令和２年度　筑波大学　２次試験前期日程 (数学問題)120 分

- 社会学類は $\boxed{1}$ ～ $\boxed{3}$ から 2 題選択 (数 II・B)，及び他教科との選択
- 国際総合・障害科学類は，数 II・B 選択の場合は $\boxed{1}$ ～ $\boxed{3}$ から 2 題選択，数 III 選択の場合は $\boxed{4}$ ～ $\boxed{6}$ から 2 題選択，及び他教科との選択
- 教育・心理学類は $\boxed{1}$ ～ $\boxed{3}$ 必答， $\boxed{4}$ ～ $\boxed{6}$ から 1 題選択
- 生物資源・生物・地球・数学・物理・化学・応用理工・工学システム・情報科学・情報メディア創生学類は $\boxed{1}$ ～ $\boxed{3}$ から 2 題選択， $\boxed{4}$ ～ $\boxed{6}$ 必答
- 知識情報・図書館学類は $\boxed{1}$ ～ $\boxed{6}$ から 2 題選択，及び他教科との選択
- 社会工学類は $\boxed{1}$ ～ $\boxed{3}$ から 1 題選択， $\boxed{4}$ ～ $\boxed{6}$ 必答
- 医学・医療学類は $\boxed{1}$ ～ $\boxed{3}$ 必答， $\boxed{4}$ ～ $\boxed{6}$ から 2 題選択

$\boxed{\mathbf{1}}$ xy 平面上の 3 点 A$(0,\ 1)$，B$(-1,\ 0)$，C$(1,\ 0)$ を頂点とする $\triangle$ABC の内接円を T とする．点 D$(0, -1)$ を通り，傾きが正である直線を $\ell : y = ax - 1$ とする．

(1) 円 T の半径を r とする．r を求めよ．

(2) 直線 ℓ と円 $x^2 + y^2 = 1$ の交点のうち，D と異なる点を E とする．点 E の座標を a を用いて表せ．

(3) 直線 ℓ が円 T に接するとする．このとき，(2) で求めた点 E を通り，x 軸と平行な直線が，円 T に接することを示せ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ xy 平面において，円 $x^2 + y^2 = 1$ の $x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$ を満たす部分を C_1 とする．また，直線 $y = x$ の $x \leqq 0$ を満たす部分を C_2 とする．C_1 上の点 A，C_2 上の点 B および点 P$(-1,\ 0)$ について，$\angle\mathrm{APB} = \dfrac{\pi}{2}$ であるとする．点 A の座標を $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ とする．ただし $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とする．

(1) 点 B の x 座標を θ を用いて表せ．

(2) 線分 AB の中点の x 座標が 0 以上であるような θ の範囲を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ O を原点とする xy 平面上に 2 直線

$$\ell : y = \sqrt{3}x, \quad m : y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x$$

がある．正の整数 n に対して，ℓ 上に点 $\mathrm{P}_n(n,\ \sqrt{3}n)$ をとり，m 上に点 $\mathrm{Q}_n\left(x_n, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}x_n\right)$ をとる．ただし，x_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ は次の条件 (I)，(II) を満たすとする．

(I) $x_1 = 1$ である．

(II) $n \geqq 2$ のとき，x_n は，Q_{n-1} を通り ℓ と平行な直線と，x 軸との交点の x 座標である．

また，正の整数 n に対して，$\triangle \mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$ の面積を a_n とする．

(1) x_n を n を用いて表せ．

(2) a_n を n を用いて表せ．

(3) 正の整数 n に対して，$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ と定める．S_n を n を用いて表せ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 関数 $f(\theta)$，$g(\theta)$ を

$$f(\theta) = \sin\theta - \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad g(\theta) = \sin 2\theta$$

と定める．xy 平面上の曲線 C が，媒介変数 θ を用いて

$$x = f(\theta), \quad y = g(\theta) \quad \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4}\right)$$

