平成30年度　筑波大学　２次試験前期日程 (数学問題)120分

- 社会学類は $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ から1題選択，$\boxed{3}$ 必答 (数 II・B)，及び他教科との選択
- 国際総合・障害科学類は，数 II・B 選択の場合は $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ から1題選択，$\boxed{3}$ 必答．数 III 選択の場合は $\boxed{4}$ 〜 $\boxed{6}$ から2題選択，及び他教科との選択
- 教育・心理学類は $\boxed{1}$ 〜 $\boxed{3}$ 必答，$\boxed{4}$ 〜 $\boxed{6}$ から1題選択
- 生物資源・生物・地球・数学・物理・化学・応用理工・工学システム・情報科学類は $\boxed{1}$ 〜 $\boxed{3}$ から2題選択，$\boxed{4}$ 〜 $\boxed{6}$ 必答
- 情報メディア創生学類は $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ から1題選択，$\boxed{3}$ 〜 $\boxed{6}$ 必答
- 知識情報・図書館学類は $\boxed{2}$ 〜 $\boxed{6}$ ，または $\boxed{1}$, $\boxed{3}$ 〜 $\boxed{6}$ から2題選択，及び他教科との選択
- 社会工学類は $\boxed{1}$ 〜 $\boxed{3}$ から1題選択，$\boxed{4}$ 〜 $\boxed{6}$ 必答
- 医学・医療学類は $\boxed{1}$ 〜 $\boxed{3}$ 必答，$\boxed{4}$ 〜 $\boxed{6}$ から2題選択

$\boxed{\mathbf{1}}$ $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする．放物線 $y = x^2$ 上に3点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(\tan\theta,\ \tan^2\theta)$，$\mathrm{B}(-\tan\theta,\ \tan^2\theta)$ をとる．三角形 OAB の内心の y 座標を p とし，外心の y 座標を q とする．また，正の実数 a に対して，直線 $y = a$ と放物線 $y = x^2$ で囲まれた図形の面積を $S(a)$ で表す．

(1) p，q を $\cos\theta$ を用いて表せ．

(2) $\dfrac{S(p)}{S(q)}$ が整数であるような $\cos\theta$ の値をすべて求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 放物線 $C : y = x^2 + ax + b$ が2直線 $\ell_1 : y = px\ (p > 0)$，$\ell_2 : y = qx\ (q < 0)$ と接している．また，C と ℓ_1，ℓ_2 で囲まれた図形の面積を S とする．

(1) a，b を p，q を用いてそれぞれ表せ．

(2) S を p，q を用いて表せ．

(3) ℓ_1，ℓ_2 が直交するように p，q が動くとき，S の最小値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 正三角形OABに対し，直線OA上の点P_1，P_2，$\mathrm{P}_3, \cdots$ および直線OB上の点Q_1，Q_2，$\mathrm{Q}_3, \cdots$ を，次の (I)，(II)，(III) を満たすようにとる．

(I) $\mathrm{P}_1 = \mathrm{A}$ である．

(II) 線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1$，$\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2$，$\mathrm{P}_3\mathrm{Q}_3, \cdots$ はすべて直線OAに垂直である．

(III) 線分 $\mathrm{Q}_1\mathrm{P}_2$，$\mathrm{Q}_2\mathrm{P}_3$，$\mathrm{Q}_3\mathrm{P}_4, \cdots$ はすべて直線OBに垂直である．

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とおく．点Oを基準とする位置ベクトルが，整数 k，ℓ によって $k\vec{a} + \ell\vec{b}$ と表される点全体の集合を S とする．n を自然数とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OR}} = x\vec{a} + y\vec{b}$ で定まる点Rが線分 $\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$ 上にあるとき，x を y を用いて表せ．また，線分 $\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$ 上にあるSの点の個数を求めよ．

(3) 三角形 $\mathrm{OP}_{n+1}\mathrm{Q}_n$ の周または内部にあるSの点の個数を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 2つの曲線

$$C_1 : y = \frac{1}{\sqrt{2}\sin x} \quad (0 < x < \pi)$$
$$C_2 : y = \sqrt{2}(\sin x - \cos x) \quad (0 < x < \pi)$$

について以下の問いに答えよ．

(1) 曲線 C_1 と曲線 C_2 の共有点の x 座標を求めよ．

(2) 曲線 C_1 と曲線 C_2 とで囲まれた図形を x 軸のまわりに1回転させてできる回転体の体積 V が π^2 であることを示せ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{4\pi}{t^2 + \pi^2}\,dt$ とし，$c \geqq \pi$ とする．数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = c$，$a_{n+1} = f(a_n)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ で定める．

