# 令和３年度　筑波大学　２次試験前期日程 (数学問題)120 分

- 社会学類は $\boxed{1}$ 〜 $\boxed{3}$ から 2 題選択 (数 II・B)，及び他教科との選択
- 国際総合・障害科学類は，数 II・B 選択の場合は $\boxed{1}$ 〜 $\boxed{3}$ から 2 題選択，数 III 選択の場合は $\boxed{4}$ 〜 $\boxed{6}$ から 2 題選択，及び他教科との選択
- 教育・心理学類・生物資源・生物・地球・数学・物理・化学・応用理工・工学システム・情報科学・情報メディア創生学類・知識情報・図書館学類・社会工学類・医学・医療学類は $\boxed{1}$ 〜 $\boxed{3}$ から 2 題選択， $\boxed{4}$ 〜 $\boxed{6}$ から 2 題選択

**1** $xy$ 平面において 2 つの円

$$C_1 : x^2 - 2x + y^2 + 4y - 11 = 0,$$
$$C_2 : x^2 - 8x + y^2 - 4y + k = 0$$

が外接するとし，その接点を P とする．以下の問いに答えよ．

(1) $k$ の値を求めよ．

(2) P の座標を求めよ．

(3) 円 $C_1$ と円 $C_2$ の共通接線のうち点 P を通らないものは 2 本ある．これら 2 直線の交点 Q の座標を求めよ．

**2** $t = \sin\theta + \cos\theta$ とし，$\theta$ は $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くものとする．

(1) $t$ のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) $\sin^3\theta + \cos^3\theta$ と $\cos 4\theta$ を，それぞれ $t$ を用いて表せ．

(3) $\sin^3\theta + \cos^3\theta = \cos 4\theta$ であるとき，$t$ の値をすべて求めよ．

**3** O を原点とする座標空間において，3 点 A$(-2,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 1,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ 1)$ を通る平面を $\alpha$ とする．2 点 P$(0,\ 5,\ 5)$，Q$(1,\ 1,\ 1)$ をとる．点 P を通り $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ に平行な直線を $\ell$ とする．直線 $\ell$ 上の点 R から平面 $\alpha$ に下ろした垂線と $\alpha$ の交点を S とする．$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$(ただし $k$ は実数) とおくとき，以下の問いに答えよ．

(1) $k$ を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{AS}}$ を成分で表せ．

(2) 点 S が $\triangle$ABC の内部または周にあるような $k$ の値の範囲を求めよ．

**4** $p$，$q$ を定数とし，$0 < p < 1$ とする．

曲線 $C_1 : y = px^{\frac{1}{p}}\ (x > 0)$ と，

曲線 $C_2 : y = \log x + q\ (x > 0)$

が，ある 1 点 $(a,\ b)$ において同じ直線に接するとする．曲線 $C_1$，直線 $x = a$，直線 $x = e^{-q}$ および $x$ 軸で囲まれた図形の面積を $S_1$ とする．また，曲線 $C_2$，直線 $x = a$ および $x$ 軸で囲まれた図形の面積を $S_2$ とする．

(1) $q$ を $p$ を用いて表せ．

(2) $S_1$，$S_2$ を $p$ を用いて表せ．

(3) $\dfrac{S_2}{S_1} \geqq \dfrac{3}{4}$ であることを示せ．ただし，$2.5 < e < 3$ を用いてよい．

**5** O を原点とする $xy$ 平面において，点 A$(-1,\ 0)$ と点 B$(2,\ 0)$ をとる．円 $x^2+y^2 = 1$ の，$x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$ を満たす部分を $C$ とし，また点 B を通り $y$ 軸に平行な直線を $\ell$ とする．2 以上の整数 $n$ に対し，曲線 $C$ 上に点 P，Q を

$$\angle \mathrm{POB} = \frac{\pi}{n}, \quad \angle \mathrm{QOB} = \frac{\pi}{2n}$$

を満たすようにとる．直線 AP と直線 $\ell$ の交点を V とし，直線 AQ と直線 $\ell$ の交点を W とする．線分 AP，線分 AQ および曲線 $C$ で囲まれた図形の面積を $S(n)$ とする．また線分 PV，線分 QW，曲線 $C$ および線分 VW で囲まれた図形の面積を $T(n)$ とする．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\{S(n) + T(n)\}$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{T(n)}{S(n)}$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ $i$ は虚数単位とする．複素数平面において，複素数 $z$ の表す点 P を P($z$) または点 $z$ と書く．$\omega = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ とおき，3 点 A(1)，B($\omega$)，C($\omega^2$) を頂点とする △ABC を考える．

