令和４年度　筑波大学　２次試験前期日程 (数学問題)120 分

- 社会学類は $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ から 2 題選択 (数 II・B)，及び他教科との選択
- 国際総合・障害科学類は，数 II・B 選択の場合は $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ から 2 題選択，数 III 選択の場合は $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ から 2 題選択，及び他教科との選択
- 教育・心理学類・生物資源・生物・地球・数学・物理・化学・応用理工・工学システム・情報科学・情報メディア創生学類・知識情報・図書館学類・社会工学類・医学・医療学類は $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ から 2 題選択， $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ から 2 題選択

$\boxed{\mathbf{1}}$ t, p を実数とし，$t > 0$ とする．xy 平面において，原点 O を中心とし点 A$(1,\ t)$ を通る円を C_1 とする．また，点 A における C_1 の接線を ℓ とする．直線 $x = p$ を軸とする 2 次関数のグラフ C_2 は，x 軸と接し，点 A において直線 ℓ とも接するとする．

(1) 直線 ℓ の方程式を t を用いて表せ．

(2) p を t を用いて表せ．

(3) C_2 と x 軸の接点を M とし，C_2 と y 軸の交点を N とする．t が正の実数全体を動くとき，三角形 OMN の面積の最小値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 整数 $a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots$ を，さいころをくり返し投げることにより，以下のように定めていく．まず，$a_1 = 1$ とする．そして，正の整数 n に対し，a_{n+1} の値を，n 回目に出たさいころの目に応じて，次の規則で定める．

(規則) n 回目に出た目が 1, 2, 3, 4 なら $a_{n+1} = a_n$ とし，5, 6 なら $a_{n+1} = -a_n$ とする．

たとえば，さいころを 3 回投げ，その出た目が順に 5, 3, 6 であったとすると，$a_1 = 1,\ a_2 = -1,\ a_3 = -1,\ a_4 = 1$ となる．

$a_n = 1$ となる確率を p_n とする．ただし，$p_1 = 1$ とし，さいころのどの目も，出る確率は $\dfrac{1}{6}$ であるとする．

(1) $p_2,\ p_3$ を求めよ．

(2) p_{n+1} を p_n を用いて表せ．

(3) $p_n \leqq 0.5000005$ を満たす最小の正の整数 n を求めよ．
ただし，$0.47 < \log_{10} 3 < 0.48$ であることを用いてよい．

$\boxed{3}$ $0 < t < 1$ とする．平行四辺形 ABCD について，線分 AB，BC，CD，DA を $t : 1-t$ に内分する点をそれぞれ A_1，B_1，C_1，D_1 とする．さらに，点 A_2，B_2，C_2，D_2 および A_3，B_3，C_3，D_3 を次のように定める．

(条件) $k = 1,\ 2$ について，点 A_{k+1}，B_{k+1}，C_{k+1}，D_{k+1} は，それぞれ線分 A_kB_k，B_kC_k，C_kD_k，D_kA_k を $t : 1-t$ に内分する．

$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$，$\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{A_1B_1} = p\vec{a} + q\vec{b}$，$\overrightarrow{A_1D_1} = x\vec{a} + y\vec{b}$ を満たす実数 p，q，x，y を t を用いて表せ．

(2) 四角形 $A_1B_1C_1D_1$ は平行四辺形であることを示せ．

(3) $\overrightarrow{AD}$ と $\overrightarrow{A_3B_3}$ が平行となるような t の値を求めよ．

$\boxed{4}$ $0 < a < 4$ とする．曲線

$$C_1 : y = 4\cos^2 x \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right),$$
$$C_2 : y = a - \tan^2 x \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

は，ちょうど 2 つの共有点をもつとする．

(1) a の値を求めよ．

(2) C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ．

$\boxed{5}$ 曲線 $C : y = (x+1)e^{-x}$ $(x > -1)$ 上の点 P における法線と x 軸との交点を Q とする．点 P の x 座標を t とし，点 Q と点 $\mathrm{R}(t,\ 0)$ との距離を $d(t)$ とする．

