令和６年度　筑波大学　２次試験前期日程 (数学問題)120 分

- 総合選抜文系は 1 2 3 から 2 題選択 (数 II・B)，及び他教科との選択
- 総合選抜理系 I，理系 II，理系 III は 1 2 3 から 2 題選択，
  4 5 6 から 2 題選択
- 社会学類は 1 2 3 から 2 題選択 (数 II・B)，及び他教科との選択
- 国際総合・障害科学類は，数 II・B 選択の場合は 1 2 3 から 2 題選択，
  数 III 選択の場合は 4 5 6 から 2 題選択，及び他教科との選択
- 教育・心理学類・生物資源・生物・地球・数学・物理・化学・応用理工・工学システム・情報科学・情報メディア創生学類・知識情報・図書館学類・社会工学類・医学・医療学類は 1 2 3 から 2 題選択， 4 5 6 から 2 題選択

1 △OAB において，OA = OB = 4，AB = 2 とする．∠OAB の二等分線と線分 OB の交点を C とし，点 O から直線 AC に垂線 OD を引く．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とおく．以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ．

(3) △BCD の面積を求めよ．

2 以下の問いに答えよ．

(1) $x > 1$，$y > 1$ のとき，不等式

$$\log_x y + \log_y x \geqq 2$$

が成り立つことを示せ．

(2) 座標平面において，連立不等式

$$x > 1,\quad y > x,\quad \log_x y + \log_y x < \frac{5}{2}$$

の表す領域を図示せよ．

(3) (2) の領域の中で $x^2 + y^2 < 12$ を満たす部分に境界線を含めた図形を D とする．D の面積を求めよ．

3 $f(x) = x(x+1)(x-1)$ とする．座標平面において，曲線 $y = f(x)$ を C とし，曲線 C 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線を L とする．以下の問いに答えよ．

(1) 直線 L の方程式を t を用いて表せ．

(2) $t \neq 0$ のとき，直線 L と曲線 C の共有点で，点 $(t,\ f(t))$ とは異なるものを $(a,\ f(a))$ とする．a を t を用いて表せ．また，t が 0 を除いた実数を動くとき，$f'(t)f'(a)$ の最小値を求めよ．

(3) 次の条件 (A) を満たすような実数 t の範囲を求めよ．

(A) 曲線 C 上の点 $(s,\ f(s))$ における接線が直線 L と直交するような実数 s が存在する．

4 座標平面において，媒介変数表示

$$x = -t\left(t - \frac{3}{2}\right), \quad y = \sin \pi t \qquad (0 \leqq t \leqq 1)$$

で表される曲線を C とする．以下の問いに答えよ．

(1) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 t \sin \pi t \, dt$ を求めよ．

(2) 実数 a に対し，曲線 C と直線 $x = a$ の共有点の個数を求めよ．

(3) 曲線 C と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

$\boxed{5}$ a と b は実数の定数とする．関数

$$f(x) = (1-2x^2)\cos 2x + 2x\sin 2x + a\cos^2 x + b\int_0^x t\sin 2t\,dt$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) $a = 8\pi^2$，$b = -4\pi$ のとき，$0 < x < \dfrac{3}{2}\pi$ において $f(x)$ が極値をとる x の値をすべて求めよ．

(2) 次の条件 (B) を満たす a，b を求めよ．

(B) $0 < x < \dfrac{3}{2}\pi$ において，$f(x)$ は極値をとらない．

$\boxed{6}$ 定数 α は実数でない複素数とする．以下の問いに答えよ．

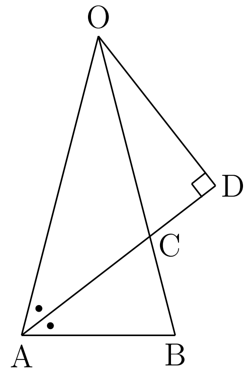
(1) $\dfrac{\alpha - |\alpha|}{\alpha + |\alpha|}$ は純虚数であることを示せ．

(2) 純虚数 β で，$\dfrac{\beta - |\alpha|}{\alpha + |\alpha|}$ が純虚数となるものがただ一つ存在することを示せ．

(3) 複素数 z を $\dfrac{z - |\alpha|}{\alpha + |\alpha|}$ が純虚数となるように動かすとき，$|z|$ が最小となる z を α を用いて表せ．

解答例

1 (1) AC は $\angle$OAB の二等分線であるから



$$\mathrm{OC}:\mathrm{CB}=\mathrm{OA}:\mathrm{AB}=2:1$$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{2}{3}\vec{b}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\boldsymbol{\dfrac{2}{3}\vec{b}-\vec{a}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}-\vec{a}$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=2$，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=4$ より　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2$

$$2^2=4^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+4^2 \quad \text{ゆえに} \quad \vec{a}\cdot\vec{b}=14$$

