令和７年度　筑波大学　２次試験前期日程 (数学問題)120 分

- 総合選抜文系は $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ から 2 題選択 (数 II・B・C)，及び他教科との選択
- 総合選抜理系 I，理系 II，理系 III は $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ から 2 題選択，$\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ から 2 題選択
- 社会学類は $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ から 2 題選択 (数 II・B・C)，及び他教科との選択
- 国際総合・障害科学類は，数 II・B 選択の場合は $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ から 2 題選択，数 III 選択の場合は $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ から 2 題選択，及び他教科との選択
- 教育・心理学類・生物資源・生物・地球・数学・物理・化学・応用理工・工学システム・情報科学・情報メディア創生学類・知識情報・図書館学類・社会工学類・医学・医療学類は $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ から 2 題選択，$\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ から 2 題選択

$\boxed{\mathbf{1}}$ 実数の組 $(a,\ r)$ に関する以下の条件 (A) を考える．

(A) 初項 a，公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ は，すべての正の整数 n について $\tan a_{n+1} = \tan 3a_n$ を満たす．ただし，いずれの正の整数 n に対しても，a_n および $3a_n$ は $\dfrac{1}{2}\pi + k\pi$ (k は整数) の形でない．

(1) 組 $(a,\ r)$ が条件 (A) を満たすとき，$\tan ar = \tan 3a$ および $\tan ar^2 = \tan 3ar$ が成り立つことを示せ．

(2) 組 $(a,\ r)$ が条件 (A) を満たし，かつ $\dfrac{a}{\pi}$ が無理数であるとき，$r = 3$ であることを示せ．

(3) 組 $\left(\dfrac{2}{5}\pi,\ r\right)$ が条件 (A) を満たすとき，r は整数であることを示せ．

(4) $1 \leqq r \leqq 10$ を満たす r で，組 $\left(\dfrac{2}{5}\pi,\ r\right)$ が条件 (A) を満たすものをすべて求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 正の実数 p に対して，$f(x) = x^3 - x + p$ とする．

(1) x についての方程式 $f(x) = 0$ がただ 1 つの実数解をもつとき，p のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) $a,\ b,\ c$ は実数で，$c > 0$ とする．また，i を虚数単位とする．$a,\ b+ci,\ b-ci$ が方程式 $f(x) = 0$ の解であるとき，$a,\ c,\ p$ をそれぞれ b を用いて表し，b のとりうる値の範囲を求めよ．

(3) (2) の $b,\ c$ について，少なくともどちらか一方は整数でないことを示せ．

$\boxed{3}$ 座標平面において円 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ を C とする．a を 1 より大きい実数とし，2 点 $\mathrm{A}(2a,\ 0)$，$\mathrm{B}(-a,\ 0)$ をとる．点 A を通る円 C の 2 本の接線のうち傾きが小さい方を l_1 とし，点 B を通る円 C の 2 本の接線のうち傾きが大きい方を l_2 とする．l_1 と l_2 の交点を D とする．

(1) 直線 l_1 の方程式を a を用いて表せ．

(2) 点 D から x 軸へ下ろした垂線と x 軸の交点を H とする．$\triangle$BDH と $\triangle$ADH の面積の比が $5:4$ であるとき，a の値を求めよ．

(3) a が (2) で求めた値であるとき，$\angle\mathrm{ADB}=\dfrac{\pi}{2}$ であることを示せ．また，$\triangle$ABD の外接円の中心と半径を求めよ．

$\boxed{4}$ i を虚数単位とする．a は 1 でない正の実数の定数とする．複素数平面において，方程式 $|z-a^2i|=a|z-i|$ を満たす点 z が表す図形を C とする．

(1) 図形 C は原点 O を中心とする円であることを示し，その半径を求めよ．

以下の問いでは点 z は円 C 上を動くとし，z の偏角を θ とする．ただし $0\leqq\theta<2\pi$ とする．また，$w=z-\dfrac{1}{z}$ とおく．

(2) $|w-2i|^2$ を a と $\sin\theta$ を用いて表せ．

(3) $|w-2i|+|w+2i|$ は点 z の位置によらない定数であることを示せ．

$\boxed{5}$ $f(x) = \dfrac{\sin(\log x)}{x}$ $(x > 1)$ について以下の問いに答えよ．

(1) $f'(x)$，$f''(x)$ を求めよ．

(2) n を正の整数とする．関数 $f(x)$ が極大値をとる x で，$e^{2(n-1)\pi} < x < e^{2n\pi}$ となるものがただ 1 つ存在することを示せ．また，関数 $f(x)$ が極小値をとる x で，$e^{2(n-1)\pi} < x < e^{2n\pi}$ となるものがただ 1 つ存在することを示せ．