で表されている．

(1) 次の定積分 I_1，I_2，I_3 の値を求めよ．

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta \, d\theta, \quad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta\cos 2\theta \, d\theta, \quad I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\theta\cos 2\theta \, d\theta$$

(2) $\dfrac{dy}{dx}$ を θ の関数として表し，曲線 C の概形を xy 平面上に描け．

(3) 曲線 C，x 軸および y 軸で囲まれた図形を，y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = \frac{c}{1+c}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2-a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を満たすとする．ただし，c は正の実数である．

(1) a_2，a_3 を求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ．

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ i は虚数単位とする．複素数 z に対して，その共役複素数を $\overline{z}$ で表す．複素数平面上で，次の等式を満たす点 z の全体が表す図形を C とする．

$$z\overline{z} + (1+3i)z + (1-3i)\overline{z} + 9 = 0$$

以下の問いに答えよ．

(1) 図形 C を複素数平面上に描け．

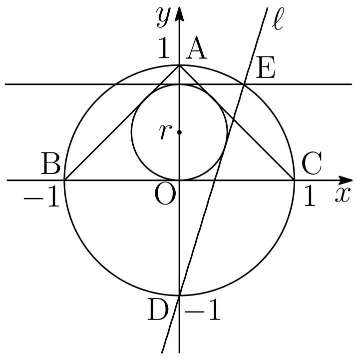
(2) 複素数 w に対して，$\alpha = w + \overline{w} - 1$，$\beta = w + \overline{w} + 1$ とする．w，α，β が表す複素数平面上の点をそれぞれ P，A，B とする．点 P は C 上を動くとする．$\triangle$PAB の面積が最大となる複素数 w，およびそのときの $\triangle$PAB の外接円の中心と半径を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\dfrac{1}{2}(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA})r = \triangle\mathrm{ABC}$ より

$$\frac{1}{2}(\sqrt{2}+2+\sqrt{2})r = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1$$
$$(\sqrt{2}+1)r = 1$$

よって　$r = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \boldsymbol{\sqrt{2}-1}$



(2) 直線 $l : y = ax-1$ と円 $x^2+y^2=1$ の方程式から y を消去すると

$$x^2+(ax-1)^2 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad x\{(a^2+1)x-2a\} = 0$$

点Eの x 座標は，$x \neq 0$ であるから　$x = \dfrac{2a}{a^2+1}$

これを直線 ℓ の方程式に代入すると

$$y = a\cdot\frac{2a}{a^2+1} - 1 = \frac{a^2-1}{a^2+1} \quad \text{よって} \quad \mathbf{E}\left(\boldsymbol{\frac{2a}{a^2+1},\ \frac{a^2-1}{a^2+1}}\right)$$

(3) 円 T の中心 $(0,\ r)$ と直線 $\ell : ax-y-1=0$ の距離が r であるから

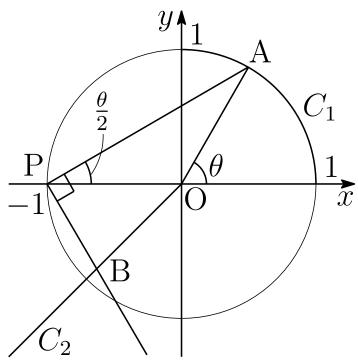
$$r = \frac{|-r-1|}{\sqrt{a^2+1}} \quad \text{ゆえに} \quad a^2 = \frac{1+2r}{r^2}$$

(1) の結果から　$r+1 = \sqrt{2}$　ゆえに　$r^2 = 1-2r$

したがって　$a^2 = \dfrac{1+2r}{1-2r}$　ゆえに　$\dfrac{a^2-1}{a^2+1} = \dfrac{4r}{1-2r} \div \dfrac{2}{1-2r} = 2r$

点Eの y 座標が $2r$ より，点Eを通り，x 軸と平行な直線は，円 T に接する．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 直線 PB の偏角は $\dfrac{\theta}{2}-\dfrac{\pi}{2}$ であるから，