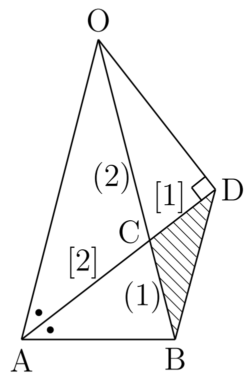
$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ に平行なベクトルを $\vec{v}=2\vec{b}-3\vec{a}$ とすると　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v}$

$$\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\vec{v}=-\vec{a}\cdot(2\vec{b}-3\vec{a})=-2\vec{a}\cdot\vec{b}+3|\vec{a}|^2=-2\cdot14+3\cdot4^2=20$$
$$|\vec{v}|^2=4|\vec{b}|^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{a}|^2=4\cdot4^2-12\cdot14+9\cdot4^2=40$$

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{20}{40}(2\vec{b}-3\vec{a})=\dfrac{1}{2}(2\vec{b}-3\vec{a})$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{a}+\frac{1}{2}(2\vec{b}-3\vec{a})=\boldsymbol{-\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\dfrac{1}{3}(2\vec{b}-3\vec{a})$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{1}{2}(2\vec{b}-3\vec{a})$ より



$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

AC : CD = 2 : 1，OC : CB = 2 : 1 であるから

$$\triangle\mathrm{BCD}=\frac{1}{2}\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\triangle\mathrm{OAB}$$
$$=\frac{1}{6}\triangle\mathrm{OAB}$$

$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4^2\cdot4^2-14^2}=\sqrt{15}$$

よって　$\triangle\mathrm{BCD}=\boldsymbol{\dfrac{1}{6}\sqrt{15}}$　■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $x>1,\ y>1$ のとき　$\log_x y>0$

相加平均・相乗平均の大小関係から

$$\begin{aligned}\log_x y+\log_y x &= \log_x y+\frac{1}{\log_x y}\\ &\geqq 2\sqrt{\log_x y\cdot\frac{1}{\log_x y}}=2\end{aligned}$$

(2) 連立不等式

$$x>1,\quad y>x,\quad \log_x y+\log_y x<\frac{5}{2} \qquad (*)$$

の第 3 式について　$\log_x y+\dfrac{1}{\log_x y}<\dfrac{5}{2}$

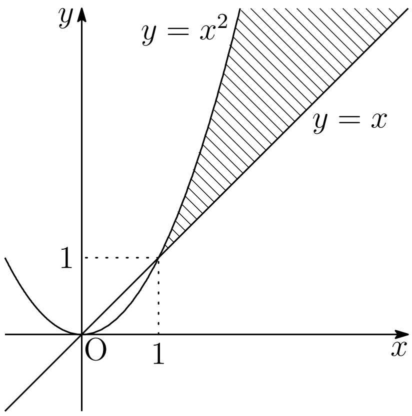
$2(\log_x y)^2-5\log_x y+2<0$　ゆえに　$(\log_x y-2)(2\log_x y-1)<0$

$y>x>1$ であるから，$\log_x y>1$ より　　$1<\log_x y<2$

$$\log_x x<\log_x y<\log_x x^2 \quad ゆえに \quad x<y<x^2$$

$(*)$ の連立不等式は　　$1<x<y<x^2$

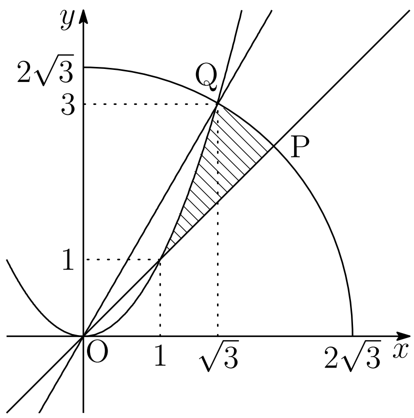
よって，求める領域は，下の図の斜線部分で境界線は含まない．



(3) 第1象限において，$y=x,\ y=x^2$ と円 x^2+y^2 との交点をそれぞれ P，Q とすると　$\mathrm{Q}(\sqrt{3},\ 3)$