(3) 正の整数 n に対して，(2) の極大値をとる x を α_n，極小値をとる x を β_n とする．このとき，

$$\frac{1}{\pi}\left\{\log\left|\sum_{n=1}^{\infty} f''(\alpha_n)\right| - \log\left|\sum_{n=1}^{\infty} f''(\beta_n)\right|\right\}$$

は整数となる．その値を求めよ．

$\boxed{6}$ $f(x) = \sqrt{x}e^{-\frac{x^2}{4}}$ $(x \geqq 0)$ とし，$\alpha = \displaystyle\int_0^5 f(x)\,dx$ とする．

(1) $f(x)$ $(x \geqq 0)$ が最大値をとることを示し，その値 M を求めよ．

(2) $0 \leqq x \leqq 5$ において $e^{-\frac{25}{4}}\sqrt{x} \leqq f(x)$ を示せ．また，$\dfrac{10}{3}f(5) \leqq \alpha$ を示せ．

(3) M は (1) で求めたものとし，実数 t は $\dfrac{2}{3}f(5) \leqq t \leqq M$ の範囲を動くとする．曲線 $y = f(x) - t$ $(x \geqq 0)$，2 直線 $x = 0$，$x = 5$，および x 軸で囲まれた図形を，x 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積を $V(t)$ とする．$V(t)$ の最小値を α を用いて表せ．

解答例

$\boxed{1}$ 初項 a，公比 r の組 $(a,\ r)$ の等比数列 $\{a_n\}$ が，すべての正の整数 n について

$$\tan a_{n+1} = \tan 3a_n$$

を満たすから，上式に $a_{n+1} = ar^n$, $a_n = ar^{n-1}$ を代入すると

$$\tan ar^n = \tan 3ar^{n-1} \qquad (*)$$

(1) $(*)$ に $n = 1,\ 2$ をそれぞれ代入すると

$$\tan ar = \tan 3a, \quad \tan ar^2 = \tan 3ar$$

(2) $(*)$ から，整数 I_n を用いて　$ar^n - 3ar^{n-1} = I_n\pi$

$$\frac{a}{\pi}r^{n-1}(r-3) = I_n$$

上式に $n = 1,\ 2$ をそれぞれ代入すると

$$\frac{a}{\pi}(r-3) = I_1, \quad \frac{a}{\pi}r(r-3) = I_2 \qquad \text{(P)}$$

$r - 3 \neq 0$ とすると，(P) の第 1 式において $\dfrac{a}{\pi}$ が無理数であるから，$a \neq 0$ より，$I_1 \neq 0$ である．(P) の第 2 式を第 1 式の辺々で割ると　$r = \dfrac{I_2}{I_1}$

これから，r は有理数である．(P) の第 1 式から

$$\frac{a}{\pi} = \frac{I_1}{r-3}$$

上式の左辺は無理数，右辺は有理数となり矛盾．したがって

$$r - 3 = 0 \quad \text{すなわち} \quad r = 3$$

(3) $(*)$ に $a=\dfrac{2}{5}\pi$ を代入すると　$\tan\dfrac{2}{5}\pi r^n=\tan\dfrac{6}{5}\pi r^{n-1}$

整数 J_n を用いて　$\dfrac{2}{5}\pi r^n-\dfrac{6}{5}\pi r^{n-1}=J_n\pi$

$$\frac{2}{5}r^{n-1}(r-3)=J_n$$

上式に $n=1,\ 2$ をそれぞれ代入すると

$$\frac{2}{5}(r-3)=J_1,\quad \frac{2}{5}r(r-3)=J_2 \qquad \text{(Q)}$$

(Q) の第 1 式から　$r=\dfrac{5}{2}J_1+3$

r が整数でないと仮定すると，J_1 は奇数である．(Q) の 2 式から

$$J_1\left(\frac{5}{2}J_1+3\right)=J_2 \quad \text{ゆえに} \quad J_1(5J_1+6)=2J_2$$

上の第 2 式において，左辺は奇数，右辺は偶数となり矛盾．
r は整数となるから，(Q) の第 1 式より

$$\frac{2}{5}(r-3)=J_1 \quad \text{ゆえに} \quad r-3\equiv 0 \pmod 5$$

よって，r は，$r\equiv 3 \pmod 5$ を満たす整数である．

(4) (3) の結論から，$1\leqq r\leqq 10$ を満たす r で組 $\left(\dfrac{2}{5}\pi,\ r\right)$ を満たすものは

$$\boldsymbol{r=3,\ 8}$$

■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $f(x) = x^3 - x + p$ より　$f'(x) = 3x^2 - 1$