$\theta \neq 0$ のとき，直線 PB の傾きは

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}$$

したがって，直線 PB の方程式は

$$y=-\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}(x+1)$$

$C_2 : y=x\ (x \leqq 0)$ と上の方程式から y を消去すると

$$x=-\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}(x+1) \quad \text{ゆえに} \quad x=-\frac{1}{1+\tan\frac{\theta}{2}}$$

これは，$\theta=0$ のときも成立するから　$\boldsymbol{x=-\dfrac{1}{1+\tan\frac{\theta}{2}}}$

補足 $x=-\dfrac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}}$ であるから，次のように表すこともできる．

$$x=-\frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)}=-\frac{1+\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}$$

(2) $t=\tan\frac{\theta}{2}\ (0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2})$ とおくと　$0 \leqq t \leqq 1 \quad \cdots①$

$$\mathrm{A}\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \frac{2t}{1+t^2}\right),\quad \mathrm{B}\left(-\frac{1}{1+t}, -\frac{1}{1+t}\right)$$

このとき，AB の中点の x 座標が 0 以上であるから

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}-\frac{1}{1+t}\right) \geqq 0$$

① に注意して，上式を整理すると

$$(1+t)(1-t^2)-(1+t^2) \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad t(t^2+2t-1) \leqq 0$$

したがって　$t(t+1+\sqrt{2})(t+1-\sqrt{2}) \leqq 0$　①に注意して　$0 \leqq t \leqq \sqrt{2}-1$

すなわち　$0 \leqq \tan\dfrac{\theta}{2} \leqq \tan\dfrac{\pi}{8}$　よって　$\boldsymbol{0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 点 $\mathrm{Q}_{n-1}\left(x_{n-1}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}x_{n-1}\right)$ を通り ℓ と平行な直線の方程式は

$$y=\sqrt{3}\,(x-x_{n-1})-\frac{1}{\sqrt{3}}x_{n-1}$$

この直線と x 軸との交点の x 座標が x_n であるから

$$\sqrt{3}\,(x_n-x_{n-1})-\frac{1}{\sqrt{3}}x_{n-1}=0 \quad \text{ゆえに} \quad x_n=\frac{4}{3}x_{n-1}$$

数列 $\{x_n\}$ は初項 1，公比 $\dfrac{4}{3}$ の等比数列であるから　$\boldsymbol{x_n=\left(\dfrac{4}{3}\right)^{n-1}}$

(2) 3 点 O，$\mathrm{P}_n(n,\ \sqrt{3}n)$，$\mathrm{Q}_n\left(x_n, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}x_n\right)$ を頂点とする三角形の面積 a_n は

$$a_n=\frac{1}{2}\left|n\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}x_n\right)-\sqrt{3}n\cdot x_n\right|=\frac{2n}{\sqrt{3}}x_n=\boldsymbol{\frac{2n}{\sqrt{3}}\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}}$$

(3) まず，$p=\dfrac{4}{3}$，$T_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}kp^{k-1}$ とすると

$$\begin{aligned}T_n&=\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)p^k=p\sum_{k=1}^{n-1}kp^{k-1}+\sum_{k=0}^{n-1}p^k\\&=p(T_n-np^{n-1})+\frac{p^n-1}{p-1}\end{aligned}$$

したがって　$(1-p)T_n=-np^n+\dfrac{p^n}{p-1}-\dfrac{1}{p-1}$

$$\begin{aligned}T_n&=\left\{\frac{n}{p-1}-\frac{1}{(p-1)^2}\right\}p^n+\frac{1}{(p-1)^2}\\&=(3n-9)\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}+9\end{aligned}$$

$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{2}{\sqrt{3}}\sum_{k=1}^{n}kp^{k-1}=\frac{2}{\sqrt{3}}T_n$ であるから