(1) $d(t)$ を t を用いて表せ．

(2) $x \geqq 0$ のとき $e^x \geqq 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$ であることを示せ．

(3) 点 P が曲線 C 上を動くとき，$d(t)$ の最大値を求めよ．

6 i は虚数単位とする．次の条件 (I)，(II) をどちらも満たす複素数 z 全体の集合を S とする．

(I) z の虚部は正である．

(II) 複素数平面上の点 A(1)，B($1-iz$)，C(z^2) は一直線上にある．

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 1 でない複素数 α について，α の虚部が正であることは，$\dfrac{1}{\alpha-1}$ の虚部が負であるための必要十分条件であることを示せ．

(2) 集合 S を複素数平面上に図示せよ．

(3) $w=\dfrac{1}{z-1}$ とする．z が S を動くとき，$\left|w+\dfrac{i}{\sqrt{2}}\right|$ の最小値を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) 直線OAの傾きがtであるから，ℓは点A$(1,\ t)$を通り傾き$-\dfrac{1}{t}$の直線より

$$y-t=-\frac{1}{t}(x-1) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{x+ty=1+t^2}$$

(2) $C_2 : y=f(x)$とおくと，点Aの座標とℓの傾きから　$f(1)=t$，$f'(1)=-\dfrac{1}{t}$

$$f(x)=a(x-1)^2-\frac{1}{t}(x-1)+t$$

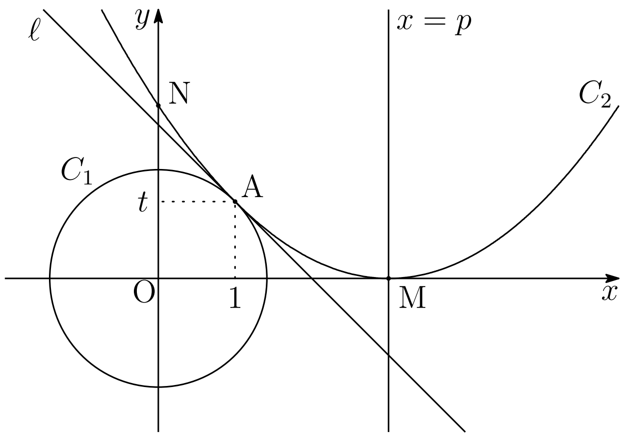
とおける (aは定数)．C_2はx軸に接するから

$$\left(-\frac{1}{t}\right)^2-4at=0 \quad \text{ゆえに} \quad a=\frac{1}{4t^3}$$

したがって

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{4t^3}(x-1)^2-\frac{1}{t}(x-1)+t \\ &= \frac{1}{4t^3}\{(x-1)^2-4t^2(x-1)+4t^4\} \\ &= \frac{1}{4t^3}\{(x-1)-2t^2\}^2=\frac{1}{4t^3}(x-2t^2-1)^2 \end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{p=2t^2+1}$



(3) 点Nのy座標は　$f(0)=\dfrac{1}{4t^3}(2t^2+1)^2$

$$\triangle\text{OMN}=\frac{1}{2}pf(0)=\frac{1}{2}(2t^2+1)\cdot\frac{1}{4t^3}(2t^2+1)^2=\left(\frac{2t^2+1}{2t}\right)^3=\left(t+\frac{1}{2t}\right)^3$$

$t+\dfrac{1}{2t} \geqq 2\sqrt{t\cdot\dfrac{1}{2t}}=\sqrt{2}$ より，求める最小値は　$(\sqrt{2})^3=\boldsymbol{2\sqrt{2}}$ ■

2 (1) $p_1 = 1$，$p_2 = \frac{2}{3}p_1$，$p_3 = \frac{2}{3}p_2 + \frac{1}{3}(1 - p_2) = \frac{1}{3}p_2 + \frac{1}{3}$ より

$$p_2 = \frac{2}{3}\cdot 1 = \mathbf{\frac{2}{3}}, \quad p_3 = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \mathbf{\frac{5}{9}}$$

