

平成14年度 東京大学2次試験前期日程(数学問題)100分
文科(一類, 二類, 三類) 数I・II・A・B

問題 1 2 3 4

1 2つの放物線

$$y = 2\sqrt{3}(x - \cos \theta)^2 + \sin \theta$$

$$y = -2\sqrt{3}(x + \cos \theta)^2 - \sin \theta$$

が相異なる2点で交わるような θ の範囲を求めよ.

ただし, $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ とする.

2 n は正の整数とする. x^{n+1} を $x^2 - x - 1$ で割った余りを

$$a_n x + b_n$$

とおく.

(1) 数列 $a_n, b_n, n = 1, 2, 3, \dots$, は

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n \\ b_{n+1} = a_n \end{cases}$$

を満たすことを示せ.

(2) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して, a_n, b_n は共に正の整数で, 互いに素であることを証明せよ.

3 2つの関数

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$$

$$g(x) = px^3 + qx^2 + rx$$

が次の5つの条件を満たしているとする.

$$f'(0) = g'(0), \quad f(-1) = -1, \quad f'(-1) = 0,$$

$$g(1) = 3, \quad g'(1) = 0$$

ここで, $f(x), g(x)$ の導関数をそれぞれ $f'(x), g'(x)$ で表している.

このような関数のうちで, 定積分

$$\int_{-1}^0 \{f''(x)\}^2 dx + \int_0^1 \{g''(x)\}^2 dx$$

の値を最小にするような $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ.

ただし, $f''(x), g''(x)$ はそれぞれ $f'(x), g'(x)$ の導関数を表す.

- 4 円周上に m 個の赤い点と n 個の青い点を任意の順序に並べる．これらの点により，円周は $m+n$ 個の弧に分けられる．このとき，これらの弧のうち両端の点の色が異なるものの数は偶数であることを証明せよ．ただし， $m \geq 1$ ， $n \geq 1$ であるとする．

解答例

- 1 与えられた2つの放物線の方程式をそれぞれ展開すると

$$\begin{aligned} y &= 2\sqrt{3}x^2 - 4\sqrt{3}x \cos \theta + 2\sqrt{3} \cos^2 \theta + \sin \theta, \\ y &= -2\sqrt{3}x^2 - 4\sqrt{3}x \cos \theta - 2\sqrt{3} \cos^2 \theta - \sin \theta \end{aligned}$$

上の2式から y を消去して整理すると $2\sqrt{3}x^2 = -2\sqrt{3} \cos^2 \theta - 2 \sin \theta$

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= -2\sqrt{3}(1 - \sin^2 \theta) - 2 \sin \theta \\ &= 2\sqrt{3} \sin^2 \theta - 2 \sin \theta - 2\sqrt{3} \\ &= (\sqrt{3} \sin \theta - 2)(2 \sin \theta + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

したがって $2\sqrt{3}x^2 = (\sqrt{3} \sin \theta - 2)(2 \sin \theta + \sqrt{3})$

この2次方程式が異なる2つの実数解をもつ条件は

$$(\sqrt{3} \sin \theta - 2)(2 \sin \theta + \sqrt{3}) > 0$$

$\sqrt{3} \sin \theta - 2 < 0$ に注意して $2 \sin \theta + \sqrt{3} < 0$

よって、求める角 θ の範囲は、 $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ に注意して

$$240^\circ < \theta < 300^\circ$$

■

- 2 (1) x^{n+1} を $x^2 - x - 1$ で割った商を $Q_n(x)$ とすると

$$x^{n+1} = (x^2 - x - 1)Q_n(x) + a_n x + b$$

$$\begin{aligned} \text{したがって } x^{n+2} &= (x^2 - x - 1)xQ_n(x) + a_n x^2 + b_n x \\ &= (x^2 - x - 1)\{xQ_n(x) + a_n\} + (a_n + b_n)x + a_n \end{aligned}$$

$$\text{よって } (*) \begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n \\ b_{n+1} = a_n \end{cases}$$

- (2) $x^2 = (x^2 - x - 1) \cdot 1 + x + 1$ より $a_1 = 1, b_1 = 1$

これと (*) により、 $n = 1, 2, \dots$ に対して、 a_n, b_n は共に正の整数である。

また、 $a_n = b_{n+1}, b_n = a_{n+1} - b_{n+1}$ より、 a_{n+1} と b_{n+1} が素数 p を共通因数にもつとき、 a_n, b_n も p を因数にもつ。順次これを繰り返すと、 a_1, b_1 も p を因数にもつことになり、 $a_1 = b_1 = 1$ に反する。

よって、 $n = 1, 2, \dots$ に対して、 a_n, b_n は互いに素である。

■

3 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, $f(-1) = -1$, $f'(-1) = 0$ より

$$\begin{cases} -a + b - c = -1 \\ 3a - 2b + c = 0 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad (*) \begin{cases} a = c - 2 \\ b = 2c - 3 \end{cases}$$

$g(x) = px^3 + qx^2 + rx$, $g'(x) = 3px^2 + 2qx + r$, $g(1) = 3$, $g'(1) = 0$ より

$$\begin{cases} p + q + r = 3 \\ 3p + 2q + r = 0 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad (**) \begin{cases} p = r - 6 \\ q = -2r + 9 \end{cases}$$

$f''(x) = 6ax + 2b$, $g''(x) = 6px + 2q$ であるから、問題の積分値を I とすると

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^0 \{f''(x)\}^2 dx + \int_0^1 \{g''(x)\}^2 dx \\ &= \int_{-1}^0 (6ax + 2b)^2 dx + \int_0^1 (6px + 2q)^2 dx \\ &= \int_{-1}^0 (36a^2x^2 + 24abx + 4b^2) dx + \int_0^1 (36p^2x^2 + 24pqx + 4q^2) dx \\ &= \left[12a^2x^3 + 12abx^2 + 4b^2x \right]_{-1}^0 + \left[12p^2x^3 + 12pqx^2 + 4q^2x \right]_0^1 \\ &= 12a^2 - 12ab + 4b^2 + 12p^2 + 12pq + 4q^2 \\ &= 3(2a - b)^2 + b^2 + 3(2p + q)^2 + q^2 \end{aligned}$$

(*), (**) より, $2a - b = -1$, $2p + q = -3$ であるから

$$I = b^2 + q^2 + 30$$

$f'(0) = g'(0)$ より, $c = r \cdots \textcircled{1}$ であるから, (*) の第2式と (**) の第2式から

$$\begin{cases} b = 2c - 3 \\ q = -2c + 9 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad q = -b + 6$$

$$I = b^2 + (-b + 6)^2 + 30 = 2(b - 3)^2 + 48$$

したがって, $b = 3$ のとき, I は最小値 48 をとる.

このとき, (*) の第2式および $\textcircled{1}$ から $c = r = 3$

これらを (*), (**) に代入して $a = 1$, $b = 3$, $p = -3$, $q = 3$

よって $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$, $g(x) = -3x^3 + 3x^2 + 3x$ ■

- 4 両端の色が等しい弧は，その弧の部分を退化させ，同じ色の点を1つの点として同化する操作を行う．この操作を繰り返して完成するものは，両端の色が異なる，すなわち，赤い点と青い点が交互に並ぶ円弧である．このとき赤い点と青い点の個数は等しく，それらの点の総数は偶数個であるから，両端の点の色が異なる弧の個数は偶数個である. ■