平成 15 年度　東京大学 2 次試験前期日程 (数学問題)100 分
文科 (一類，二類，三類)　数 I・II・A・B

問題 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$

$\boxed{\mathbf{1}}$ $a,\ b,\ c$ を実数とし，$a \neq 0$ とする．

2 次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ が次の条件 (A)，(B) を満たすとする．

(A) $f(-1) = -1, \quad f(1) = 1, \quad f'(1) \leqq 6$

(B) $-1 \leqq x \leqq 1$ を満たすすべての x に対し，

$$f(x) \leqq 3x^2 - 1$$

このとき，積分 $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} (f'(x))^2\,dx$ の値のとりうる範囲を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ $a,\ b$ を実数とする．次の 4 つの不等式を同時に満たす点 $(x,\ y)$ 全体からなる領域を D とする．

$$x + 3y \geqq a$$
$$3x + y \geqq b$$
$$x \geqq 0$$
$$y \geqq 0$$

領域 D における $x + y$ の最小値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 2 次方程式 $x^2 - 4x + 1 = 0$ の 2 つの実数解のうち大きいものを α，小さいものを β とする．

$n = 1, 2, 3, \cdots$ に対し，

$$s_n = \alpha^n + \beta^n$$

とおく．

(1) $s_1,\ s_2,\ s_3$ を求めよ．また，$n \geqq 3$ に対し，s_n を s_{n-1} と s_{n-2} で表せ．

(2) s_n は正の整数であることを示し，s_{2003} の 1 の位の数を求めよ．

(3) α^{2003} 以下の最大の整数の 1 の位の数を求めよ．

$\boxed{4}$ さいころを振り，出た目の数で 17 を割った余りを X_1 とする．ただし，1 で割った余りは 0 である．

さらにさいころを振り，出た目の数で X_1 を割った余りを X_2 とする．以下同様にして，X_n が決まればさいころを振り，出た目の数で X_n を割った余りを X_{n+1} とする．

このようにして，X_n，$n = 1, 2, \cdots$ を定める．

(1) $X_3 = 0$ となる確率を求めよ．

(2) 各 n に対し，$X_n = 5$ となる確率を求めよ．

(3) 各 n に対し，$X_n = 1$ となる確率を求めよ．

注意：さいころは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする．

解答例

1 $f(x)=ax^2+bx+c$ が $f(-1)=-1$，$f(1)=1$ を満たすから

$$a-b+c=-1,\quad a+b+c=1 \quad \text{ゆえに} \quad b=1,\quad c=-a$$

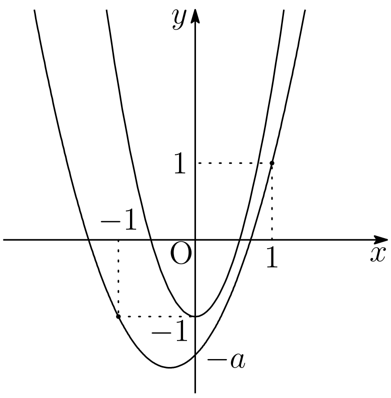
$f(x)=ax^2+x-a$ から　$f'(x)=2ax+1$

$f'(1)\leqq 6$ より　$2a+1\leqq 6$　これを解いて　$a\leqq\dfrac{5}{2}$

$f(x)=ax^2+x-a$ について，不等式

$$f(x)\leqq 3x^2-1 \quad (-1\leqq x\leqq 1) \qquad (*)$$

の等号が成立するのは，2つの2次関数 $y=f(x)$ および $y=3x^2-1$ のグラフから，$-1<x<1$ において，これらの放物線が接するときである．2式から y を消去すると



$$(a-3)x^2+x-a+1=0 \qquad (**)$$

$a\neq 3$，$D=1-4(a-3)(-a+1)=0$ より

$$4a^2-16a+13=0 \quad a\leqq\frac{5}{2}\text{に注意して} \quad a=\frac{4-\sqrt{3}}{2}$$

この a の値に対する $(**)$ の重解 $x=-\dfrac{1}{2(a-3)}$，すなわち，$x=2-\sqrt{3}$ は $-1<x<1$ を満たす．

2つのグラフから，$a=\dfrac{4-\sqrt{3}}{2}$ が $(*)$ を満たす a の最小値である．

したがって，a の取り得る値の範囲は　$\dfrac{4-\sqrt{3}}{2}\leqq a\leqq\dfrac{5}{2}$　$\cdots$①

$$\begin{aligned} I&=\int_{-1}^{1}(2ax+1)^2\,dx=\int_{-1}^{1}(4a^2x^2+4ax+1)\,dx \\ &=2\int_0^1(4a^2x^2+1)dx=2\left[\frac{4a^2}{3}x^3+x\right]_0^1=\frac{8}{3}a^2+2 \end{aligned}$$