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{2}{\sqrt{3}}\left\{(3n-9)\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}+9\right\}\\&=\boldsymbol{2\sqrt{3}(n-3)\left(\frac{4}{3}\right)^{n}+6\sqrt{3}}\end{aligned}$$

補足 $x \neq 1$ とし，$f(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k$ とすると　$(x-1)f(x) = x^{n+1} - x$

上の第 2 式を微分すると

$$f(x) + (x-1)f'(x) = (n+1)x^n - 1$$

したがって　$f'(x) = \dfrac{(n+1)x^n - 1}{x-1} - \dfrac{f(x)}{x-1}$

$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$，$f(x) = \dfrac{x^{n+1} - x}{x-1}$ であるから

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} &= \frac{(n+1)x^n - 1}{x-1} - \frac{x^{n+1} - x}{(x-1)^2} \\
&= \left\{ \frac{n+1}{x-1} - \frac{x}{(x-1)^2} \right\} x^n - \frac{1}{x-1} + \frac{x}{(x-1)^2} \\
&= \left\{ \frac{n}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} \right\} x^n + \frac{1}{(x-1)^2}
\end{aligned}$$

これからも次式が示される．

$$T_n = \left\{ \frac{n}{p-1} - \frac{1}{(p-1)^2} \right\} p^n + \frac{1}{(p-1)^2}$$

以下，$0 < |x| < 1$ について，$n \longrightarrow \infty$ とすると

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{x}{1-x} = -1 + \frac{1}{1-x}$$

これを微分すると

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \\
f''(x) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}
\end{aligned}$$

例えば，上の 2 式から

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} k^2 x^{k-1} &= xf''(x) + f'(x) \\
&= \frac{2x}{(1-x)^3} + \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1+x}{(1-x)^3}
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1)

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta\, d\theta = \left[\ \frac{1}{2}\sin 2\theta\ \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \boldsymbol{\frac{1}{2}},$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta \cos 2\theta\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta(2\cos^2\theta - 1)\, d\theta$$

$$= \left[-\frac{2}{3}\cos^3\theta + \cos\theta\ \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}-1}{3}}$$

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\theta \cos 2\theta\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)\cos 2\theta\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{2}\cos 2\theta - \frac{1}{2}\cos^2 2\theta\right) d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{\frac{1}{2}\cos 2\theta - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(1+\cos 4\theta)\right\} d\theta$$

$$= \left[\ \frac{1}{4}\sin 2\theta - \frac{\theta}{4} - \frac{1}{16}\sin 4\theta\ \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \boldsymbol{\frac{4-\pi}{16}}$$

(2) $x = \sin\theta - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$y = \sin 2\theta$ $\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}\right)$ より

$$\frac{dx}{d\theta} = \cos\theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = 2\cos 2\theta \quad \text{よって} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta}\Big/\frac{dx}{d\theta} = \boldsymbol{\frac{2\cos 2\theta}{\cos\theta}}$$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2(2\cos^2\theta - 1)}{\cos\theta} = 4\cos\theta - \dfrac{2}{\cos\theta}$ であるから

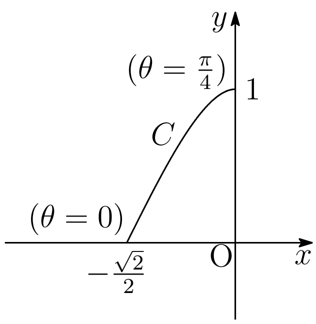
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(4\cos\theta - \frac{2}{\cos\theta}\right)\cdot\frac{d\theta}{dx}$$

$$= \left(-4\sin\theta - \frac{2\sin\theta}{\cos^2\theta}\right)\Big/\frac{dx}{d\theta}$$

$$= \left(-4\sin\theta - \frac{2\sin\theta}{\cos^2\theta}\right)\cdot\frac{1}{\cos\theta} = -2\left(2 + \frac{1}{\cos^2\theta}\right)\tan\theta$$

