平成31年度　筑波大学　2次試験前期日程(数学問題)120分

- 社会学類は $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ から1題選択，$\boxed{3}$ 必答(数II・B)，及び他教科との選択
- 国際総合・障害科学類は，数II・B選択の場合は $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ から1題選択，$\boxed{3}$ 必答．数III選択の場合は $\boxed{4}$ 〜 $\boxed{6}$ から2題選択，及び他教科との選択
- 教育・心理学類は $\boxed{1}$ 〜 $\boxed{3}$ 必答，$\boxed{4}$ 〜 $\boxed{6}$ から1題選択
- 生物資源・生物・地球・数学・物理・化学・応用理工・工学システム・情報科学類は $\boxed{1}$ 〜 $\boxed{3}$ から2題選択，$\boxed{4}$ 〜 $\boxed{6}$ 必答
- 情報メディア創生学類は $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ から1題選択，$\boxed{3}$ 〜 $\boxed{6}$ 必答
- 知識情報・図書館学類は $\boxed{2}$ 〜 $\boxed{6}$，または $\boxed{1}$, $\boxed{3}$ 〜 $\boxed{6}$ から2題選択，及び他教科との選択
- 社会工学類は $\boxed{1}$ 〜 $\boxed{3}$ から1題選択，$\boxed{4}$ 〜 $\boxed{6}$ 必答
- 医学・医療学類は $\boxed{1}$ 〜 $\boxed{3}$ 必答，$\boxed{4}$ 〜 $\boxed{6}$ から2題選択

$\boxed{\mathbf{1}}$ $k>0$，$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ とする．放物線 $C: y=x^2-kx$ と直線 $\ell: y=(\tan\theta)x$ の交点のうち，原点Oと異なるものをPとする．放物線 C の点Oにおける接線を ℓ_1 とし，点Pにおける接線を ℓ_2 とする．直線 ℓ_1 の傾きが $-\dfrac{1}{3}$ で，直線 ℓ_2 の傾きが $\tan 2\theta$ であるとき，以下の問いに答えよ．

(1) k を求めよ．

(2) $\tan\theta$ を求めよ．

(3) 直線 ℓ_1 と ℓ_2 の交点をQとする．$\angle\mathrm{PQO}=\alpha$ (ただし $0 \leqq \alpha \leqq \pi$) とするとき，$\tan\alpha$ を求めよ．

2 以下の問いに答え.

(1) $a,\ b,\ c,\ x,\ y,\ z,\ M$ は正の実数とする．$\dfrac{x}{a},\ \dfrac{y}{b},\ \dfrac{z}{c}$ がすべて M 以下のとき，

$$\frac{x+y+z}{a+b+c} \leqq M$$

であることを示せ.

(2) $\log_2 5$ と $\log_3 5$ の大小を比較せよ.

(3) n が正の整数のとき，

$$1 < \frac{1+\log_2 5+(\log_2 5)^n}{1+\log_3 5+(\log_3 5)^n} < 2^n$$

であることを示せ.

3 四面体 OABC について，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}$ および $\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{COA}$ が成り立つとする．$0<s<1$，$0<t<1$ を満たす実数 s，t に対し，辺 OA を $s:1-s$ に内分する点を D とし，辺 OB を $t:1-t$ に内分する点を E とする．$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\overrightarrow{\mathrm{BG}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ となる点 F，G をとり，線分 EF と線分 DG が 1 点で交わるとし，その交点を P とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ とするとき，以下の問いに答えよ.

(1) $t=s$ であることを示し，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $s,\ \vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ を用いて表せ.

(2) $\overrightarrow{\mathrm{EF}}\perp\overrightarrow{\mathrm{DG}}$ であるとき，$\cos\theta$ を s を用いて表せ.

(3) $\overrightarrow{\mathrm{EF}}\perp\overrightarrow{\mathrm{DG}}$ かつ $\sqrt{3}\mathrm{OP}=\mathrm{OA}$ であるとき，s の値を求めよ.

4 $0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲において，関数 $f(x)$，$g(x)$ を

$$f(x)=1+\sin x, \quad g(x)=-1-\cos x$$

と定める.

(1) $0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲において，$|f(x)|=|g(x)|$ を満たす x を求めよ.

(2) 曲線 $y=f(x)$，曲線 $y=g(x)$，直線 $x=0$ および直線 $x=\pi$ で囲まれる部分を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ.

