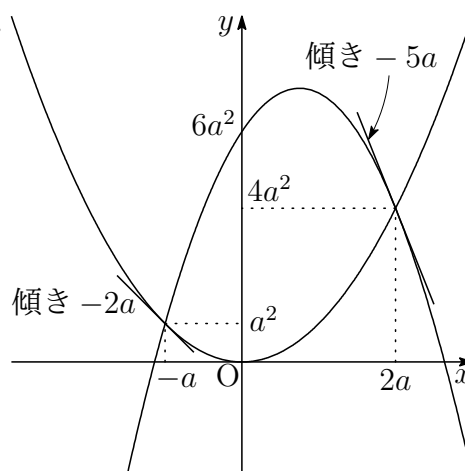
領域 D において, $x+y$ の最大値を M , 最小値を m とすると

$$M = \begin{cases} 2a + g(2a) & \left(0 < a \leq \frac{1}{5}\right) \\ \frac{3a+1}{4} + g\left(\frac{3a+1}{4}\right) & \left(\frac{1}{5} < a\right) \end{cases}$$

$$m = \begin{cases} -a + f(-a) & \left(0 < a \leq \frac{1}{2}\right) \\ -\frac{1}{2} + f\left(-\frac{1}{2}\right) & \left(\frac{1}{2} < a\right) \end{cases}$$

よって $M = \begin{cases} 2a + 4a^2 & \left(0 < a \leq \frac{1}{5}\right) \\ \frac{57a^2 + 6a + 1}{8} & \left(\frac{1}{5} < a\right) \end{cases}$

$$m = \begin{cases} -a + a^2 & \left(0 < a \leq \frac{1}{2}\right) \\ -\frac{1}{4} & \left(\frac{1}{2} < a\right) \end{cases}$$



3 (1) $f(x) = x^3 - 3x$ より

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

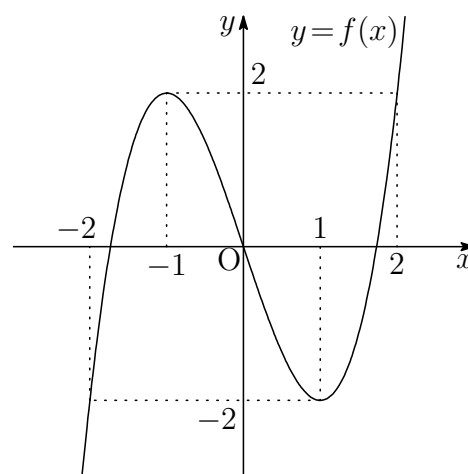
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

$f(x) = a$ をみたす実数 x の個数は

$|a| < 2$ のとき **3 個**

$|a| = 2$ のとき **2 個**

$|a| > 2$ のとき **1 個**



(2) まず, 2つの3次方程式

$$f(x) - \alpha = 0, \quad f(x) - \beta = 0 \quad (\alpha \neq \beta, |\alpha| < 2, |\beta| < 2)$$

が共通解 k をもつと仮定すると

$$f(k) - \alpha = 0, \quad f(k) - \beta = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \alpha = \beta$$

仮定に反するから, $f(x) - \alpha = 0$, $f(x) - \beta = 0$ は共通解をもたない.

$$x^3 - 3x = x(x^2 - 3) = x(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) \text{ より}$$

$$g(x) = f(x)\{f(x) + \sqrt{3}\}\{f(x) - \sqrt{3}\} = 0 \quad (*)$$

$f(x) = 0$, $f(x) + \sqrt{3} = 0$, $f(x) - \sqrt{3} = 0$ はそれぞれ異なる3つの実数解をもち, 共通解はもたないから, 方程式(*)は**9 個**の実数解をもつ.

(3) (2) と同様に

$$h(x) = g(x)\{g(x) + \sqrt{3}\}\{g(x) - \sqrt{3}\}$$

$|c| < 2$ に対し

$$g(x) - c = \{f(x) - d_1\}\{f(x) - d_2\}\{f(x) - d_3\} \\ (|d_1| < 2, |d_2| < 2, |d_3| < 2)$$

を満たす互いに異なる実数 d_1, d_2, d_3 が存在する.

さらに, $|d| < 2$ に対し

$$f(x) - d = (x - e_1)(x - e_2)(x - e_3) \\ (|e_1| < 2, |e_2| < 2, |e_3| < 2)$$

を満たす互いに異なる実数 e_1, e_2, e_3 が存在する.

よって, $h(x) = 0$ をみたす実数 x の個数は $3^3 = \mathbf{27}$



- 4 (1) サイコロを振り、出た目が、「1, 2」「3, 4」「5, 6」である確率をそれぞれ p, q, r とすると

$$p = q = r = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

求める確率は

$$p^3 + \frac{3!}{1!2!}pq^2 + \frac{3!}{1!2!}pr^2 = \frac{1}{27} + \frac{3}{27} + \frac{3}{27} = \frac{7}{27}$$

- (2) 色の並びが「黒黒黒」となるのは、奇数回目に限る. k を整数とし, $2k+1$ 回目に色の並びが「黒黒黒」となる確率を q_{2k+1} とする. $2k-1$ 回目に「黒黒黒」であるとき, $2k+1$ 回目で「黒黒黒」となる条件付き確率は

$$p^2 + q^2 + r^2 = \frac{1}{3}$$

$2k-1$ 回目で「黒白白」であるとき, $2k+1$ 回目で「黒黒黒」となる条件付き確率は

$$\frac{2!}{1!1!}qr = \frac{2}{9}$$

同様に $2k-1$ 回目で「白黒白」および「白白黒」であるときも, $2k+1$ 回目で「白白白」となる条件付き確率は, ともに $\frac{2}{9}$

したがって, 次の確率漸化式が成立する.

$$q_{2k+1} = \frac{1}{3}q_{2k-1} + \frac{2}{9}(1 - q_{2k-1}) \quad \text{ゆえに} \quad q_{2k+1} - \frac{1}{4} = \frac{1}{9}\left(q_{2k-1} - \frac{1}{4}\right)$$

$$q_1 = 0 \text{ であるから } q_{2k+1} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4 \cdot 9^k} \quad \text{ゆえに} \quad q_{2k+1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4 \cdot 9^k}$$

求める確率 p_{2k+1} は, この余事象の確率であるから

$$p_{2k+1} = 1 - q_{2k+1} = 1 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4 \cdot 9^k}\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4 \cdot 9^k}$$

■