令和５年度　筑波大学　２次試験前期日程 (数学問題)120 分

- 総合選抜文系は $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ から 2 題選択 (数 II・B)，及び他教科との選択
- 総合選抜理系 I，理系 II，理系 III は $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ から 2 題選択，$\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ から 2 題選択
- 社会学類は $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ から 2 題選択 (数 II・B)，及び他教科との選択
- 国際総合・障害科学類は，数 II・B 選択の場合は $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ から 2 題選択，数 III 選択の場合は $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ から 2 題選択，及び他教科との選択
- 教育・心理学類・生物資源・生物・地球・数学・物理・化学・応用理工・工学システム・情報科学・情報メディア創生学類・知識情報・図書館学類・社会工学類・医学・医療学類は $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ から 2 題選択，$\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ から 2 題選択

$\boxed{\mathbf{1}}$ 曲線 $C : y = x - x^3$ 上の点 A$(1,\ 0)$ における接線を ℓ とし，C と ℓ の共有点のうち A とは異なる点を B とする．また，$-2 < t < 1$ とし，C 上の点 P$(t,\ t - t^3)$ をとる．さらに，三角形 ABP の面積を $S(t)$ とする．

(1) 点 B の座標を求めよ．

(2) $S(t)$ を求めよ．

(3) t が $-2 < t < 1$ の範囲を動くとき，$S(t)$ の最大値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ α，β を実数とし，$\alpha > 1$ とする．曲線 $C_1 : y = |x^2 - 1|$ と曲線 $C_2 : y = -(x-\alpha)^2 + \beta$ が，点 $(\alpha,\ \beta)$ と点 $(p,\ q)$ の 2 点で交わるとする．また，C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を S_1 とし，x 軸，直線 $x = \alpha$，および C_1 の $x \geqq 1$ を満たす部分で囲まれた図形の面積を S_2 とする．

(1) p を α を用いて表し，$0 < p < 1$ であることを示せ．

(2) S_1 を α を用いて表せ．

(3) $S_1 > S_2$ であることを示せ．

3 座標空間内の原点 O を中心とする半径 r の球面 S 上に 4 つの頂点がある四面体 ABCD が，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{0}$$

を満たしているとする．また三角形 ABC の重心を G とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を r を用いて表せ．

(3) 点 P が球面 S 上を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ の最大値を r を用いて表せ．さらに，最大値をとるときの点 P に対して，$|\overrightarrow{\mathrm{PG}}|$ を r を用いて表せ．

4 a，b を実数とし，$f(x)=x+a\sin x$，$g(x)=b\cos x$ とする．

(1) 定積分 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$ を求めよ．

(2) 不等式

$$\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)+g(x)\}^2\,dx \geqq \int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2\,dx$$

が成り立つことを示せ．

(3) 曲線 $y=|f(x)+g(x)|$，2 直線 $x=-\pi$，$x=\pi$，および x 軸で囲まれた図形を x 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積を V とする．このとき不等式

$$V \geqq \frac{2}{3}\pi^2(\pi^2-6)$$

が成り立つことを示せ．さらに，等号が成立するときの a，b を求めよ．

5 $f(x)=x^{-2}e^x\ (x>0)$ とし，曲線 $y=f(x)$ を C とする．また h を正の実数とする．さらに，正の実数 t に対して，曲線 C，2 直線 $x=t$，$x=t+h$，および x 軸で囲まれた図形の面積を $g(t)$ とする．

(1) $g'(t)$ を求めよ．

(2) $g(t)$ を最小にする t がただ 1 つ存在することを示し，その t を h を用いて表せ．

(3) (2) で得られた t を $t(h)$ とする．このとき極限値 $\displaystyle\lim_{h\to+0} t(h)$ を求めよ．

6 i を虚数単位とする．複素数平面に関する以下の問いに答えよ．

(1) 等式 $|z+2| = 2|z-1|$ を満たす点 z の全体が表す図形は円であることを示し，その円の中心と半径を求めよ．

(2) 等式

$$\{|z+2| - 2|z-1|\}|z+6i| = 3\{|z+2| - 2|z-1|\}|z-2i|$$

を満たす点 z の全体が表す図形を S とする．このとき S を複素数平面上に図示せよ．

(3) 点 z が (2) における図形 S 上を動くとき，$w = \dfrac{1}{z}$ で定義される点 w が描く図形を複素数平面上に図示せよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $y = x - x^3$ を微分すると　$y' = 1 - 3x^2$