$f'(x) = 0$ とすると　$x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

$p > 0$ より　極大値 $f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = p + \dfrac{2\sqrt{3}}{9} > 0$,

極小値 $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = p - \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$

$f(x) = 0$ がただ 1 つの実数解をもつから，極小値について

$$p - \frac{2\sqrt{3}}{9} > 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{p > \frac{2\sqrt{3}}{9}}$$

(2) 解と係数の関係により

$$\begin{aligned} a + (b+ci) + (b-ci) &= 0 \\ a(b+ci) + (b+ci)(b-ci) + (b-ci)a &= -1 \\ a(b+ci)(b-ci) &= -p \end{aligned}$$

ゆえに　$a + 2b = 0,\ 2ab + b^2 + c^2 = -1,\ a(b^2 + c^2) = -p$　$(*)$

$(*)$ の第 1 式から　$\boldsymbol{a = -2b}$　これを $(*)$ の第 3 式に代入すると

$$-2b(b^2 + c^2) = -p \quad \text{ゆえに} \quad p = 2b(b^2 + c^2) \quad \cdots ①$$

$p > 0$ であるから　$b > 0$

$a = -2b$ を $(*)$ の第 2 式に代入すると

$$2(-2b)b + b^2 + c^2 = -1 \quad \text{ゆえに} \quad c^2 = 3b^2 - 1 \quad \cdots ②$$

$b,\ c > 0$ であるから　$\boldsymbol{c = \sqrt{3b^2 - 1},\ b > \dfrac{1}{\sqrt{3}}}$

② を ① に代入すると　$\boldsymbol{p = 2b(4b^2 - 1)}$

(3) $b,\ c$ がともに整数であるとすると，$c^2 = 3b^2 - 1$ より

$$c^2 \equiv -1 \equiv 2 \pmod 3$$

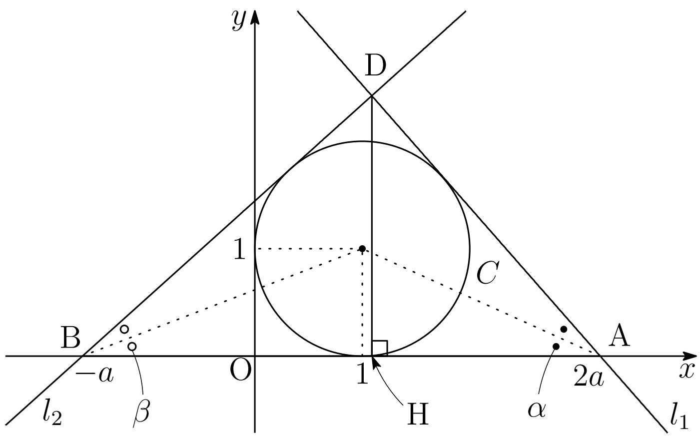
$c \equiv 0, \pm 1 \pmod 3$ について，$c^2 \not\equiv 2 \pmod 3$ であるから，上式は成立しない．よって，$b,\ c$ の一方は整数ではない． ■

$\boxed{3}$ (1) $\angle \mathrm{DAB} = 2\alpha$ とすると　$\tan\alpha = \dfrac{1}{2a-1}$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2\cdot\frac{1}{2a-1}}{1-\left(\frac{1}{2a-1}\right)^2} = \frac{2(2a-1)}{(2a-1)^2-1} = \frac{2a-1}{2a(a-1)}$$

直線 l_1 の傾きは $-\tan 2\alpha$ であるから，その方程式は

$$\boldsymbol{y = -\frac{2a-1}{2a(a-1)}(x-2a)}$$



(2) $\angle \mathrm{DBA} = 2\beta$ とすると　$\tan\beta = \dfrac{1}{1+a}$

$$\tan 2\beta = \frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta} = \frac{2\cdot\frac{1}{1+a}}{1-\left(\frac{1}{1+a}\right)^2} = \frac{2(1+a)}{(1+a)^2-1} = \frac{2(1+a)}{a(a+2)}$$