(2) 条件から，次の確率漸化式が成立する．

$$p_{n+1} = \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3}(1 - p_n) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}}$$

(3) (2) の結果から　$p_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\left(p_n - \frac{1}{2}\right)$

$\left\{p_n - \frac{1}{2}\right\}$ は，初項 $p_1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$，公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列であるから

$$p_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad p_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3^{n-1}}\right)$$

$p_n \leqq 0.5000005 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot 10^{-6}$ より

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3^{n-1}}\right) \leqq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot 10^{-6} \quad \text{ゆえに} \quad 3^{n-1} \geqq 10^6$$

上の第 2 式の常用対数をとると

$$(n-1)\log_{10} 3 \geqq 6 \quad \text{ゆえに} \quad n \geqq 1 + \frac{6}{\log_{10} 3}$$

$0.47 < \log_{10} 3 < 0.48$ より，$\frac{25}{12} < \frac{1}{\log_{10} 3} < \frac{100}{47}$ であるから

$$12 + \frac{1}{2} = \frac{25}{2} < \frac{6}{\log_{10} 3} < \frac{600}{47} = 12 + \frac{36}{47}$$

したがって　$13 + \frac{1}{2} < 1 + \frac{6}{\log_{10} 3} < 13 + \frac{36}{47}$

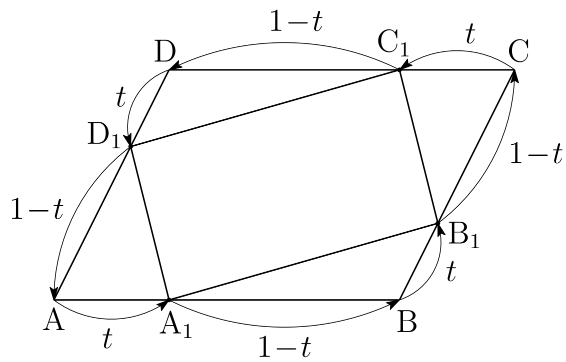
よって，$(*)$ を満たす最小の正の整数 n は　**14** ■

3 (1) $\overrightarrow{\mathrm{AA_1}} = t\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB_1}} = \vec{a} + t\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD_1}} = (1-t)\vec{b}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{A_1B_1}} = \overrightarrow{\mathrm{AB_1}} - \overrightarrow{\mathrm{AA_1}} = \vec{a} + t\vec{b} - t\vec{a} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{A_1D_1}} = \overrightarrow{\mathrm{AD_1}} - \overrightarrow{\mathrm{AA_1}} = (1-t)\vec{b} - t\vec{a} = -t\vec{a} + (1-t)\vec{b}$$

これらが $\overrightarrow{\mathrm{A_1B_1}} = p\vec{a} + q\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{A_1D_1}} = x\vec{a} + y\vec{b}$ を満たすとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$ が1次独立であるから

$$\boldsymbol{p = 1-t,\quad q = t,\quad x = -t,\quad y = 1-t}$$



(2) $\overrightarrow{\mathrm{AC_1}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{DC_1}} = \vec{b} + (1-t)\vec{a}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{D_1C_1}} &= \overrightarrow{\mathrm{AC_1}} - \overrightarrow{\mathrm{AD_1}} = \{\vec{b} + (1-t)\vec{a}\} - (1-t)\vec{b}\\ &= (1-t)\vec{a} + t\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{A_1B_1}}\end{aligned}$$

よって，四角形 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$ は平行四辺形である．

(3) (1) で示した $\overrightarrow{\mathrm{A_1B_1}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{A_1D_1}} = -t\overrightarrow{\mathrm{AB}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{A_2B_2}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{A_1B_1}} + t\overrightarrow{\mathrm{A_1D_1}},\quad \overrightarrow{\mathrm{A_2D_2}} = -t\overrightarrow{\mathrm{A_1B_1}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{A_1D_1}}$$

したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{A_3B_3}} &= (1-t)\overrightarrow{\mathrm{A_2B_2}} + t\overrightarrow{\mathrm{A_2D_2}}\\ &= (1-t)\{(1-t)\overrightarrow{\mathrm{A_1B_1}} + t\overrightarrow{\mathrm{A_1D_1}}\} + t\{-t\overrightarrow{\mathrm{A_1B_1}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{A_1D_1}}\}\\ &= (1-2t)\overrightarrow{\mathrm{A_1B_1}} + 2t(1-t)\overrightarrow{\mathrm{A_1D_1}}\\ &= (1-2t)\{(1-t)\vec{a} + t\vec{b}\} + 2t(1-t)\{-t\vec{a} + (1-t)\vec{b}\}\\ &= (1-t)(1-2t-2t^2)\vec{a} + t(3-6t+2t^2)\vec{b}\end{aligned}$$

これが $\vec{b}$ と平行であるから　$(1-t)(1-2t-2t^2) = 0$

t の値の範囲に注意して　$\boldsymbol{t = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}}$ ■

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) C_1，C_2 は偶関数である．$x=0$ の点はこれらの共有点ではないから，
$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ において，共有点が1つとなる a の値を求めればよい．
C_1，C_2 の方程式から y を消去すると

$$4\cos^2 x = a - \tan^2 x \quad ゆえに \quad a = 4\cos^2 x + \tan^2 x \qquad (*)$$

$f(x) = 4\cos^2 x + \tan^2 x \ \left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$$f'(x) = -8\cos x\sin x + 2\tan x\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2\sin x(1-4\cos^4 x)}{\cos^3 x}$$

$f(x)$ の増減表は

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$(\frac{\pi}{2})$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	(4)	$\searrow$	3	$\nearrow$	(∞)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} f(x) = \infty$$

$0<a<4$ より，$(*)$ がただ1つの実数解をもつときの a の値は　**3**

別解 C_1，C_2 は偶関数である．$x=0$ の点はこれらの共有点ではないから，
$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ において，共有点が1つとなる a の値を求めればよい．

C_1，C_2 の方程式から y を消去すると　$4\cos^2 x = a - \tan^2 x$

$t=\cos^2 x$ とおくと $(0<t<1)$，$\tan^2 x = \dfrac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1-t}{t}$ より

$$4t = a - \frac{1-t}{t} \quad 整理すると \quad 4t^2-(a+1)t+1=0 \quad \cdots ①$$

この2次方程式が重解をもつから

$$(a+1)^2 - 4\cdot4\cdot1 = 0 \quad ゆえに \quad (a+5)(a-3)=0$$

$0<a<4$ より　$a=3$　このとき，① は重解 $\dfrac{1}{2}$ をもち，条件を満たす．

よって　　$\boldsymbol{a=3}$

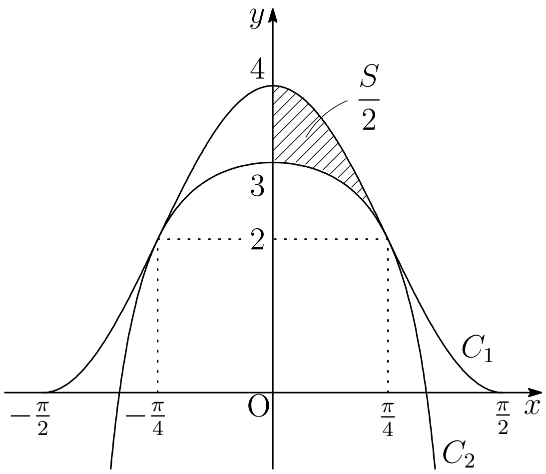
(2) $f(x) \geqq 3$ より，$C_1 : y = 4\cos^2 x$，$C_2 : y = 3 - \tan^2 x$ について

$$4\cos^2 x - (3 - \tan^2 x) = f(x) - 3 \geqq 0$$

したがって，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}\frac{S}{2} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \{f(x) - 3\}\,dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (4\cos^2 x + \tan^2 x - 3)\,dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(2\cos 2x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2\right) dx \\ &= \Big[\ \sin 2x + \tan x - 2x\ \Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2 - \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