$x = 1$ のとき，$y' = -2$ より，C 上の点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$ における接線 ℓ の方程式は

$$y = -2(x-1) \quad \text{すなわち} \quad y = -2x + 2$$

C と ℓ の方程式から y を消去すると　$x - x^3 = -2x + 2$

整理すると　$x^3 - 3x + 2 = 0$　ゆえに　$(x-1)^2(x+2) = 0$

点 B の x 座標は　$x = -2$　これを C の方程式に代入して　$y = 6$

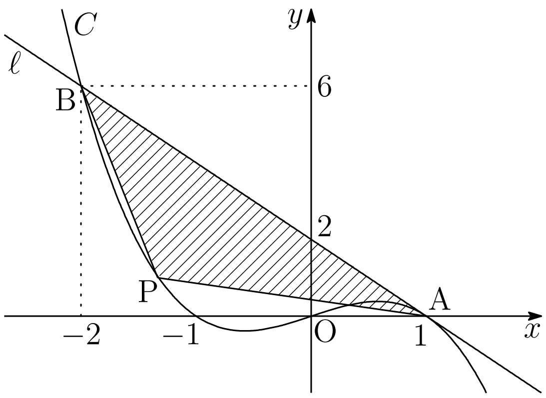
よって，点 B の座標は　$\boldsymbol{(-2,\ 6)}$

(2) $\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}(-2,\ 6)$，$\mathrm{P}(t,\ t - t^3)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-3,\ 6), \quad \overrightarrow{\mathrm{AP}} = (t-1,\ -t^3 + t)$$

$-2 < t < 1$ のとき，$\triangle\mathrm{ABP}$ の面積 $S(t)$ は

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{2}|-3(-t^3+t) - 6(t-1)| = \frac{3}{2}|t^3 - 3t + 2| \\ &= \frac{3}{2}|(t+2)(t-1)^2| = \boldsymbol{\frac{3}{2}(t+2)(t-1)^2} \end{aligned}$$



(3) $S(t)=\dfrac{3}{2}(t^3-3t+2)$ より

$$S'(t)=\frac{3}{2}(3t^2-3)=\frac{9}{2}(t+1)(t-1)$$

$-2<t<1$ における $S(t)$ の増減は次のようになる．

t	(-2)	$\cdots$	-1	$\cdots$	(1)
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$	(0)	$\nearrow$	6	$\searrow$	(0)

よって，求める最大値は　　$S(-1)=\mathbf{6}$

■

2 (1) 点 $(\alpha,\ \beta)$ $(\alpha > 1)$ は，$C_1 : y = |x^2 - 1|$ と $C_2 : y = -(x-\alpha)^2 + \beta$ の共有点であるから

$$|\alpha^2 - 1| = -(\alpha - \alpha)^2 + \beta \quad \text{ゆえに} \quad \beta = \alpha^2 - 1$$

C_1 と C_2 は 2 点 $(\alpha,\ \beta)$，$(p,\ q)$ で交わるから　$p \neq \alpha$
$C_1 : y = |x^2 - 1|$ と $C_2 : y = -x^2 + 2\alpha x - 1$ の共有点の x 座標について，次の (i)，(ii) の場合に分けて求める．