(1) △ABC は正三角形であることを示せ．

(2) 点 $z$ が辺 AC 上を動くとき，点 $-z$ が描く図形を複素数平面上に図示せよ．

(3) 点 $z$ が辺 AB 上を動くとき，点 $z^2$ が描く図形を $E_1$ とする．また，点 $z$ が辺 AC 上を動くとき，点 $z^2$ が描く図形を $E_2$ とする．$E_1$ と $E_2$ の共有点をすべて求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $C_1$，$C_2$ はそれぞれ

$$C_1 : (x-1)^2+(y+2)^2=16,$$
$$C_2 : (x-4)^2+(y-2)^2=20-k$$

$C_1$，$C_2$ の中心をそれぞれ A，B とすると

$$\mathrm{A}(1,-2),\ \mathrm{B}(4,\ 2) \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{AB}=\sqrt{(4-1)^2+(2+2)^2}=5$$

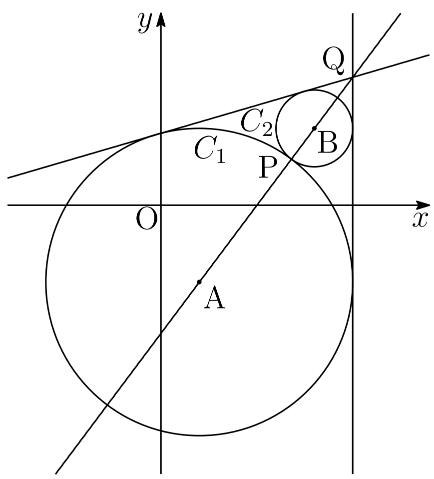
$C_1$，$C_2$ の半径はそれぞれ $4,\ \sqrt{20-k}$ であるから，$C_1$ と $C_2$ が外接するとき

$$4+\sqrt{20-k}=5 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{k=19}$$

(2) (1) の結果から，P は線分 AB を $4:1$ に内分する点であるから

$$\left(\frac{1{\cdot}1+4{\cdot}4}{4+1},\ \frac{1{\cdot}(-2)+4{\cdot}2}{4+1}\right)$$

よって　$\mathbf{P}\left(\dfrac{\mathbf{17}}{\mathbf{5}},\ \dfrac{\mathbf{6}}{\mathbf{5}}\right)$




(3) (1) の結果から，Q は線分 AB を $4:1$ に外分する点であるから

$$\left(\frac{-1{\cdot}1+4{\cdot}4}{4-1},\ \frac{-1{\cdot}(-2)+4{\cdot}2}{4-1}\right) \quad \text{よって} \quad \mathbf{Q}\left(\mathbf{5},\ \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{3}}\right)$$

補足 $C_1$, $C_2$ の半径および A，B の $x$ 座標から，直線 $x=5$ は $C_1$, $C_2$ の共通接線である．直線 AB の偏角を $\theta$ とすると，直線 AB の傾きから

$$\tan\theta=\frac{4}{3}$$

もう 1 本の共通接線の偏角を $\varphi$ とすると

$$\varphi+\frac{\pi}{2}=2\theta \quad \text{ゆえに} \quad \varphi=2\theta-\frac{\pi}{2}$$

よって　$$\tan\varphi=-\frac{1}{\tan 2\theta}=-\frac{1-\tan^2\theta}{2\tan\theta}=\frac{7}{24}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $(*)$ $t = \sin\theta + \cos\theta$ より $\left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta + \frac{\pi}{4} < \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$t = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right), \quad -\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}$$

よって $\boldsymbol{-1 < t \leqq \sqrt{2}}$

(2) $(*)$ の両辺を平方すると

$$t^2 = 1 + 2\sin\theta\cos\theta \quad \text{ゆえに} \quad \sin\theta\cos\theta = \frac{t^2-1}{2} \qquad (**)$$

したがって

$$\begin{aligned}\sin^3\theta + \cos^3\theta &= (\sin\theta + \cos\theta)(1 - \sin\theta\cos\theta)\\ &= t\left(1 - \frac{t^2-1}{2}\right) = \boldsymbol{-\frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t}\end{aligned}$$

また，$(**)$ の第 1 式から，$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = t^2 - 1$ であるから

$$\begin{aligned}\cos 4\theta &= 1 - 2\sin^2 2\theta = 1 - 2(t^2-1)^2\\ &= \boldsymbol{-2t^4 + 4t^2 - 1}\end{aligned}$$