① より，$\dfrac{19-8\sqrt{3}}{4}\leqq a^2\leqq\dfrac{25}{4}$ であるから　$\boldsymbol{\dfrac{44-16\sqrt{3}}{3}\leqq I\leqq\dfrac{56}{3}}$ ■

$\boxed{\mathbf{2}}$ 2 直線 $x+3y=a,\ 3x+y=b$ の交点を P とすると　$\mathrm{P}\left(\dfrac{3b-a}{8},\ \dfrac{3a-b}{8}\right)$

(i) $\dfrac{a}{3} \leqq b,\ \dfrac{b}{3} \leqq a$，すなわち，$a \leqq 3b,\ b \leqq 3a$ のとき

$$(x,\ y)=\left(\frac{3b-a}{8},\ \frac{3a-b}{8}\right) \text{ で　最小値 } \boldsymbol{\frac{a+b}{4}}$$

(ii) $a \geqq 0,\ b \leqq \dfrac{a}{3}$，すなわち，$a \geqq 0,\ 3b \leqq a,$ のとき

$$(x,\ y)=\left(0,\ \frac{a}{3}\right) \text{ で　最小値 } \boldsymbol{\frac{a}{3}}$$

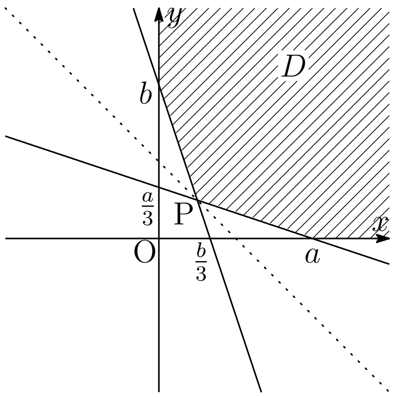
(iii) $a \leqq 0,\ b \leqq 0$ のとき

$$(x,\ y)=(0,\ 0) \text{ で　最小値 } \mathbf{0}$$

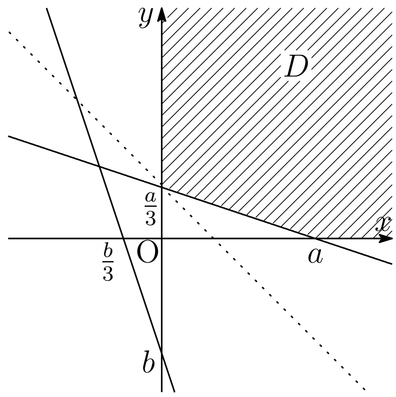
(iv) $b \geqq 0,\ a \leqq \dfrac{b}{3}$，すなわち，$b \geqq 0,\ 3a \leqq b$ のとき

$$(x,\ y)=\left(\frac{b}{3},\ 0\right) \text{ で　最小値 } \boldsymbol{\frac{b}{3}}$$

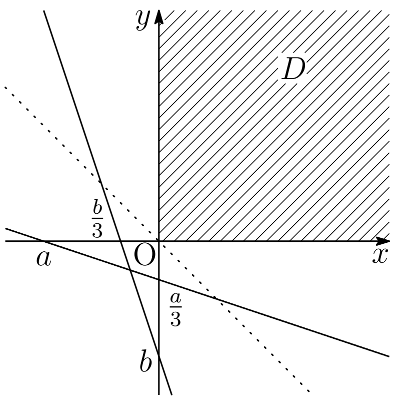
(i) $\frac{a}{3} \leqq b,\ \frac{b}{3} \leqq a$



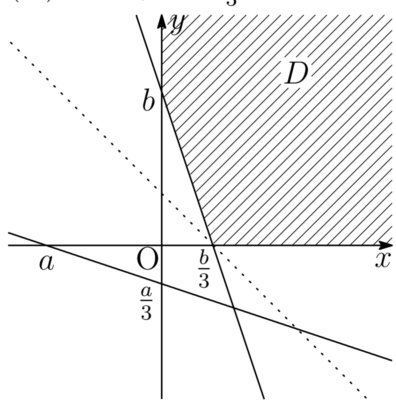
(ii) $a \geqq 0,\ b \leqq \frac{a}{3}$



(iii) $a \leqq 0,\ b \leqq 0$



(iv) $b \geqq 0,\ a \leqq \frac{b}{3}$



別解 $(x,\ y) \in D$ について，$x+y$ の取り得る値を k とすると

$$x+y=k, \quad x+3y \geqq a, \quad 3x+y \geqq b, \quad x \geqq 0, \quad y \geqq 0$$