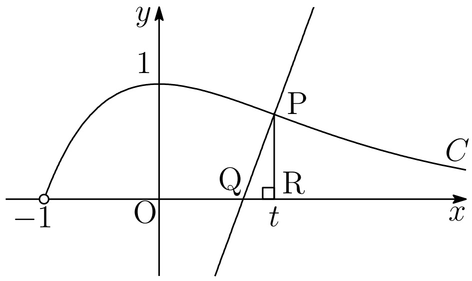
よって　　$S = \mathbf{4 - \boldsymbol{\pi}}$



5 (1) $f(x)=(x+1)e^{-x}$ とおくと

$$f'(x)=-xe^{-x}$$

$C: y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(t, f(t))$ における法線の方程式は



$$x-t+f'(t)\{y-f(t)\}=0$$

これに $y=0$ を代入すると　$x-t-f'(t)f(t)=0$

$$x-t=f'(t)f(t)\quad \text{ゆえに}\quad \mathrm{QR}=|x-t|=|f'(t)f(t)|$$

$t>-1$ に注意して　$\mathrm{QR}=|te^{-t}\cdot(t+1)e^{-t}|=\boldsymbol{|t|(t+1)e^{-2t}}$

補足 C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ における法線は，ベクトル $(1,\ f'(t))$ と垂直であるから，法線上の任意の点 $(x,\ y)$ について

$$(x-t,\ y-f(t))\perp(1,\ f'(t))\quad \text{ゆえに}\quad x-t+f'(t)\{y-f(t)\}=0$$

本題では，$t=0$ のとき，$f'(t)=0$ であるから，一般的 (generic) に用いる公式 $y-f(t)=-\dfrac{1}{f'(t)}(x-t)$ では $t\neq0$ として PQ を求め，$t=0$ の場合は，法線 PQ は y 軸と一致するから $\mathrm{QR}=0$ となる．これらをまとめて

$$\mathrm{QR}=|t|(t+1)e^{-2t}$$

と表記できることを説明する必要がある．やはり一般 (general) 公式

$$x-t+f'(t)\{y-f(t)\}=0$$

を用いた方がよい．(薬でもそうであるが)，ジェネリックでも大半の場合に有効であるが，ごく一部に適用できない場合がある．

(2) $g(x)=e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}$ とおくと

$$g'(x)=e^x-1-x,\quad g''(x)=e^x-1\geqq e^0-1=0$$

$g'(0)=0$，$g''(x)\geqq0\ (x\geqq0)$ であるから　$g'(x)\geqq0\ (x\geqq0)$

$g(0)=0$，$g'(x)\geqq\ \ (x\geqq0)$ であるから　$g(x)\geqq0\ (x\geqq0)$

よって　$x\geqq0$ のとき　$e^x\geqq1+x+\dfrac{x^2}{2}$

別解 $x \geqq 0$ のとき[1]

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1+\int_0^x e^t\,dt = 1+\int_0^x (t-x)'e^t\,dt \\
&= 1+\Big[\,(t-x)e^t\,\Big]_0^x - \int_0^x (t-x)e^t\,dt \\
&= 1+x-\int_0^x \left\{\frac{1}{2}(t-x)^2\right\}' e^t\,dt \\
&= 1+x-\left[\frac{1}{2}(t-x)^2e^t\right]_0^x + \int_0^x \frac{1}{2}(t-x)^2e^t\,dt \\
&= 1+x+\frac{x^2}{2}+\int_0^x \frac{1}{2}(t-x)^2e^t\,dt \geqq 1+x+\frac{x^2}{2}
\end{aligned}
$$

(3) $h(t)=t(t+1)e^{-2t}$ $(t>-1)$ とおくと　$h'(t)=(1-2t^2)e^{-2t}$

t	(-1)	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
$h'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$h(t)$	(0)	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$

$$h\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{\sqrt{2}-1}{2}e^{\sqrt{2}},$$

$\dfrac{1}{\sqrt{2}} < t$ のとき　$0 < h(t) < h\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{\sqrt{2}+1}{2}e^{-\sqrt{2}}$