(3) (2) の結果を $\sin^3\theta + \cos^3\theta = \cos 4\theta$ に代入すると

$$-\frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t = -2t^4 + 4t^2 - 1$$

整理すると $4t^4 - t^3 - 8t^2 + 3t + 2 = 0$

ゆえに $(t-1)^2(4t^2 + 7t + 2) = 0$

(1) の結果に注意して解くと $\boldsymbol{t = 1,\ \dfrac{-7+\sqrt{17}}{8}}$

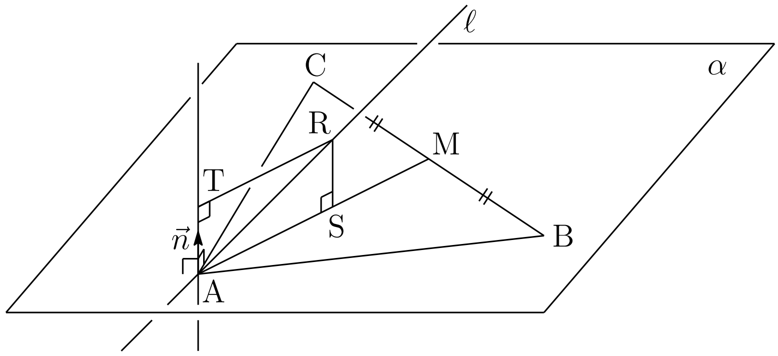
$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) A$(-2,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 1,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ 1)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (2,\ 1,\ 0),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (2,\ 0,\ 1) \qquad \cdots(*)$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と垂直なベクトルの 1 つを $\vec{n} = (-1,\ 2,\ 2)$ とする．A を通り $\vec{n}$ と平行な直線上に点 R から垂線 RT を引くと

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}} = \overrightarrow{\mathrm{AS}} + \overrightarrow{\mathrm{AT}},\quad \overrightarrow{\mathrm{AT}} = \frac{(\overrightarrow{\mathrm{AR}}\cdot\vec{n})}{|\vec{n}|^2}\vec{n}$$

したがって $$\overrightarrow{\mathrm{AS}} = \overrightarrow{\mathrm{AR}} - \frac{(\overrightarrow{\mathrm{AR}}\cdot\vec{n})}{|\vec{n}|^2}\vec{n} \qquad \cdots(**)$$




A$(-2,\ 0,\ 0)$，P$(0,\ 5,\ 5)$，Q$(1,\ 1,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AR}} &= \overrightarrow{\mathrm{OR}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + k\overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\\ &= (2,\ 5,\ 5) + k(1,\ 1,\ 1),\\ \overrightarrow{\mathrm{AR}}\cdot\vec{n} &= 18 + 3k\end{aligned}$$

$|\vec{n}|^2 = (-1)^2 + 2^2 + 2^2 = 9$ であるから，上式および $(**)$ より

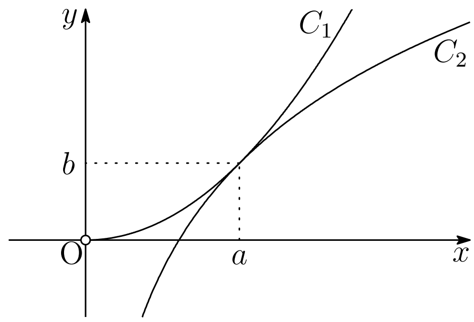
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AS}} &= (2,\ 5,\ 5) + k(1,\ 1,\ 1) - \frac{18+3k}{9}(-1,\ 2,\ 2)\\ &= \boldsymbol{\left(1 + \frac{k}{3}\right)(4,\ 1,\ 1)}\end{aligned}$$

(2) 2 点 B，C の中点を M とすると，$(*)$ より $2\overrightarrow{\mathrm{AM}} = (4,\ 1,\ 1)$

上式および (1) の結果から $\overrightarrow{\mathrm{AS}} = 2\left(1 + \dfrac{k}{3}\right)\overrightarrow{\mathrm{AM}}$