$\boxed{\textbf{5}}$ 数列 $\{a_n\}$ を $a_n = \dfrac{1}{2^n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定める．以下の問いに答えよ．

(1) $t > 0$ のとき，$1 \leqq \dfrac{e^t - 1}{t} \leqq e^t$ であることを示せ．

(2) 数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$ を

$$\begin{cases} x_n = \log(e^{a_n} + 1) \\ y_n = \log(e^{a_n} - 1) \\ z_n = y_n + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k \end{cases} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定める．z_n は n によらない定数であることを示せ．

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \log\left(\frac{e^{a_k} + 1}{2}\right)$ を求めよ．

$\boxed{\textbf{6}}$ $|z|^2 + 3 = 2(z + \overline{z})$ を満たす複素数 z 全体の集合を A とする．ただし $\overline{z}$ は z の共役複素数である．

(1) 集合 A を複素数平面上に図示せよ．

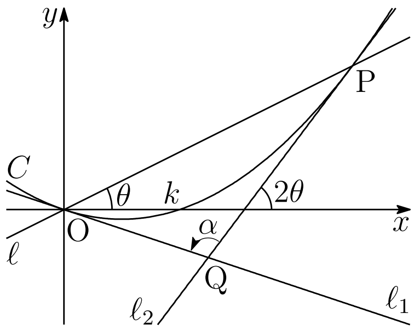
(2) A の要素 z の偏角を θ とする．ただし $-\pi < \theta \leqq \pi$ とする．z が A を動くとき，θ のとりうる値の範囲を求めよ．

(3) z^{60} が正の実数となる A の要素 z の個数を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(x) = x^2 - kx$ とおくと

$$f'(x) = 2x - k$$



$C: y = f(x)$ の原点 O における接線 ℓ_1 の傾きが $-\dfrac{1}{3}$ であるから，$f'(0) = -\dfrac{1}{3}$ より

$$-k = -\frac{1}{3} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{k = \frac{1}{3}}$$

(2) 放物線 $C: y = x^2 - \dfrac{1}{3}x$ と直線 $\ell: y = (\tan\theta)x$ の共有点の x 座標は

$$x^2 - \frac{1}{3}x = (\tan\theta)x \quad \text{ゆえに} \quad x\left(x - \tan\theta - \frac{1}{3}\right) = 0$$

したがって，点 P の x 座標は $(x \neq 0)$ $\qquad x = \tan\theta + \dfrac{1}{3}$

このとき，$f'\left(\tan\theta + \dfrac{1}{3}\right) = \tan 2\theta$ であるから

$$2\left(\tan\theta + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3} = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$$

整理すると $\qquad 6\tan^3\theta + \tan^2\theta - 1 = 0$

$$\left(\tan\theta - \frac{1}{2}\right)(3\tan^2\theta + 2\tan\theta + 1) = 0$$

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ より，$0 < \tan\theta < 1$ に注意して $\qquad \boldsymbol{\tan\theta = \frac{1}{2}}$

(3) ℓ_1 の偏角を β とすると $(0 \leqq \beta < \pi)$ とすると

$$\tan\beta = -\frac{1}{3}$$

$\dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi$，$0 < 2\theta < \dfrac{\pi}{2}$ より，$\alpha = \beta - 2\theta$ であるから

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta} = \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3}$$

よって $\quad \tan\alpha = \tan(\beta - 2\theta) = \dfrac{\tan\beta - \tan 2\theta}{1 + \tan\beta\tan 2\theta} = \dfrac{-\dfrac{1}{3} - \dfrac{4}{3}}{1 + \left(-\dfrac{1}{3}\right)\dfrac{4}{3}} = \boldsymbol{-3}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\dfrac{x}{a},\ \dfrac{y}{b},\ \dfrac{z}{c}$ がすべて M 以下であるから

$$\frac{x}{a} \leqq M, \quad \frac{y}{b} \leqq M, \quad \frac{z}{c} \leqq M$$

$a,\ b,\ c$ はすべて正の実数であるから

$$x \leqq aM, \quad y \leqq bM, \quad z \leqq cM$$

上の 3 辺をそれぞれ加えると，$a+b+c>0$ であるから

$$x+y+z \leqq (a+b+c)M \quad \text{よって} \quad \frac{x+y+z}{a+b+c} \leqq M$$

(2) $\log_3 5 = \dfrac{\log_2 5}{\log_2 3}$ より $\quad \dfrac{\log_2 5}{\log_3 5} = \log_2 3$