$d(t)=|h(t)|$ であるから，$d(t)$ の最大値を M とすると

$$M=\max\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}e^{\sqrt{2}},\ \frac{\sqrt{2}+1}{2}e^{-\sqrt{2}}\right)$$

このとき　$\dfrac{\frac{\sqrt{2}-1}{2}e^{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{2}+1}{2}e^{-\sqrt{2}}} = (\sqrt{2}-1)^2e^{2\sqrt{2}} = \left\{(\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}}\right\}^2$

(2) の結果に $x=\sqrt{2}$ を代入すると

$$e^{\sqrt{2}} \geqq 1+\sqrt{2}+\frac{(\sqrt{2})^2}{2} = \sqrt{2}(\sqrt{2}+1)$$

上の 2 式から　$\dfrac{\frac{\sqrt{2}-1}{2}e^{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{2}+1}{2}e^{-\sqrt{2}}} \geqq \{(\sqrt{2}-1)\cdot\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)\}^2 = 2 > 1$

よって，求める最大値は　$\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}e^{\sqrt{2}}}$ ■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/THdai/THdai_ri_2021.pdf の $\boxed{6}$ を参照.

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $\dfrac{1}{\alpha-1}=\dfrac{\overline{\alpha}-1}{(\alpha-1)(\overline{\alpha}-1)}=\dfrac{\overline{\alpha}-1}{|\alpha-1|^2}$ より

$$\mathrm{Im}\left(\frac{1}{\alpha-1}\right)=\mathrm{Im}\left(\frac{\overline{\alpha}-1}{|\alpha-1|^2}\right)=\mathrm{Im}\left(\frac{\overline{\alpha}}{|\alpha-1|^2}\right)=-\frac{\mathrm{Im}(\alpha)}{|\alpha-1|^2}$$

よって　$\mathrm{Im}(\alpha)>0 \iff \mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{\alpha-1}\right)<0$

(2) $\mathrm{Im}(z)>0$ より，$z\neq 0$ に注意して

$$\frac{z^2-1}{(1-iz)-1}=\frac{z^2-1}{-iz}$$

は実数であるから

$$\frac{z^2-1}{-iz}-\overline{\left(\frac{z^2-1}{-iz}\right)}=0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{z^2-1}{-iz}-\frac{\overline{z}^2-1}{i\overline{z}}=0$$

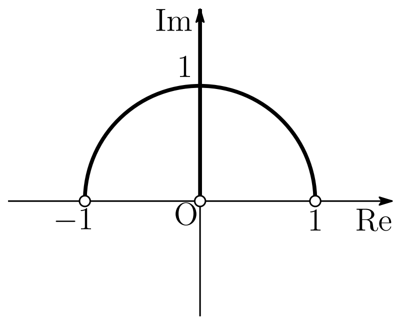
上の第 2 式から

$$\begin{aligned}\overline{z}(z^2-1)+z(\overline{z}^2-1)&=0\\(z+\overline{z})(z\overline{z}-1)&=0\\2\mathrm{Re}(z)(|z|^2-1)&=0\end{aligned}$$

よって，S の満たす条件は

$$\mathrm{Re}(z)=0 \ \text{ または } \ |z|=1 \quad (\mathrm{Im}(z)>0)$$

したがって，S は，下の図の太線部分で，$\circ$ は含まない．



(3) $w=\dfrac{1}{z-1}$ について，(1) の結論から，$\mathrm{Im}(z)>0$ より　$\mathrm{Im}(w)<0$

$d=\left|w+\dfrac{i}{\sqrt{2}}\right|$ とおくと，d は点 $-\dfrac{i}{\sqrt{2}}$ と点 w の 2 点間の距離を表す.