領域 D は下の図の斜線部分 (境界線を含む) で，その面積を S とすると，$\angle\mathrm{POQ}=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{12}$ より

$$\begin{aligned}
S&=\frac{1}{2}(2\sqrt{3})^2\cdot\frac{\pi}{12}+\int_0^1(x-x^2)\,dx-\int_0^{\sqrt{3}}(\sqrt{3}x-x^2)\,dx\\
&=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot\frac{\pi}{12}+\int_0^1 x(1-x)\,dx-\int_0^{\sqrt{3}}x(\sqrt{3}-x)\,dx\\
&=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{6}(1-0)^3-\frac{1}{6}(\sqrt{3}-0)^3\\
&=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}+\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}}
\end{aligned}$$



別解 $y=x^2$ にガウス・グリーンの定理の系を適用する．

$$\begin{aligned}
S&=\frac{1}{2}(2\sqrt{3})^2\cdot\frac{\pi}{12}-\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}}(xy'-y)\,dx\\
&=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}}x^2\,dx=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{6}}
\end{aligned}$$

補足 別解の公式は，ガウス・グリーンの定理

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\{x(t)y'(t)-x'(t)y(t)\}\,dt$$

の変数 t を x に変更したものである．

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $f(x)=x(x+1)(x-1)=x^3-x$ より　$f'(x)=3x^2-1$

曲線 $C: y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線 L の方程式は

$$y=(3t^2-1)(x-t)+t^3-t \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=(3t^2-1)x-2t^3}$$

(2) C と L の方程式から，y を消去すると

$$x^3-x=(3t^2-1)x-2t^3 \quad \text{ゆえに} \quad (x-t)^2(x+2t)=0$$

L と C の共有点で $(t,\ f(t))$ と異なる点の x 座標 a は $(t\neq 0)$　$\boldsymbol{a=-2t}$

$$\begin{aligned} f'(t)f'(a)&=f'(t)f'(-2t)=(3t^2-1)(12t^2-1)\\ &=36t^4-15t^2+1=36\left(t^2-\frac{5}{24}\right)^2-\frac{9}{16} \end{aligned}$$

よって，$f'(t)f'(a)$ は $t^2=\dfrac{5}{24}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{-\dfrac{9}{16}}$ をとる．

(3) C 上の 2 点 $(s,\ f(s))$, $(t,\ f(t))$ におけるそれぞれの接線が直交するとき，$f'(s)f''(t)=-1$ より

$$(3s^2-1)(3t^2-1)=-1$$

したがって　$3s^2=\dfrac{3t^2-2}{3t^2-1}=\dfrac{(3t^2-2)(3t^2-1)}{(3t^2-1)^2}\geqq 0$

$3t^2-1\neq 0$, $3t^2-2<3t^2-1$ に注意して

$$3t^2-1<0 \quad \text{または} \quad 3t^2-2\geqq 0$$

よって　$\boldsymbol{t\leqq -\dfrac{\sqrt{6}}{3},\quad -\dfrac{\sqrt{3}}{3}<t<\dfrac{\sqrt{3}}{3},\quad \dfrac{\sqrt{6}}{3}\leqq t}$

補足 3 次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ について，$C: y=f(x)$ の変曲点の x 座標を p とすると，$f''(p)=0$ より，$b=-3ap$

$$f''(t)=6at+2b=6a(t-p)$$

$f(x)$ を $x=t$ を極として展開すると [1]

$$f(x)=f(t)+f'(t)(x-t)+\frac{1}{2}f''(t)(x-t)^2+a(x-t)^3$$

したがって

$$\begin{aligned} f(x)-\{f(t)+f'(t)(x-t)\}&=3a(t-p)(x-t)^2+a(x-t)^2\\ &=a(x-t)^2(x-3p+2t) \end{aligned}$$

よって，C 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線と C の共有点の x 座標は

$$x=t,\ 3p-2t$$

■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/TKdai/TKdai_2020.pdf (p.15 を参照)

4 (1)

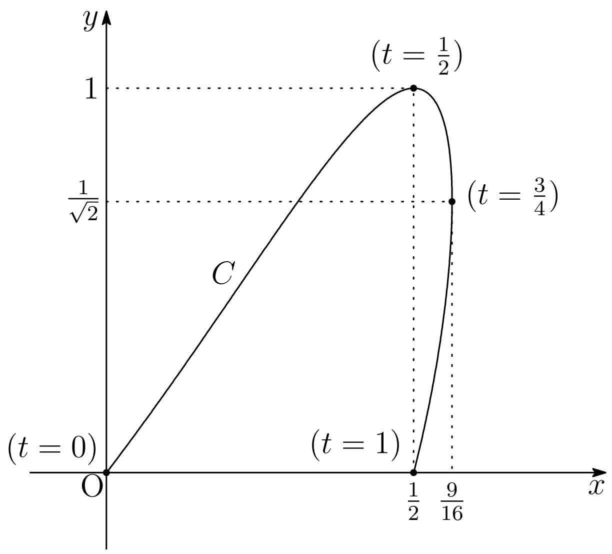
$$\int_0^1 t\sin\pi t\,dt = \int_0^1 t\left(-\frac{1}{\pi}\cos\pi t\right)'dt$$
$$= \left[\ t\left(-\frac{1}{\pi}\cos\pi t\right) - \left(-\frac{1}{\pi^2}\sin\pi t\right)\ \right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{1}{\pi}}$$