$\log_2 3 > 1$ であるから $\quad \dfrac{\log_2 5}{\log_3 5} > 1 \quad$ よって $\quad \boldsymbol{\log_2 5 > \log_3 5}$

(3) $\log_2 5 > \log_3 5$ より

$$\frac{1+\log_2 5+(\log_2 5)^n}{1+\log_3 5+(\log_3 5)^n} > \frac{1+\log_3 5+(\log_3 5)^n}{1+\log_3 5+(\log_3 5)^n} = 1 \qquad (*)$$

(1) の結果において

$$a=1,\ b=\log_3 5,\ c=(\log_3 5)^n,\ x=1,\ y=\log_2 5,\ z=(\log_2 5)^n$$

とおくと

$$\frac{x}{a}=1, \quad \frac{y}{b}=\frac{\log_2 5}{\log_3 5}=\log_2 3, \quad \frac{z}{c}=\frac{(\log_2 5)^n}{(\log_3 5)^n}=(\log_2 3)^n$$

$M=(\log_2 3)^n$ として，(1) の結果に適用できるから

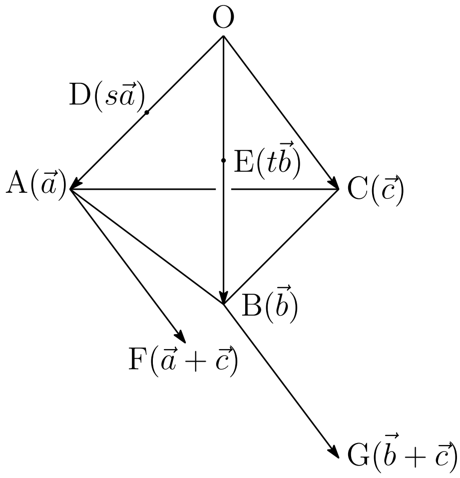
$$\frac{1+\log_2 5+(\log_2 5)^n}{1+\log_3 5+(\log_3 5)^n} < (\log_2 3)^n$$

$(\log_2 3)^n < (\log_2 4)^n = 2^n$ であるから

$$\frac{1+\log_2 5+(\log_2 5)^n}{1+\log_3 5+(\log_3 5)^n} < 2^n \qquad (**)$$

$(*)$，$(**)$ より $\qquad 1 < \dfrac{1+\log_2 5+(\log_2 5)^n}{1+\log_3 5+(\log_3 5)^n} < 2^n$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 3点A，B，Cの位置ベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$および条件により



$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=s\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{OE}}=t\vec{b}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\vec{a}+\vec{c},\quad \overrightarrow{\mathrm{OG}}=\vec{b}+\vec{c}$$

点PはEF上の点であるから $(0<x<1)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=x\overrightarrow{\mathrm{OE}}+(1-x)\overrightarrow{\mathrm{OF}}\\&=xt\vec{b}+(1-x)(\vec{a}+\vec{c})\\&=(1-x)\vec{a}+xt\vec{b}+(1-x)\vec{c}\end{aligned}$$

また，PはDG上の点であるから $(0<y<1)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=y\overrightarrow{\mathrm{OD}}+(1-y)\overrightarrow{\mathrm{OG}}=ys\vec{a}+(1-y)(\vec{b}+\vec{c})\\&=ys\vec{a}+(1-y)\vec{b}+(1-y)\vec{c}\end{aligned}$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$は，1次独立であるから，上の2式より

$$\begin{cases}1-x=ys & \cdots ① \\ xt=1-y & \cdots ② \\ 1-x=1-y & \cdots ③\end{cases}$$

③より　$y=x$　これを①，②に代入すると，$x\neq 0$に注意して

$$1-x=xs,\quad xt=1-x \quad \text{ゆえに}\quad t=s$$

したがって　$x=y=\dfrac{1}{1+s}$　よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{s}{1+s}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})}$

(2) $s=t$であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{EF}}=\overrightarrow{\mathrm{OF}}-\overrightarrow{\mathrm{OE}}=(\vec{a}+\vec{c})-s\vec{b}=\vec{a}-s\vec{b}+\vec{c}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{DG}}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(\vec{b}+\vec{c})-s\vec{a}=-s\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$$