(i) $x^2 - 1 \geqq 0$，すなわち，$x \leqq -1,\ 1 \leqq x$ のとき

$$x^2 - 1 = -x^2 + 2\alpha x - 1 \quad \text{ゆえに} \quad x(x - \alpha) = 0$$

共有点の x 座標は α であるから，この区間に共有点 $(p,\ q)$ はない．

(ii) $x^2 - 1 < 0$，すなわち，$-1 < x < 1$ のとき，

$$-x^2 + 1 = -x^2 + 2\alpha x - 1 \quad \text{ゆえに} \quad x = \frac{1}{\alpha}$$

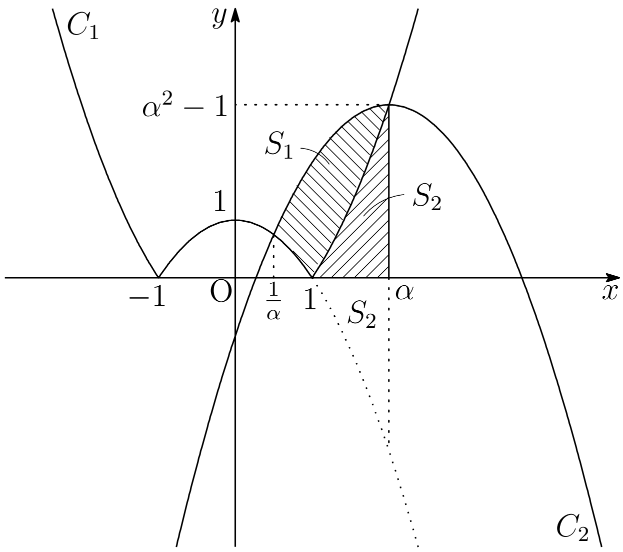
$\alpha > 1$ に注意して，$0 < \dfrac{1}{\alpha} < 1$　ゆえに　$p = \dfrac{1}{\alpha}$　よって　$0 < p < 1$

(2) 下の図から，次が成立する．

$$
\begin{aligned}
S_1 + 2S_2 &= \int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} \left\{(-x^2 + 2\alpha x - 1) - (-x^2 + 1)\right\} dx \\
&= 2\alpha \int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} \left(x - \frac{1}{\alpha}\right) dx = \alpha \Big[\left(x - \frac{1}{\alpha}\right)^2 \Big]_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} \\
&= \alpha \left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)^2 = \alpha^3 - 2\alpha + \frac{1}{\alpha} \\
S_2 &= \int_1^{\alpha} (x^2 - 1)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_1^{\alpha} = \frac{\alpha^3}{3} - \alpha + \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
S_1 &= (S_1 + 2S_2) - 2S_2 \\
&= \alpha^3 - 2\alpha + \frac{1}{\alpha} - 2\left(\frac{\alpha^3}{3} - \alpha + \frac{2}{3}\right) = \boldsymbol{\frac{\alpha^3}{3} + \frac{1}{\alpha} - \frac{4}{3}}
\end{aligned}
$$



(3) (2) の結果および $\alpha > 1$ より

$$
\begin{aligned}
S_1 - S_2 &= (S_1 + 2S_2) - 3S_2 \\
&= \left(\alpha^3 - 2\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) - 3\left(\frac{\alpha^3}{3} - \alpha + \frac{2}{3}\right) \\
&= \alpha - 2 + \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}(\alpha - 1)^2 > 0
\end{aligned}
$$

よって　　$S_1 > S_2$ ■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 点 G は，△ABC の重心であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=3\overrightarrow{\mathrm{OG}}$$

これを $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{0}\cdots(*)$ に代入すると

$$3\overrightarrow{\mathrm{OG}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{0} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OG}}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OD}}}$$

(2) $(*)$ より　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\overrightarrow{\mathrm{OD}}$

したがって　$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2+2(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}})=|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2=r^2$ であるから

$$3r^2+2(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}})=r^2$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\boldsymbol{-r^2}$

(3) $\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とおき，

$$I=\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PA}}$$

とおくと

$$\begin{aligned}I&=(\vec{a}-\vec{p})\cdot(\vec{b}-\vec{p})+(\vec{b}-\vec{p})\cdot(\vec{c}-\vec{p})+(\vec{c}-\vec{p})\cdot(\vec{a}-\vec{p})\\&=3|\vec{p}|^2-2(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{p}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}\end{aligned}$$

$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=-\vec{d}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=-r^2$，$|\vec{p}|=r$ であるから

$$I=3|\vec{p}|^2+2\vec{d}\cdot\vec{p}-r^2=2r^2+2\vec{d}\cdot\vec{p}\leqq 2r^2+2|\vec{d}||\vec{p}|=4r^2$$

上式において，等号が成立するのは，$\vec{p}=\vec{d}$ のときである．

このとき　$\overrightarrow{\mathrm{PG}}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=-\frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$