(2) $x = -t\left(t-\dfrac{3}{2}\right),\ y = \sin\pi t$ より $(0 \leqq t \leqq 1)$

$$\frac{dx}{dt} = -2t + \frac{3}{2},\quad \frac{dy}{dt} = \pi\cos\pi t$$

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}$	$\cdots$	1
$\frac{dx}{dt}$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$\frac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$		$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\downarrow$	$\swarrow$	
(x, y)	$(0,\ 0)$		$\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$		$\left(\frac{9}{16},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$		$\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$

したがって，C のグラフの概形は次のようになる．



よって，曲線 C と直線 $x=a$ の共有点の個数は

$$\begin{cases} \boldsymbol{a<0,\ \dfrac{9}{16}<a} & \textbf{のとき}\quad \boldsymbol{0}\,\textbf{個} \\ \boldsymbol{0 \leqq a < \dfrac{1}{2},\ a=\dfrac{9}{16}} & \textbf{のとき}\quad \boldsymbol{1}\,\textbf{個} \\ \boldsymbol{\dfrac{1}{2} \leqq a < \dfrac{9}{16}} & \textbf{のとき}\quad \boldsymbol{2}\,\textbf{個} \end{cases}$$

(3) $x=f(t)=-t\left(t-\dfrac{3}{2}\right)$，$y=g(t)=\sin\pi t$ とし $(0\leqq t\leqq 1)$，求める面積を S とすると，(1) の結果に注意して

$$
\begin{aligned}
S&=\int_{f(0)}^{f(\frac{3}{4})}y\,dx-\int_{f(1)}^{f(\frac{3}{4})}y\,dx=\int_{f(0)}^{f(1)}y\,dx=\int_0^1 y\frac{dx}{dt}dt\\
&=\int_0^1\sin\pi t\cdot\left(-2t+\frac{3}{2}\right)dt\\
&=-2\int_0^1 t\sin\pi t\,dt+\frac{3}{2}\int_0^1\sin\pi t\,dt\\
&=-2\cdot\frac{1}{\pi}+\frac{3}{2}\Big[-\frac{1}{\pi}\cos\pi t\Big]_0^1=\boldsymbol{\frac{1}{\pi}}
\end{aligned}
$$

補足 (ガウス・グリーンの定理[2]) $x=f(t)=-t\left(t-\dfrac{3}{2}\right)$，$y=g(t)=\sin\pi t$ とし $(0\leqq t\leqq 1)$，求める面積を S とすると (偏角の向きが正となるように積分区間をとる)

$$
\begin{aligned}
S&=\frac{1}{2}\int_1^0\{f(t)g'(t)-f'(t)g(t)\}\,dt\\
&=-\frac{1}{2}\int_1^0\{f(t)g(t)\}'\,dt+\int_1^0 f(t)g'(t)\,dt
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
\int_1^0\{f(t)g(t)\}'\,dt&=\Big[\,f(t)g(t)\,\Big]_1^0=0,\\
\int_1^0 f(t)g'(t)\,dt&=\int_1^0\left(-t^2+\frac{3}{2}t\right)(\sin\pi t)'\,dt\\
&=\Big[\left(-t^2+\frac{3}{2}t\right)\sin\pi t-\left(-2t+\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{1}{\pi}\cos\pi t\right)\\
&\qquad+(-2)\left(-\frac{1}{\pi^2}\sin\pi t\right)\Big]_1^0=\frac{1}{\pi}
\end{aligned}
$$

よって　$S=\dfrac{1}{\pi}$ ■

---

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2022.pdf $\boxed{5}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) 関数

$$f(x) = (1-2x^2)\cos 2x + 2x\sin 2x + a\cos^2 x + b\int_0^x t\sin 2t\,dt$$

を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= -4x\cos 2x - 2(1-2x^2)\sin 2x + 2\sin 2x + 4x\cos 2x \\ &\qquad - 2a\cos x\sin x + bx\sin 2x \\ &= (4x^2 + bx - a)\sin 2x \end{aligned} \tag{$*$}$$