$\overrightarrow{\mathrm{EF}}\perp\overrightarrow{\mathrm{DG}}$より，$\overrightarrow{\mathrm{EF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DG}}=0$であるから　$(\vec{a}-s\vec{b}+\vec{c})\cdot(-s\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=0$

$$-s|\vec{a}|^2-s|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+(1+s^2)\vec{a}\cdot\vec{b}+(1-s)\vec{b}\cdot\vec{c}+(1-s)\vec{c}\cdot\vec{a}=0$$

$(*)$　$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|$，$\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}||\vec{c}|}=\dfrac{\vec{c}\cdot\vec{a}}{|\vec{c}||\vec{a}|}=\cos\theta$であるから

$$-s-s+1+\{(1+s^2)+(1-s)+(1-s)\}\cos\theta=0$$

よって　$\boldsymbol{\cos\theta=\dfrac{2s-1}{s^2-2s+3}}$

(3) (∗) および (2) の結果から

$$\begin{aligned}|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2 &= |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2(|\vec{a}||\vec{b}|+|\vec{b}||\vec{c}+|\vec{c}||\vec{a}|)\cos\theta \\ &= 3|\vec{a}|^2(1+2\cos\theta) \\ &= 3|\vec{a}|^2\left\{1+\frac{2(2s-1)}{s^2-2s+3}\right\} = \frac{3(s+1)^2|\vec{a}|^2}{s^2-2s+3}\end{aligned}$$

(1) の結果から

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 = \frac{s^2}{(s+1)^2}|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2 = \frac{3s^2|\vec{a}|^2}{s^2-2s+3}$$

したがって　$\dfrac{\mathrm{OP}^2}{\mathrm{OA}^2} = \dfrac{3s^2}{s^2-2s+3}$

$\sqrt{3}\mathrm{OP} = \mathrm{OA}$ より，$\dfrac{\mathrm{OP}^2}{\mathrm{OA}^2} = \dfrac{1}{3}$ であるから

$$\frac{3s^2}{s^2-2s+3} = \frac{1}{3} \quad \text{整理すると} \quad 8s^2+2s-3=0$$

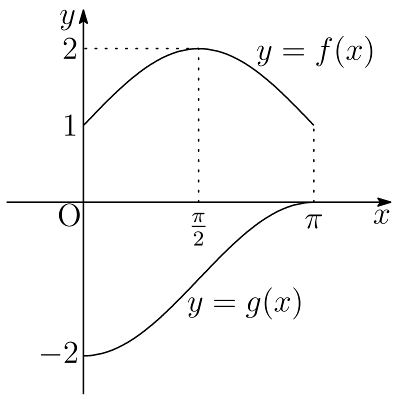
したがって　$(2s-1)(4s+3)=0$　$0<s<1$ に注意して　$\boldsymbol{s = \dfrac{1}{2}}$

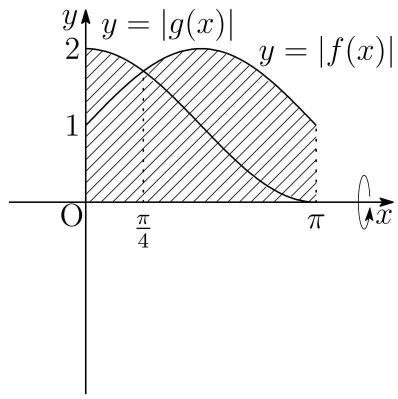
$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $f(x)=1+\sin x$，$g(x)=-1-\cos x$ より

$$\begin{aligned}|f(x)|^2-|g(x)|^2&=(1+\sin x)^2-(1+\cos x)^2\\&=(2+\sin x+\cos x)(\sin x-\cos x)\\&=2\left\{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\right\}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \qquad (*)\end{aligned}$$

$0\leqq x\leqq\pi$ において，$|f(x)|=|g(x)|$ を満たす x は　　$\boldsymbol{x=\dfrac{\pi}{4}}$

(2) 2 曲線 $y=f(x)$, $y=g(x)$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ は，左下のとおりである．





$(*)$ より　　$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}$ のとき　$|f(x)|\leqq|g(x)|$,