を満たす点 $(x,\ y)$ が存在する．このとき，y を消去して得られる 4 つの不等式

$$x+3(k-x) \geqq a, \quad 3x+(k-x) \geqq b, \quad x \geqq 0, \quad k-x \geqq 0$$

すなわち $$\frac{b-k}{2} \leqq x \leqq \frac{3k-a}{2}, \quad 0 \leqq x \leqq k \quad \cdots (*)$$

2 つの不等式 $(*)$ を同時に満たす x が存在するための条件は

$$\frac{b-k}{2} \leqq \frac{3k-a}{2}, \quad 0 \leqq k, \quad \frac{b-k}{2} \leqq k, \quad 0 \leqq \frac{3k-a}{2}$$

これらをそれぞれ k について解くと

$$k \geqq \frac{a+b}{4}, \quad k \geqq 0, \quad k \geqq \frac{b}{3}, \quad k \geqq \frac{a}{3} \qquad (**)$$

k はこれら 4 つの不等式 $(**)$ を同時に満たすから，k の最小値は

$$\frac{a+b}{4}, \quad 0, \quad \frac{b}{3}, \quad \frac{a}{3}$$

の最大値である．

(i) $\dfrac{a+b}{4} \geqq 0,\ \dfrac{a+b}{4} \geqq \dfrac{b}{3},\ \dfrac{a+b}{4} \geqq \dfrac{a}{3}$
すなわち　$a \leqq 3b,\ b \leqq 3a$ のとき　$\dfrac{a+b}{4}$

(ii) $0 \geqq \dfrac{a+b}{4},\ 0 \geqq \dfrac{b}{3},\ 0 \geqq \dfrac{a}{3}$　すなわち　$a \leqq 0,\ b \leqq 0$ のとき　0

(iii) $\dfrac{b}{3} \geqq \dfrac{a+b}{4},\ \dfrac{b}{3} \geqq 0,\ \dfrac{b}{3} \geqq \dfrac{a}{3}$　すなわち　$b \geqq 0,\ 3a \leqq b$ のとき　$\dfrac{b}{3}$

(iv) $\dfrac{a}{3} \geqq \dfrac{a+b}{4},\ \dfrac{a}{3} \geqq 0,\ \dfrac{a}{3} \geqq \dfrac{b}{3}$　すなわち　$a \geqq 0,\ 3b \leqq a$ のとき　$\dfrac{a}{3}$

補足 $A \leqq x \leqq B,\ C \leqq x \leqq D$ を同時に満たす x が存在するための条件は

$$A \leqq B, \quad C \leqq D, \quad A \leqq D, \quad C \leqq B$$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 2次方程式 $x^2-4x+1=0$ の解と係数の関係により $\alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=1$

$$\begin{aligned}
s_1 &= \alpha+\beta = \mathbf{4}\\
s_2 &= \alpha^2+\beta^2 = (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta = 4^2-2{\cdot}1 = \mathbf{14}\\
s_3 &= \alpha^3+\beta^3 = (\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)-\alpha\beta(\alpha+\beta) = 4{\cdot}14-1{\cdot}4 = \mathbf{52}
\end{aligned}$$

$\alpha^n+\beta^n=(\alpha+\beta)(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})-\alpha\beta(\alpha^{n-2}+\beta^{n-2})$ より

$$\boldsymbol{s_n = 4s_{n-1}-s_{n-2}}$$

別解 $\alpha^2=4\alpha-1$，$\beta^2=4\beta-1$ より

$$\alpha^n=4\alpha^{n-1}-\alpha^{n-2},\ \beta^n=4\beta^{n-1}-\beta^{n-2}$$

したがって　$\alpha^n+\beta^n=4(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})-(\alpha^{n-2}+\beta^{n-2})$

よって　　$s_n=4s_{n-1}-s_{n-2}$

(2) (1) の結果の漸化式および s_1，s_2 が整数であるから，数学的帰納法により，すべての自然数 n について，s_n は整数である．

$s_1\equiv 4,\ s_2\equiv 4,\ s_3\equiv 2 \pmod{10}$

これを $s_n\equiv 4s_{n-1}-s_{n-2}$ に $n=4,5,6,\cdots$ と順次代入すると

$$s_4\equiv 4{\cdot}2-4\equiv 4,\quad s_5\equiv 4{\cdot}4-2\equiv 4,\quad s_6\equiv 4{\cdot}4-4\equiv 2 \pmod{10}$$