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ において，$\dfrac{dx}{d\theta} > 0$

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$
x	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	0
$\frac{dy}{dx}$		$+$	
$\frac{d^2y}{dx^2}$		$-$	
y	0	$\nearrow$	1



補足 一般に，曲線 $C:(x,\ y)=(f(\theta),\ g(\theta))$ について

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\theta}\Big/\frac{dx}{d\theta}=\frac{g'(\theta)}{f'(\theta)}\quad \text{ゆえに}\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{d\theta}\left\{\frac{g'(\theta)}{f'(\theta)}\right\}\cdot\frac{d\theta}{dx}$$

逆関数定理により，$\dfrac{d\theta}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{d\theta}}=\dfrac{1}{f'(\theta)}$ であるから

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2}&=\frac{g''(\theta)f'(\theta)-g'(\theta)f''(\theta)}{f'(\theta)^2}\cdot\frac{1}{f'(\theta)}\\&=\frac{g''(\theta)f'(\theta)-g'(\theta)f''(\theta)}{f'(\theta)^3}\end{aligned}$$

(3) 求める立体の体積を V とすると，(1) の結果に注意して

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi}&=\int_0^1 x^2\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2\cdot\frac{dy}{d\theta}\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin\theta-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot 2\cos 2\theta\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2\sin^2\theta-2\sqrt{2}\sin\theta+1)\cos 2\theta\,d\theta\\&=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2\theta\cos 2\theta\,d\theta-2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\cos 2\theta\,d\theta+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\,d\theta\\&=2I_3-2\sqrt{2}I_2+I_1\\&=2\cdot\frac{4-\pi}{16}-2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{3}+\frac{1}{2}\\&=\frac{16\sqrt{2}-3\pi-8}{24}\end{aligned}$$

よって $\quad \boldsymbol{V=\dfrac{\pi(16\sqrt{2}-3\pi-8)}{24}}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $a_1=\dfrac{c}{1+c}$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2-a_n}\ (n=1,2,3\cdots)$ より

$$\begin{aligned}a_2&=\frac{1}{2-a_1}=1\div\left(2-\frac{c}{1+c}\right)=1\div\frac{2+c}{1+c}=\boldsymbol{\frac{1+c}{2+c}}\\a_3&=\frac{1}{2-a_2}=1\div\left(2-\frac{1+c}{2+c}\right)=1\div\frac{3+c}{2+c}=\boldsymbol{\frac{2+c}{3+c}}\end{aligned}$$

(2) (1) の結果から

$$(*)\quad a_n=\frac{n-1+c}{n+c}$$

と推測する．

［1］$n=1$ のとき，$a_1=\dfrac{c}{1+c}$ より，$(*)$ は成立する．

［2］$n=k$ のとき，$(*)$ が成立する．すなわち

$$a_k=\frac{k-1+c}{k+c}$$

であると仮定すると

$$a_{k+1}=\frac{1}{2-a_k}=1\div\left(2-\frac{k-1+c}{k+c}\right)=\frac{k+c}{k+1+c}$$

したがって，$n=k+1$ のときも $(*)$ が成立する．

［1］，［2］より，すべての自然数 n について，$(*)$ が成立する．

よって　$\boldsymbol{a_n=\dfrac{n-1+c}{n+c}}$

別解 漸化式 $a_{n+1}=\dfrac{1}{2-a_n}$ の特性方程式は

$$x=\frac{1}{2-x}\quad ゆえに\quad (x-1)^2=0$$

特性方程式は，重解 1 をもつ．$a_1=\dfrac{c}{1+c}\neq 1$

$$a_{n+1}-1=\frac{1}{2-a_n}-1=\frac{a_n-1}{2-a_n}$$

$n=N$ のとき，$a_N=1$ であると仮定すると，上式より，$a_{N-1}=1$ となる．
これから，$n\leqq N$ について，$a_n=1$ となり，$a_1\neq 1$ に反する．
したがって，すべての自然数 n について，$a_n\neq 1$ であるから