$\dfrac{\pi}{4}\leqq x\leqq\pi$ のとき　$|f(x)|\geqq|g(x)|$

したがって，求める立体は，右上の図の斜線部分を x 軸の周りに 1 回転させたもので，その体積を V とすると

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi}&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}|g(x)|^2\,dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}|f(x)|^2\,dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos x)^2\,dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}(1+\sin x)^2\,dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1+2\cos x+\frac{1+\cos 2x}{2}\right)dx\\&\qquad+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\left(1+2\sin x+\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx\\&=\left[\frac{3}{2}x+2\sin x+\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}+\left[\frac{3}{2}x-2\cos x-\frac{1}{4}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\\&=\frac{3}{2}\pi+\frac{5}{2}+2\sqrt{2}\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{V=\dfrac{(3\pi+5+4\sqrt{2})\pi}{2}}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $f(x) = e^x$ とおくと，$f(x)$ は微分可能で

$$\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = f'(c), \quad 0 < c < t$$

を満たす c が存在する．$f'(x) = e^x$ より，$f'(0) < f'(c) < f'(t)$，すなわち，$1 < f'(c) < e^t$ であるから

$$1 < \frac{e^t - 1}{t} < e^t \quad よって \quad 1 \leqq \frac{e^t - 1}{t} \leqq e^t$$

(2) $a_n = \dfrac{1}{2^n}$ より，$a_n = 2a_{n+1}$ であるから

$$\begin{aligned} y_n &= \log(e^{a_n} - 1) = \log(e^{2a_{n+1}} - 1) \\ &= \log(e^{a_{n+1}} + 1) + \log(e^{a_{n+1}} - 1) = x_{n+1} + y_{n+1} \end{aligned}$$

これを $z_n = y_n + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$ に代入すると

$$z_n = (x_{n+1} + y_{n+1}) + \sum_{k=1}^{n} x_k = y_{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} x_k = z_{n+1}$$

よって　$z_n = z_1 = y_1 + x_1 = \log(\sqrt{e} - 1) + \log(\sqrt{e} + 1) = \log(e - 1)$

したがって，z_n は n によらない定数である．

(3) $y_n + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = z_n$ より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = z_n - \log(e^{a_n} - 1)$ であるから

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \log\left(\frac{e^{a_k} + 1}{2}\right) &= \sum_{k=1}^{n}(x_k - \log 2) = \sum_{k=1}^{n} x_k + \log a_n \\ &= z_n - \log(e^{a_n} - 1) + \log a_n \\ &= \log(e - 1) - \log\frac{e^{a_n} - 1}{a_n} \qquad (*) \end{aligned}$$

(1) の結果から　$1 \leqq \dfrac{e^{a_n} - 1}{a_n} \leqq e^{a_n}$

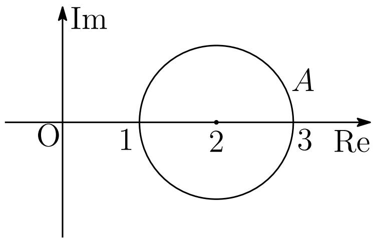
$\displaystyle\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ から，はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{e^{a_n} - 1}{a_n} = 1$

$(*)$ より

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \log\left(\frac{e^{a_k} + 1}{2}\right) &= \lim_{n \to \infty}\left\{\log(e - 1) - \log\frac{e^{a_n} - 1}{a_n}\right\} \\ &= \log(e - 1) - \log 1 = \boldsymbol{\log(e - 1)} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $|z|^2+3=2(z+\overline{z})$ より　$(z-2)(\overline{z}-2)=1$

$$|z-2|^2=1 \quad \text{ゆえに} \quad |z-2|=1$$



集合 A の表す図形は

点 2 を中心とする半径 1 の円

(2) 原点 O から円 A に引いた接線の偏角は　$\pm\dfrac{\pi}{6}$

よって，θ のとりうる値の範囲は　$\boldsymbol{-\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{6}}$

(3) $\arg z^{60}=60\arg z=2n\pi$ であるから (n は整数)

$$(*) \quad \arg z=\frac{n\pi}{30}$$

(2) の結果から　$-\dfrac{\pi}{6} \leqq \dfrac{n\pi}{30} \leqq \dfrac{\pi}{6}$　ゆえに　$-5 \leqq n \leqq 5$

$n=\pm 5$ のとき，$(*)$ を満たす z はただ 1 つ存在する．

$-4 \leqq n \leqq 4$ のとき，$(*)$ を満たす z は 2 つ存在する．

よって，求める個数は

$$1\times 2+2\times 9=\mathbf{20} \ \ (\text{個})$$