$a = 8\pi^2$，$b = -4\pi$ を $(*)$ に代入すると

$$f'(x) = (4x^2 - 4\pi x - 8\pi^2)\sin 2x = 4(x+\pi)(x-2\pi)\sin 2x$$

したがって，$0 < x < \dfrac{3}{2}\pi$ における $f(x)$ の増減は

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$(\frac{3}{2}\pi)$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	極小	↗	極大	↘	

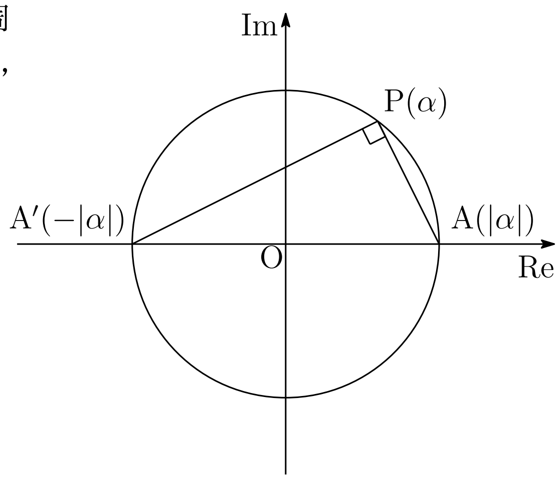
よって，極値をとる x の値は　$\boldsymbol{x = \dfrac{\pi}{2},\ \pi}$

(2) $0 < x < \dfrac{3}{2}\pi$ において，$(*)$ の $f'(x)$ の符号は，常に $f'(x) \leqq 0$ または $f'(x) \geqq 0$ であるから

$$\begin{aligned} 4x^2 + bx - a &= 4\left(x - \frac{\pi}{2}\right)(x-\pi) \\ &= 4x^2 - 6\pi x + 2\pi^2 \end{aligned}$$

よって，上式の係数を比較して　$\boldsymbol{a = -2\pi^2,\ b = -6\pi}$　■

6 (1) O を中心とする点 $\mathrm{P}(\alpha)$ を通る円周上に 2 点 $\mathrm{A}(|\alpha|)$，$\mathrm{A}'(-|\alpha|)$ をとると，$\angle\mathrm{APA}' = \dfrac{\pi}{2}$ であるから



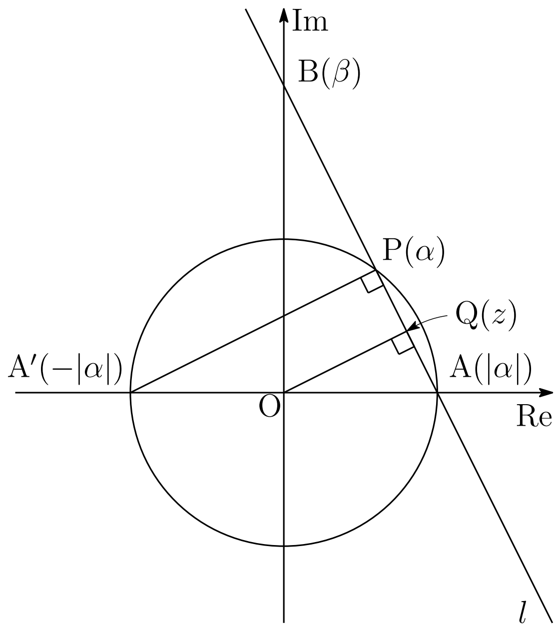
$$\arg\frac{\alpha-|\alpha|}{\alpha+|\alpha|} = \pm\frac{\pi}{2}$$

よって，$\dfrac{\alpha-|\alpha|}{\alpha+|\alpha|}$ は純虚数である．

(2) 点 $\mathrm{A}(|\alpha|)$ を通り，直線 $\mathrm{A}'\mathrm{P}$ に垂直な直線 l と虚軸との交点 $\mathrm{B}(\beta)$ とすると，$\mathrm{A}'\mathrm{P}\perp\mathrm{AB}$ より，

$$\frac{\beta-|\alpha|}{\alpha+|\alpha|} = \pm\frac{\pi}{2}$$

よって，$\dfrac{\beta-|\alpha|}{\alpha+|\alpha|}$ が純虚数となる純虚数 β がただ一つ存在する．



(3) $\dfrac{z-|\alpha|}{\alpha+|\alpha|}$ が純虚数となるとき，z は l 上の点で，$|z|$ が最小となるのは，$\mathrm{A}(|\alpha|)$，$\mathrm{P}(\alpha)$ の中点であるから

$$\boldsymbol{z = \frac{|\alpha|+\alpha}{2}}$$

■