条件を満たすとき $0 \leqq 2\left(1 + \dfrac{k}{3}\right) \leqq 1$ よって $\boldsymbol{-3 \leqq k \leqq -\dfrac{3}{2}}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $f(x)=px^{\frac{1}{p}}$，$g(x)=\log x+q$ とおくと




$$f'(x)=x^{\frac{1}{p}-1},\quad g'(x)=\frac{1}{x}$$

$C_1 : y=f(x)$ と $C_2 : y=g(x)$ が点 $(a,\ b)$ で接するから

$$b=f(a)=g(a),\quad f'(a)=g'(a)$$

したがって　　$b=pa^{\frac{1}{p}}=\log a+q,\quad a^{\frac{1}{p}-1}=a^{-1}$　　$(*)$

$(*)$ の第 2 式において，$\dfrac{1}{p}-1\neq -1$ であるから　$a=1$

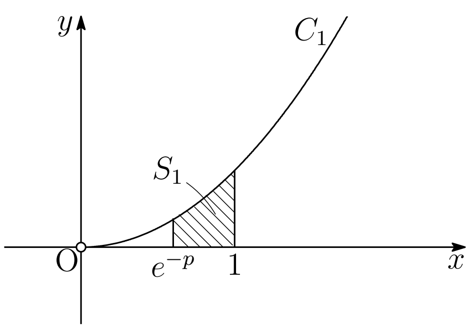
これを $(*)$ の第 1 式に代入すると　$b=p=q$　よって　$\boldsymbol{q=p}$

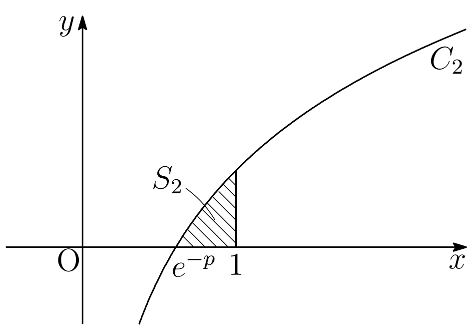
(2) (1) の結果より，$S_1$ は曲線 $y=px^{\frac{1}{p}}$，直線 $x=1$，直線 $x=x^{-p}$ および $x$ 軸で囲まれた図形の面積であるから (左下図)

$$S_1=\int_{e^{-p}}^{1}px^{\frac{1}{p}}\,dx=\frac{p^2}{p+1}\Big[\ x^{1+\frac{1}{p}}\ \Big]_{e^{-p}}^{1}=\boldsymbol{\frac{p^2}{p+1}(1-e^{-p-1})}$$

また，$S_2$ は曲線 $C_2 : y=\log x+p$，直線 $x=1$，$x$ 軸で囲まれた図形の面積であるから (右下図)

$$S_2=\int_{e^{-p}}^{1}(\log x+p)\,dx=\Big[\ x(\log x-1)+px\ \Big]_{e^{-p}}^{1}$$
$$=\boldsymbol{p-1+e^{-p}}$$



(3) (2) の結果から，$3 > e$ に注意して，$0 \leqq p < 1$ のとき

$$\begin{aligned}4S_2 - 3S_1 &= 4(p-1+e^{-p}) - \frac{3p^2}{p+1}(1-e^{-p-1}) \\ &= \frac{p^2-4}{p+1} + \left\{4 + \frac{3p^2}{(p+1)e}\right\}e^{-p} \\ &> \frac{p^2-4}{p+1} + \left\{4 + \frac{p^2}{p+1}\right\}e^{-p} \\ &= \frac{p+2}{p+1}\{p-2+(p+2)e^{-p}\}\end{aligned}$$

ここで，$h(p) = p - 2 + (p+2)e^{-p}$ とおくと　$h(0) = 0$　$\cdots$①

$$h'(p) = 1 - (p+1)e^{-p}, \quad h''(p) = pe^{-p}$$

$h'(0) = 0$ および $p > 0$ において $h''(p) > 0$ であるから

$$0 < p < 1 \text{ において}\quad h'(p) > 0 \quad \cdots ②$$

①，② より，$0 < p < 1$ において　　$h(p) > 0$

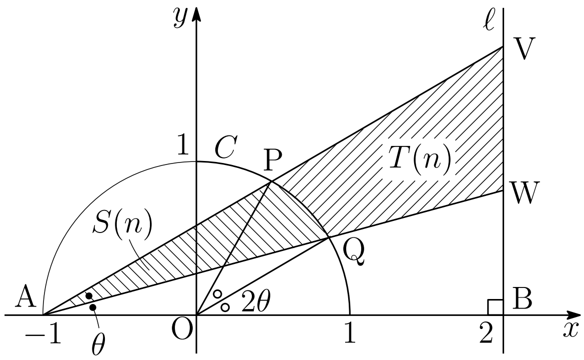
したがって　$4S_2 - 3S_1 > \dfrac{p+2}{p+1}h(p) > 0$　　よって　$\dfrac{S_2}{S_1} \geqq \dfrac{3}{4}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $2\theta = \angle\mathrm{QOB} = \dfrac{\pi}{2n}$ とおくと　$n = \dfrac{\pi}{4\theta}$

$$\begin{aligned} S(n)+T(n) &= \triangle\mathrm{ABV} - \triangle\mathrm{ABW} \\ &= \frac{1}{2}\cdot 3^2\tan 2\theta - \frac{1}{2}\cdot 3^2 \tan\theta \\ &= \frac{9}{2}(\tan 2\theta - \tan\theta) \end{aligned}$$