$w=\dfrac{1}{z-1}$ より　$z=\dfrac{w+1}{w}$

(i) $\mathrm{Re}(z)=0$ のとき，$z+\overline{z}=0$ より　$\dfrac{w+1}{w}+\dfrac{\overline{w}+1}{\overline{w}}=0$

$$w\overline{w}+\frac{1}{2}(w+\overline{w})=0 \quad ゆえに \quad \left|w+\frac{1}{2}\right|^2=\frac{1}{4}$$

w は中心 $-\dfrac{1}{2}$，半径 $\dfrac{1}{2}$ の円の $\mathrm{Im}(w)<0$ の部分を表す.
d を最小にする点を w_1 とすると

$$\left|w_1+\frac{i}{\sqrt{2}}\right|=\left|-\frac{1}{2}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right|-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

(ii) $|z|=1$ のとき，$\left|\dfrac{w+1}{w}\right|=1$ より　$|w+1|=|w|$

w は 2 点 $-1,\ 0$ の垂直二等分線の $\mathrm{Im}(w)<0$ の部分を表す.

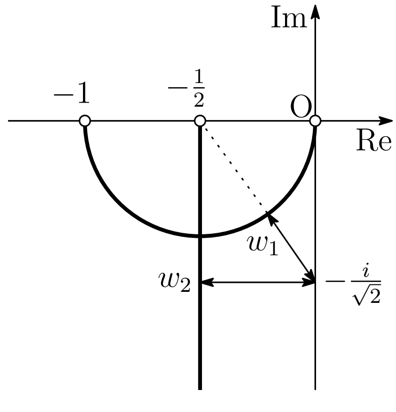
d を最小にする点を w_2 とすると　$\left|w_2+\dfrac{i}{\sqrt{2}}\right|=\dfrac{1}{2}$

(i)，(ii) の結果から

$$\left|w_2+\frac{i}{\sqrt{2}}\right|-\left|w_1+\frac{i}{\sqrt{2}}\right|=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}-1}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{2}>0$$

$\left|w_1+\dfrac{i}{\sqrt{2}}\right|<\left|w_2+\dfrac{i}{\sqrt{2}}\right|$ であるから，求める最小値は

$$\left|w_1+\frac{i}{\sqrt{2}}\right|=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}$$



補足 (2) で得られた結果

$$\mathrm{Re}(z)=0 \quad \text{または} \quad |z|=1 \quad (\mathrm{Im}(z)>0)$$

は次のように表記することもできる[2].

$$z=i\tan\theta \ \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{または} \quad z=\cos\varphi+i\sin\varphi \ (0<\varphi<\pi)$$

(i) $z=i\tan\theta \ \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき

$$\begin{aligned}
w&=\frac{1}{z-1}=\frac{1}{i\tan\theta-1}=-\frac{\cos\theta}{\cos\theta-i\sin\theta}\\
&=-\cos\theta(\cos\theta+i\sin\theta)=-\cos^2\theta-i\sin\theta\cos\theta\\
&=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)\\
&=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\{\cos(2\theta+\pi)+i\sin(2\theta+\pi)\}
\end{aligned}$$

w は中心 $-\dfrac{1}{2}$, 半径 $\dfrac{1}{2}$ の円周上の $\pi<\arg\left(w+\dfrac{1}{2}\right)<2\pi$ を満たす点.

(ii) $z=\cos\varphi+i\sin\varphi \ (0<\varphi<\pi)$ のとき

$$\begin{aligned}
w&=\frac{1}{z-1}=\frac{1}{\cos\varphi+i\sin\varphi-1}\\
&=\frac{\cos\varphi-1-i\sin\varphi}{(\cos\varphi-1+i\sin\varphi)(\cos\varphi-1-i\sin\varphi)}\\
&=\frac{\cos\varphi-1-i\sin\varphi}{2(1-\cos\varphi)}=-\frac{1}{2}-\frac{i\sin\varphi}{2(1-\cos\varphi)}\\
&=-\frac{1}{2}-\frac{2i\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{4\sin^2\frac{\varphi}{2}}=-\frac{1}{2}-\frac{i}{2\tan\frac{\varphi}{2}}=-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\tan\frac{\pi-\varphi}{2}
\end{aligned}$$

w は $\mathrm{Re}(w)=-\dfrac{1}{2}$ の直線上の $\mathrm{Im}(w)<0$ を満たす点. ■

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2019.pdf (p.10 の解説を参照)