$\angle \mathrm{ADH} = \dfrac{\pi}{2} - 2\alpha$，$\angle \mathrm{BDH} = \dfrac{\pi}{2} - \beta$ より

$$\tan\angle \mathrm{ADH} = \frac{2a(a-1)}{2a-1},\quad \tan\angle \mathrm{BDH} = \frac{a(a+2)}{2(1+a)}$$

$\triangle \mathrm{BDH} : \triangle \mathrm{ADH} = \tan\angle \mathrm{BDH} : \tan\angle \mathrm{ADH} = 5:4$ より $(a>1)$

$$\frac{a(a+2)}{2(1+a)} : \frac{2a(a-1)}{2a-1} = 5:4 \quad \text{整理すると} \quad a^2-a-1=0 \qquad (*)$$

$a>1$ に注意して解くと　$\boldsymbol{a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$

(3) $(*)$ より，$a^2 = a + 1$ であるから

$$\tan 2\alpha = \frac{2a-1}{2a^2-2a} = \frac{2a-1}{2(a+1)-2a} = \frac{2a-1}{2}$$
$$\tan 2\beta = \frac{2(1+a)}{a^2+2a} = \frac{2(1+a)}{(a+1)+2a} = \frac{2(1+a)}{3a+1}$$

上の 2 式から

$$\begin{aligned}\tan 2\alpha \tan 2\beta &= \frac{2a-1}{2}\cdot\frac{2(a+1)}{3a+1} = \frac{(2a-1)(a+1)}{3a+1} \\ &= \frac{2a^2+a-1}{3a+1} = \frac{2(a+1)+a-1}{3a+1} = 1\end{aligned}$$

$\angle\mathrm{DAB} + \angle\mathrm{DBA} = 2\alpha + 2\beta = \dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$\angle\mathrm{ADB} = \pi - (\angle\mathrm{DAB} + \angle\mathrm{DBA}) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

AB は △ABD の外接円の直径であるから，中心は AB の中点 $\left(\dfrac{a}{2},\ 0\right)$，半径は $\dfrac{3a}{2}$ より

$$\textbf{中心}\left(\boldsymbol{\frac{1+\sqrt{5}}{4},\ 0}\right),\quad \textbf{半径}\,\boldsymbol{\frac{3(1+\sqrt{5})}{4}}$$

■

$\boxed{4}$ (1) $|z-a^2i| = a|z-i|$ より　$|z-a^2i|^2 = a^2|z-i|^2$

$$(z-a^2i)(\overline{z}+a^2i) = a^2(z-i)(\overline{z}+i)$$

整理すると　$(1-a^2)|z|^2 = a^2(1-a^2)$

$a>0,\ a \neq 1$ であるから，$1-a^2 \neq 0$ より

$$|z|^2 = a^2 \quad \text{すなわち} \quad |z| = a$$

よって，C は原点を中心とする**半径 $\boldsymbol{a}$ の円**である．

(2) z の偏角が θ であるから，(1) の結果から

$$z = a(\cos\theta + i\sin\theta) \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$$

したがって　$w = z - \dfrac{1}{z} = a(\cos\theta + i\sin\theta) - \dfrac{1}{a}(\cos\theta - i\sin\theta)$

$$= \left(a - \frac{1}{a}\right)\cos\theta + \left(a + \frac{1}{a}\right)i\sin\theta$$

$w \pm 2i = \left(a - \dfrac{1}{a}\right)\cos\theta + \left\{\left(a + \dfrac{1}{a}\right)\sin\theta \pm 2\right\}i$ より (複号同順)

$$\begin{aligned}
|w \pm 2i|^2 &= \left(a - \frac{1}{a}\right)^2\cos^2\theta + \left\{\left(a + \frac{1}{a}\right)\sin\theta \pm 2\right\}^2 \\
&= \left(a - \frac{1}{a}\right)^2(1-\sin^2\theta) + \left(a + \frac{1}{a}\right)^2\sin^2\theta \pm 4\left(a + \frac{1}{a}\right)\sin\theta + 4 \\
&= \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + 4 + \left\{\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - \left(a - \frac{1}{a}\right)^2\right\}\sin^2\theta \pm 4\left(a + \frac{1}{a}\right)\sin\theta \\
&= \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + 4\sin^2\theta \pm 4\left(a + \frac{1}{a}\right)\sin\theta = \left(a + \frac{1}{a} \pm 2\sin\theta\right)^2
\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{|w-2i|^2 = \left(a + \dfrac{1}{a} - 2\sin\theta\right)^2}$