$$\frac{1}{a_{n+1}-1}=\frac{2-a_n}{a_n-1}=\frac{1}{a_n-1}-1$$

数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n-1}\right\}$ は，初項 $\dfrac{1}{a_1-1}=-1-c$，公差 -1 の等差数列であるから

$$\frac{1}{a_n-1}=-1-c-(n-1)=-n-c\quad ゆえに\quad a_n-1=-\frac{1}{n+c}$$

よって　$\boldsymbol{a_n=\dfrac{n-1+c}{n+c}}$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n}-1&=\frac{n+c}{n+1+c}\cdot\frac{n+c}{n-1+c}-1\\&=\frac{(n+c)^2}{(n+c)^2-1}-1=\frac{1}{(n+c)^2-1}\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{(n+c+1)-(n+c-1)}{(n+c+1)(n+c-1)}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1+c}-\frac{1}{n+1+c}\right)\end{aligned}$$

先ず，N を自然数とし

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n-1+c}-\frac{1}{n+1+c}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{1+c}-\frac{1}{N-c}-\frac{1}{N+1-c}\right)\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}&=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)\\&=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{1+c}-\frac{1}{N-c}-\frac{1}{N+1+c}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{1+c}\right)=\boldsymbol{\frac{1+2c}{2c(1+c)}}\end{aligned}$$

補足 p，q，$r\neq 0$，s を定数とする分数漸化式

$$a_{n+1}=\frac{pa_n+q}{ra_n+s}\quad\cdots(*)$$

の一般項について，以下に述べる．

$ps-qr=0$ のとき，右辺は定数となるので，$ps-qr\neq 0$ とする．

$(*)$ の特性方程式

$$x=\frac{px+q}{rx+s}\quad\text{すなわち}\quad rx^2+(s-p)x-q=0\quad\cdots(**)$$

の解を α，β とすると

$$\begin{aligned}a_{n+1}-\alpha&=\frac{pa_n+q}{ra_n+s}-\frac{p\alpha+q}{r\alpha+s}=\frac{(ps-qr)(a_n-\alpha)}{(r\alpha+s)(ra_n+s)}\quad\cdots(***)\\a_{n+1}-\beta&=\frac{(ps-qr)(a_n-\beta)}{(r\beta+s)(ra_n+s)}\end{aligned}$$

(i) $\alpha \neq \beta$ のとき，上の 2 式から

$$\frac{a_{n+1}-\beta}{a_{n+1}-\alpha} = \frac{r\alpha+s}{r\beta+s}\cdot\frac{a_n-\beta}{a_n-\alpha}$$

したがって $$\frac{a_n-\beta}{a_n-\alpha} = \frac{a_1-\beta}{a_1-\alpha}\left(\frac{r\alpha+s}{r\beta+s}\right)^{n-1}$$

上式から，a_n が求まる．

(ii) $\alpha = \beta$ のとき，$(*)$ の係数の係数について

$$(s-p)^2+4rq=0 \quad \text{ゆえに} \quad (p+s)^2=4(ps-qr) \quad \cdots ①$$

また，α は $(**)$ の重解であるから

$$\alpha = \frac{p-s}{2r} \quad \text{ゆえに} \quad r\alpha+s=\frac{1}{2}(p+s) \quad \cdots ②$$

①，② により，$(***)$ は

$$\begin{aligned} a_{n+1}-\alpha &= \frac{(ps-qr)(a_n-\alpha)}{(r\alpha+s)\{r(a_n-\alpha)+r\alpha+s\}} \\ &= \frac{\frac{1}{4}(p+s)^2(a_n-\alpha)}{\frac{1}{2}(p+s)\{r(a_n-\alpha)+\frac{1}{2}(p+s)\}} \end{aligned}$$