$n\to\infty$ のとき，$\theta\to 0$ であるから

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} n\{S(n)+T(n)\} &= \lim_{\theta\to 0}\frac{\pi}{4\theta}\cdot\frac{9}{2}(\tan 2\theta - \tan\theta) \\ &= \lim_{\theta\to 0}\frac{9\pi}{8}\left(2\cdot\frac{\tan 2\theta}{2\theta} - \frac{\tan\theta}{\theta}\right) \\ &= \frac{9\pi}{8}(2\cdot 1 - 1) = \boldsymbol{\frac{9\pi}{8}} \end{aligned}$$




(2) $S(n) =$ 扇形 OPQ $+ \triangle\mathrm{OPA} - \triangle\mathrm{OQA}$ より

$$\begin{aligned} S(n) &= \frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot 2\theta + \frac{1}{2}\cdot 1^2\sin(\pi - 4\theta) - \frac{1}{2}\cdot 1^2 \sin(\pi - 2\theta) \\ &= \theta + \frac{1}{2}\sin 4\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta \end{aligned}$$

(1) と同様にして

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} nS(n) &= \lim_{\theta\to 0}\frac{\pi}{4\theta}\left(\theta + \frac{1}{2}\sin 4\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right) \\ &= \lim_{\theta\to 0}\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sin 4\theta}{4\theta} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 2\theta}{2\theta}\right) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

上式および (1) の結果から

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\frac{T(n)}{S(n)} &= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{S(n)+T(n)}{S(n)} - 1\right\} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\{S(n)+T(n)\}}{nS(n)} - 1\right) = \frac{\frac{9\pi}{8}}{\frac{\pi}{2}} - 1 = \boldsymbol{\frac{5}{4}} \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{6}}$ (1) $\omega = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}$ より，$|\omega| = 1$，$\omega^3 = 1$ であるから，
A(1)，B($\omega$)，C($\omega^2$) について

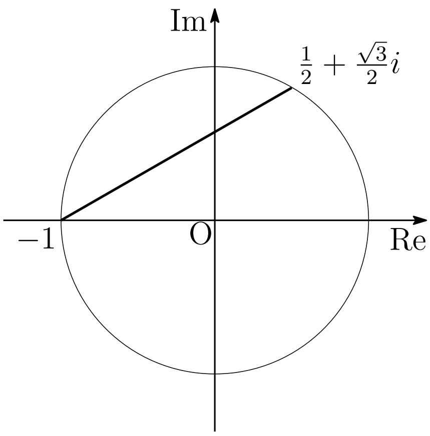
$$\begin{aligned}
&\mathrm{AB} = |\omega - 1|,\\
&\mathrm{BC} = |\omega^2 - \omega| = |\omega||\omega - 1| = |\omega - 1|,\\
&\mathrm{CA} = |1 - \omega^2| = |\omega^3 - \omega^2| = |\omega|^2|\omega - 1| = |\omega - 1|
\end{aligned}$$

AB $=$ BC $=$ CA より，△ABC は正三角形である．

(2) 辺 AC 上の点 $z$ を $z = (1-t)1 + t\omega^2$ とおくと $(0 \leqq t \leqq 1)$

$$-z = (1-t)(-1) + t(-\omega^2) \qquad (0 \leqq t \leqq 1)$$

したがって，点 $-z$ は 2 点 $-1$，$-\omega^2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ の両端を含む線分を描く．




(3) ${z_1}^2 = {z_2}^2$ より　$z_1 = z_2$　または　$z_1 = -z_2$
$z_1 = z_2$ のとき，線分 AB と線分 AC の共有点は　1
$z_1 = -z_2$ のとき，$-z_2$ は (2) の線分上の点で，この線分と線分 AB の共有点は $\dfrac{\sqrt{3}}{3}i$ より

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}i = -z_2$$

よって，$E_1$ と $E_2$ の共有点は　　$\boldsymbol{1, -\dfrac{1}{3}}$