(3) $a + \dfrac{1}{a} \pm 2\sin\theta = \left(\sqrt{a} - \dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 + 2(1 \pm \sin\theta) > 0$ であるから

$$|w \pm 2i| = a + \frac{1}{a} \pm 2\sin\theta \quad (\text{複号同順})$$

よって　$\boldsymbol{|w-2i| + |w+2i| = 2\left(a + \dfrac{1}{a}\right)}$　■

$\boxed{5}$ (1) $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin(\log x)$ より $(x>1)$

$$
\begin{aligned}
f'(x)&=-\frac{1}{x^2}\sin(\log x)+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\cos(\log x)\\
&=\boldsymbol{\frac{1}{x^2}\{-\sin(\log x)+\cos(\log x)\}},\\
f''(x)&=-\frac{2}{x^3}\{-\sin(\log x)+\cos(\log x)\}\\
&\qquad\qquad+\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x}\{-\cos(\log x)-\sin(\log x)\}\\
&=\boldsymbol{\frac{1}{x^3}\{\sin(\log x)-3\cos(\log x)\}}
\end{aligned}
$$

(2) (1) の結果から　$f'(x)=-\dfrac{\sqrt{2}}{x^2}\sin\left(\log x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\log a_n-\dfrac{\pi}{4}=2(n-1)\pi$，$\log b_n-\dfrac{\pi}{4}=2(n-1)\pi+\pi$ とおくと

x	$e^{2(n-1)\pi}$	$\cdots$	a_n	$\cdots$	b_n	$\cdots$	$e^{2n\pi}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	

よって，関数 $f(x)$ は，$e^{2(n-1)\pi}<x<e^{2n\pi}$ において (n は正の整数)，
極大値および極小値をそれぞれ 1 つずつとる．

別解 (1) の結果から　$f'(x)=-\dfrac{\sqrt{2}}{x^2}\sin\left(\log x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$f'(x)=0$ $\left(e^{2(n-1)\pi}<x<e^{2n\pi}\right)$ の 2 つ解 a_n，b_n を

$$\log a_n-\frac{\pi}{4}=2(n-1)\pi,\ \ \log b_n-\frac{\pi}{4}=2(n-1)\pi+\pi$$

とおくと，(1) の結果から

$$
\begin{aligned}
f''(a_n)&=\frac{1}{{a_n}^3}\{\sin(\log a_n)-3\cos(\log a_n)\}=-\frac{\sqrt{2}}{{a_n}^3}<0,\\
f''(b_n)&=\frac{1}{{b_n}^3}\{\sin(\log b_n)-3\cos(\log b_n)\}=\frac{\sqrt{2}}{{b_n}^3}>0
\end{aligned}
$$

よって，$e^{2(n-1)\pi}<x<e^{2n\pi}$ において，$f(x)$ は，$x=a_n$ で極大値をとり，
$x=b_n$ で極小値をとる．

(3) (2) の結論から，$\alpha_n = a_n$，$\beta_n = b_n$ より

$$\log\alpha_n = 2(n-1)\pi + \frac{\pi}{4}, \quad \log\beta_n = 2(n-1)\pi + \frac{5}{4}\pi$$

上の 2 式を (1) の結果に代入すると

$$f''(\alpha_n) = \frac{1}{{\alpha_n}^3}\{\sin(\log\alpha_n) - 3\cos(\log\alpha_n)\} = -\frac{\sqrt{2}}{{\alpha_n}^3},$$
$$f''(\beta_n) = \frac{1}{{\beta_n}^3}\{\sin(\log\beta_n) - 3\cos(\log\beta_n)\} = \frac{\sqrt{2}}{{\beta_n}^3}$$

数列 $\{f''(\alpha_n)\}$ は初項 $-\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}$，公比 $e^{-6\pi}$ の等比数列であり，
数列 $\{f''(\beta_n)\}$ は初項 $\sqrt{2}e^{-\frac{15\pi}{4}}$，公比 $e^{-6\pi}$ の等比数列であるから

$$\sum_{n=1}^{\infty} f''(\alpha_n) = \frac{-\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}}{1-e^{-6\pi}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} f''(\beta_n) = \frac{\sqrt{2}e^{-\frac{15\pi}{4}}}{1-e^{-6\pi}}$$