s_n を 10 で割った余りが，4, 4, 2 の周期 3 の循環であるから

$$s_{2003}=s_{3\cdot 667+2}\equiv s_2\equiv 4 \pmod{10}$$

よって，s_{2003} の 1 の位は　**4**

(3) 方程式の解は $(\alpha>\beta)$　$\alpha=2+\sqrt{3},\ \beta=2-\sqrt{3}$

$0<\beta<1$ であるから　$0<\beta^{2003}<1$

これに $\beta^{2003}=s_{2003}-\alpha^{2003}$ を代入すると

$$0<s_{2003}-\alpha^{2003}<1 \quad \text{ゆえに} \quad s_{2003}-1<\alpha^{2003}<s_{2003}$$

s_{2003} の 1 の位が 4 であるから，α^{2003} の 1 の位は　**3**　■

$\boxed{4}$ (1) a を出た目の数で割って余りが b になる確率を (a,b) と表記することにする．
17 を出た目の数で割った余りは，$X_1=\{0,\ 1,\ 2,\ 5\}$ であり

$$(17,0)=\frac{1}{6},\quad (17,1)=\frac{2}{6},\quad (17,2)=\frac{2}{6},\quad (17,5)=\frac{1}{6}$$

2 回目の試行においても，その余りは $X_2=\{0,\ 1,\ 2,\ 5\}$ であり

$$(0,0)=1,\quad (1,0)=\frac{1}{6},\quad (1,1)=\frac{5}{6},\quad (2,0)=\frac{2}{6},\quad (2,2)=\frac{4}{6},$$
$$(5,0)=\frac{2}{6},\quad (5,1)=\frac{2}{6},\quad (5,2)=\frac{1}{6},\quad (5,5)=\frac{1}{6}$$

3 回目の試行も 2 回目と同様であるから，$X_3=0$ となる確率は

$$\begin{aligned}P(X_3=0)&=(17,0)(0,0)(0,0)+(17,1)\{(1,0)(0,0)+(1,1)(1,0)\}\\&\quad+(17,2)\{(2,0)(0,0)+(2,2)(2,0)\}\\&\quad\quad+(17,5)\{(5,0)(0,0)+(5,1)(1,0)+(5,2)(2,0)+(5,5)(5,0)\}\\&=\frac{1}{6}\cdot1\cdot1+\frac{2}{6}\left(\frac{1}{6}\cdot1+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\right)+\frac{2}{6}\left(\frac{2}{6}\cdot1+\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{6}\right)\\&\quad+\frac{1}{6}\left(\frac{2}{6}\cdot1+\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}\right)=\frac{116}{216}=\boldsymbol{\frac{29}{54}}\end{aligned}$$

(2) $X_n=\{0,\ 1,\ 2,\ 5\}$ であるから $(n=1,2,\ldots)$

$$a_n=P(X_n{=}0),\quad b_n=P(X_n{=}1),\quad c_n=P(X_n{=}2),\quad d_n=P(X_n{=}5)$$

とおくと，次の確率漸化式が成立する．

$$\begin{aligned}&a_1=\frac{1}{6},\quad b_1=\frac{2}{6},\quad c_1=\frac{2}{6},\quad d_1=\frac{1}{6}\\&a_{n+1}=a_n+\frac{1}{6}b_n+\frac{2}{6}c_n+\frac{2}{6}d_n,\\&b_{n+1}=\frac{5}{6}b_n+\frac{2}{6}d_n,\\&c_{n+1}=\frac{4}{6}c_n+\frac{1}{6}d_n,\\&d_{n+1}=\frac{1}{6}d_n\end{aligned}$$

よって　　$d_n=d_1\cdot\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}=\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{6^{n-1}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{6^n}}$

補足 (1) はこの漸化式を用いて，$P(X_3=0)=a_3$ を求めてもよい．

(3) $b_n=P(X_n=1)$ を求めればよいから，(2) の結果より

$$b_{n+1}=\frac{5}{6}b_n+\frac{2}{6}d_n,\quad d_n=\frac{1}{6^n}\quad \text{ゆえに}\quad b_{n+1}=\frac{5}{6}b_n+\frac{2}{6^{n+1}}$$

$b_n=\dfrac{q_n}{6^n}$ とおくと　$q_{n+1}=5q_n+2,\quad q_1=6b_1=2$

$$q_{n+1}+\frac{1}{2}=5\left(q_n+\frac{1}{2}\right)\quad \text{ゆえに}\quad q_n+\frac{1}{2}=\left(q_1+\frac{1}{2}\right)\cdot 5^{n-1}=\frac{5^n}{2}$$

したがって　$q_n=\dfrac{5^n-1}{2}$　よって　$b_n=\dfrac{q_n}{6^n}=\boldsymbol{\dfrac{5^n-1}{2\cdot 6^n}}$ ■