よって　$|\overrightarrow{\mathrm{PG}}|=\frac{4}{3}|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|=\boldsymbol{\frac{4}{3}r}$　■

$\boxed{4}$ (1) $f(x) = x + a\sin x,\ g(x) = b\cos x$ より ($a,\ b$ は実数)，$f(x)$ は奇関数，$g(x)$ は偶関数であるから

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx = \mathbf{0}$$

(2) (1) の結果を利用すると

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)+g(x)\}^2\,dx &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} g(x)^2\,dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx + b^2\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 x\,dx \\ &\geqq \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx \qquad (*)\end{aligned}$$

次式から，$(*)$ において等号が成立するのは，$b = 0$ のときである．

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2\ dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2x)\,dx = \pi$$

よって　$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)+g(x)\}^2\,dx \geqq \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx$

(3) (2) の結論から

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi} &= \int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)+g(x)\}^2\,dx \\ &\geqq \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}(x+a\sin x)^2\,dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi}(x^2+2ax\sin x+a^2\sin^2 x)\,dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - 2ax\cos x + 2a\sin x + \frac{a^2}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{2}{3}\pi^3 + 4a\pi + a^2\pi = \pi(a+2)^2 + \frac{2}{3}\pi(\pi^2-6) \\ &\geqq \frac{2}{3}\pi(\pi^2-6) \qquad (\text{等号が成立のは } a=-2 \text{ のとき}) \qquad (**)\end{aligned}$$

よって　$V \geqq \dfrac{2}{3}\pi^2(\pi^2-6)$

上式において，等号が成立するのは，$(*)$，$(**)$ から

$$\boldsymbol{a = -2,\ b = 0}$$

■

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $f(x) = x^{-2}e^x \ (x > 0)$ とする曲線 $y = f(x)$ と 2 直線 $x = t,\ x = t+h \ (h > 0)$ および x 軸で囲まれた図形の面積が $g(t)$ であるから

$$g(t) = \int_t^{t+h} f(x)\,dx$$

上式を t について微分すると

$$g'(t) = f(t+h) - f(t) = \boldsymbol{\frac{e^{t+h}}{(t+h)^2} - \frac{e^t}{t^2}}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{e^t\{e^h t^2 - (t+h)^2\}}{t^2(t+h^2)} \\ &= \frac{(e^{\frac{h}{2}}t + t + h)(e^{\frac{h}{2}}t - t - h)}{t^2(t+h)^2} \\ &= \frac{\{(e^{\frac{h}{2}}+1)t + h\}\{(e^{\frac{h}{2}}-1)t - h\}}{t^2(t+h)^2} \end{aligned}$$

$h > 0$ より，$t_0 = \dfrac{h}{e^{\frac{h}{2}} - 1}$ とおくと $(t_0 > 0)$，$g(t)$ の増減は

t	(0)	$\cdots$	t_0	$\cdots$
$g'(t)$		$-$	0	$+$
$g(t)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって，$g(t)$ を最小にする t は t_0 ただ 1 つである．

求める t は　$\boldsymbol{t = \dfrac{h}{e^{\frac{h}{2}} - 1}}$

(3) (2) の結果から　$t(h) = \dfrac{h}{e^{\frac{h}{2}} - 1}$

$\varphi(x) = e^{\frac{x}{2}}$ とすると，$\varphi'(x) = \dfrac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$ より　$\varphi'(0) = \dfrac{1}{2}$

$$\varphi'(0) = \lim_{h\to0}\frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h} = \lim_{h\to0}\frac{e^{\frac{h}{2}} - 1}{h}$$

$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{h}{e^{\frac{h}{2}} - 1} = \frac{1}{\varphi'(0)} = 2$ より　$\displaystyle\lim_{h\to+0} t(h) = \lim_{h\to+0}\frac{h}{e^{\frac{h}{2}} - 1} = \mathbf{2}$ ■

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $|z+2|=2|z-1|$ より　$|z+2|^2=4|z-1|^2$

$$(z+2)(\overline{z}+2)=4(z-1)(\overline{z}-1)\quad \text{整理すると}\quad z\overline{z}-2(z+\overline{z})=0$$