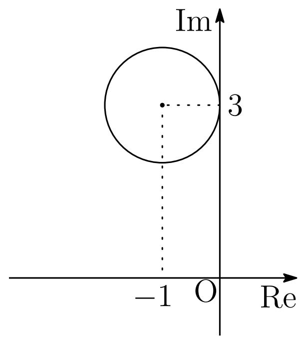
逆数をとると $$\frac{1}{a_{n+1}-\alpha} = \frac{1}{a_n-\alpha}+\frac{2r}{p+s}$$

このとき，数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n-\alpha}\right\}$ は初項が $\dfrac{1}{a_1-\alpha}$，公差が $\dfrac{2r}{p+s}$ の等差数列であるから

$$\frac{1}{a_n-\alpha} = \frac{1}{a_1-\alpha}+\frac{2r}{p+s}(n-1)$$

これから，a_n が求まる．

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $C : z\overline{z}+(1+3i)z+(1-3i)\overline{z}+9=0$ より



$$(z+1-3i)(\overline{z}+1+3i)=1$$
$$|z+1-3i|^2=1$$

したがって　$|z+1-3i|=1$

よって，C は点 $-1+3i$ を中心とする半径 1 の円.

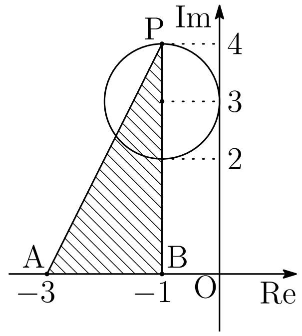
(2) 3 点 P(w)，A(α)，B(β) について，$\alpha=w+\overline{w}-1$，$\beta=w+\overline{w}+1$ より

$$\begin{aligned}(\overline{\alpha-w})(\beta-w)&=(w-1)(\overline{w}+1)\\&=|w|^2-1+w-\overline{w}\\&=|w|^2-1+2\mathrm{Im}(w)i\end{aligned}$$

したがって，△PAB の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}|\mathrm{Im}\{(\overline{\alpha-w})(\beta-w)\}|=\frac{1}{2}|2\mathrm{Im}(w)|=|\mathrm{Im}(w)|$$

(1) の結果より，$2 \leqq \mathrm{Im}(w) \leqq 4$ であるから，$\mathrm{Im}(w)=4$，すなわち，$\boldsymbol{w=-1+4i}$ のとき，S は最大値 4 をとる．このとき



$$w+\overline{w}=-2,\quad \alpha=-3,\quad \beta=-1$$

$\angle\mathrm{PBA}=\dfrac{\pi}{2}$ であるから，△PAB の外接円は，PA を直径の両端とする円である.

よって，△PAB の外接円の中心は

$$\frac{w+\alpha}{2}=\frac{(-1+4i)+(-3)}{2}=\boldsymbol{-2+2i}$$

半径は　$\dfrac{1}{2}|w-\alpha|=\dfrac{1}{2}|(-1+4i)-(-3)|=|1+2i|=\boldsymbol{\sqrt{5}}$

補足 一般に，複素数平面上の 3 点 0, α, β について，$\theta=\angle\alpha 0\beta$ とすると

$$\cos\theta+i\sin\theta=\frac{\beta}{|\beta|}\Big/\frac{\alpha}{|\alpha|}=\frac{|\alpha|}{|\beta|}\cdot\frac{\beta}{\alpha}=\frac{|\alpha|}{|\beta|}\cdot\frac{\overline{\alpha}\beta}{\alpha\overline{\alpha}}=\frac{\overline{\alpha}\beta}{|\alpha||\beta|}$$

$\sin\theta=\dfrac{\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)}{|\alpha||\beta|}$ であるから，3 点 0, α, β を頂点する三角形の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}|\alpha||\beta||\sin\theta|=\boldsymbol{\frac{1}{2}|\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)|=\frac{1}{2}|\mathrm{Im}(\alpha\overline{\beta})|}$$