したがって

$$\log\left|\sum_{n=1}^{\infty} f''(\alpha_n)\right| - \log\left|\sum_{n=1}^{\infty} f''(\beta_n)\right| = \log\frac{\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}}{1-e^{-6\pi}} - \log\frac{\sqrt{2}e^{-\frac{15\pi}{4}}}{1-e^{-6\pi}} = 3\pi$$

よって $$\frac{1}{\pi}\left\{\log\left|\sum_{n=1}^{\infty} f''(\alpha_n)\right| - \log\left|\sum_{n=1}^{\infty} f''(\beta_n)\right|\right\} = \mathbf{3}$$ ■

6 (1) $f(x) = \sqrt{x}e^{-\frac{x^2}{4}}$ $(x \geqq 0)$ より

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-\frac{x^2}{4}} + \sqrt{x}\left(-\frac{x}{2}e^{-\frac{x^2}{4}}\right) \\ &= \frac{1-x^2}{2\sqrt{x}}e^{-\frac{x^2}{4}} = \frac{(1+x)(1-x)}{2\sqrt{x}}e^{-\frac{x^2}{4}} \end{aligned}$$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	0	↗	極大	↘

よって，$f(x)$ の最大値 M は　　$M = f(1) = \boldsymbol{e^{-\frac{1}{4}}}$

(2) $0 < x \leqq 5$ のとき，$g(x) = \dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}$ とおくと　$g(x) = e^{-\frac{x^2}{4}}$

$g(x)$ は単調減少であるから　$g(x) \geqq g(5) = e^{-\frac{25}{4}}$　$(0 < x \leqq 5)$

$$\frac{f(x)}{\sqrt{x}} \geqq e^{-\frac{25}{4}} \quad \text{ゆえに} \quad e^{-\frac{25}{4}}\sqrt{x} \leqq f(x)$$

上の第 2 式は，$x = 0$ のときも成立するから，次が成立する．

$$0 \leqq x \leqq 5 \text{ のとき} \quad e^{-\frac{25}{4}}\sqrt{x} \leqq f(x) \qquad (*)$$

$(*)$ より

$$\begin{aligned} \alpha &= \int_0^5 f(x)\,dx \\ &\geqq \int_0^5 e^{-\frac{25}{4}}\sqrt{x}\,dx \\ &= e^{-\frac{25}{4}}\left[\,\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\,\right]_0^5 = \frac{10}{3}\sqrt{5}e^{-\frac{25}{4}} = \frac{10}{3}f(5) \end{aligned}$$

よって　　$\dfrac{10}{3}f(5) \leqq \alpha$

(3) $\dfrac{2}{3}f(5) \leqq t \leqq M$ において

$$
\begin{aligned}
\frac{V(t)}{\pi} &= \int_0^5 \{f(x)-t\}^2\,dx \\
&= \int_0^5 f(x)^2\,dx - 2t\int_0^5 f(x)\,dx + t^2\int_0^5 dx \\
&= \int_0^5 xe^{-\frac{x^2}{2}}\,dx - 2\alpha t + 5t^2 \\
&= \left[-e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^5 - 2\alpha t + 5t^2 \\
&= 5t^2 - 2\alpha t + 1 - e^{-\frac{25}{2}} \\
&= 5\left(t-\frac{\alpha}{5}\right)^2 - \frac{\alpha^2}{5} + 1 - e^{-\frac{25}{2}}
\end{aligned}
$$

ここで，(2) の結果より　$\dfrac{2}{3}f(5) \leqq \dfrac{\alpha}{5}$

また，$\alpha = \displaystyle\int_0^5 f(x)\,dx \leqq \int_0^5 M\,dx = 5M$ より　$\dfrac{\alpha}{5} \leqq M$

$\dfrac{2}{3}f(5) \leqq \dfrac{\alpha}{5} \leqq M$ であるから，$V(t)$ は

$$\boldsymbol{t = \frac{\alpha}{5}} \textbf{のとき，最小値 } \boldsymbol{\pi\left(-\frac{\alpha^2}{5} + 1 - e^{-\frac{25}{2}}\right)}$$

をとる． ■