したがって　$(z-2)(\overline{z}-2)=4$　すなわち　$|z-2|=2$　$\cdots$①

よって，点 z の表す領域は，中心は点 **2**，半径 **2** の円．

(2) 与えらた等式から

$$\{|z+2|-2|z-1|\}\{|z+6i|-3|z-2i|\}=0$$

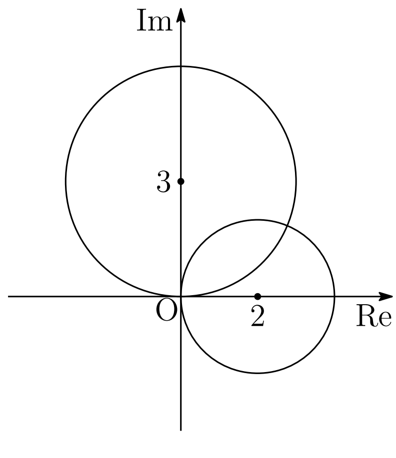
したがって　$|z+2|=2|z-1|$　または　$|z+6i|=3|z-2i|$　　$(*)$

$(*)$ の第 1 式は，(1) で求めた円．$(*)$ の第 2 式から

$$(z+6i)(\overline{z}-6i)=9(z-2i)(\overline{z}+2i)\quad \text{ゆえに}\quad z\overline{z}+3iz-3i\overline{z}=0$$

したがって　$(z-3i)(\overline{z}+3i)=9$　すなわち　$|z-3i|=3$　$\cdots$②

よって，S の表す図形の方程式は，① または ② である．



(3) ① に $z=\dfrac{1}{w}$ を代入すると $\left|\dfrac{1}{w}-2\right|=2$

$$|2w-1|=2|w| \quad \text{ゆえに} \quad (2w-1)(2\overline{w}-1)=4w\overline{w}$$

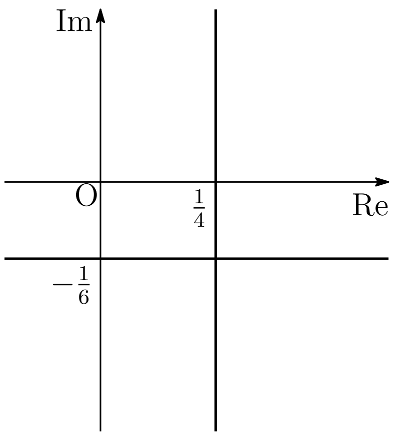
整理すると $2(w+\overline{w})=1$ ゆえに $\mathrm{Re}(w)=\dfrac{w+\overline{w}}{2}=\dfrac{1}{4}$ $\cdots$③

② に $z=\dfrac{1}{w}$ を代入すると $\left|\dfrac{1}{w}-3i\right|=3$

$$|3w+i|=3|w| \quad \text{ゆえに} \quad (3w+i)(3\overline{w}-i)=9w\overline{w}$$

整理すると $i(w-\overline{w})=\dfrac{1}{3}$ ゆえに $\mathrm{Im}(w)=\dfrac{w-\overline{w}}{2i}=-\dfrac{1}{6}$ $\cdots$④

よって，w の表す図形は，③，④ より，次のようになる．



補足 S 上の点 0 を除く点 z を反転[1] した点が w である．

①から，$z=2+2(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおくと $(-\pi<\theta<\pi)$

$$\begin{aligned}
z &= 2+2\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}-1+2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)\\
&= 4\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)\\
w &= \frac{1}{z}=\frac{1}{4\cos\frac{\theta}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}-i\sin\frac{\theta}{2}\right)=\frac{1}{4}-\frac{i}{4}\tan\frac{\theta}{2}
\end{aligned}$$

②から，$z=3i+3\left\{\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right\}$ とおくと $(-\pi<\theta<\pi)$

$$\begin{aligned}
z &= 3i+3\left(-\sin\theta+i\cos\theta\right)\\
&= 3i+3\left(-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+2i\cos^2\frac{\theta}{2}-i\right)\\
&= 6i\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)\\
w &= \frac{1}{z}=-\frac{i}{6\cos\frac{\theta}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}-i\sin\frac{\theta}{2}\right)=-\frac{i}{6}-\frac{1}{6}\tan\frac{\theta}{2}
\end{aligned}$$

■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2019.pdf の $\boxed{5}$ を参照．