(1) $f(\pi)$ を求めよ．また，$x \geqq \pi$ のとき，$0 < f'(x) < \dfrac{2}{\pi}$ が成り立つことを示せ．

(2) すべての自然数 n に対して，$a_n \geqq \pi$ が成り立つことを示せ．

(3) すべての自然数 n に対して，$|a_{n+1} - \pi| \leqq \dfrac{2}{\pi}|a_n - \pi|$ が成り立つことを示せ．また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ 複素数 α に対して，複素数平面上の 3 点 O(0)，A(α)，B(α^2) を考える．次の条件 (I)，(II)，(III) をすべて満たす複素数 α 全体の集合を S とする．

(I) α は実数でも純虚数でもない．

(II) $|\alpha| > 1$ である．

(III) 三角形 OAB は直角三角形である．

このとき，以下の問いに答えよ．

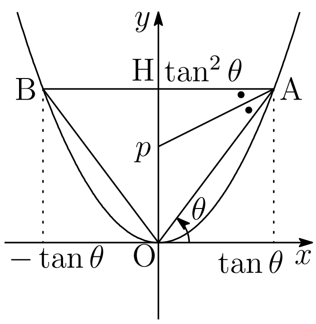
(1) α が S に属するとき，$\angle \mathrm{OAB} = \dfrac{\pi}{2}$ であることを示せ．

(2) 集合 S を複素数平面に図示せよ．

(3) $x,\ y$ を $\alpha^2 = x + yi$ を満たす実数とする．α が S を動くとき，xy 平面上の点 $(x,\ y)$ の軌跡を求め，図示せよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) AB と y 軸との交点を H とすると



$$\mathrm{OA} : \mathrm{AH} = 1 : \cos\theta$$

H の y 座標が $\tan^2\theta$ であるから

$$\begin{aligned} p &= \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OA}+\mathrm{AH}}\tan^2\theta \\ &= \frac{1}{1+\cos\theta}\cdot\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \boldsymbol{\frac{1-\cos\theta}{\cos^2\theta}} \end{aligned}$$

$\mathrm{AB} = 2\tan\theta$，$\angle\mathrm{AOB} = \pi - 2\theta$ より，$\triangle\mathrm{OAB}$ に正弦定理を適用すると

$$q = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\tan\theta}{\sin(\pi-2\theta)} = \frac{\tan\theta}{\sin 2\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{2\sin\theta\cos\theta} = \boldsymbol{\frac{1}{2\cos^2\theta}}$$

(2) $S(a) = \displaystyle\int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}}(a-x^2)\,dx = \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}}(\sqrt{a}+x)(\sqrt{a}-x)\,dx = \frac{1}{6}(2\sqrt{a}\,)^3 = \frac{4}{3}a^{\frac{3}{2}}$

(1) の結果を利用から

$$\frac{S(p)}{S(q)} = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{3}{2}} = \{2(1-\cos\theta)\}^{\frac{3}{2}}$$

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ より，$0 < 2(1-\cos\theta) < 2$ であるから

$$0 < \{2(1-\cos\theta)\}^{\frac{3}{2}} < 2\sqrt{2} < 3$$

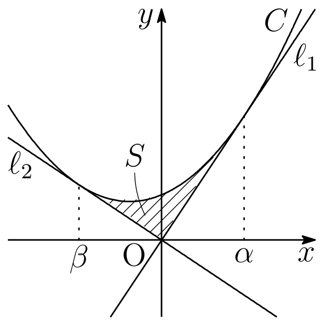
したがって，$\dfrac{S(p)}{S(q)}$ が整数であるとき，$\dfrac{S(p)}{S(q)} = 1,\ 2$

$\dfrac{S(p)}{S(q)} = 1$ のとき　$\{2(1-\cos\theta)\}^{\frac{3}{2}} = 1$　ゆえに　$\cos\theta = \dfrac{1}{2}$

$\dfrac{S(p)}{S(q)} = 2$ のとき　$\{2(1-\cos\theta)\}^{\frac{3}{2}} = 2$　ゆえに　$\cos\theta = 1 - \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

よって　　$\boldsymbol{\cos\theta = \dfrac{1}{2},\ 1 - \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $C : y = x^2 + ax + b$，$\ell_1 : y = px\ (p > 0)$，
$\ell_2 : y = qx\ (q < 0)$ について，C と ℓ_1，
C と ℓ_2 から，y を消去して整理すると



$$x^2 + (a-p)x + b = 0$$
$$x^2 + (a-q)x + b = 0$$

これらの 2 次方程式は，ともに重解をもつから，係数について

$$(a-p)^2 - 4b = 0 \quad \cdots ①$$
$$(a-q)^2 - 4b = 0 \quad \cdots ②$$

① − ② より　　$(2a - p - q)(-p + q) = 0$

$p \neq q$ より　$\boldsymbol{a = \dfrac{p+q}{2}}$　これを ① に代入して　$\boldsymbol{b = \dfrac{(p-q)^2}{16}}$

(2) C と ℓ_1 の接点の x 座標を α，C と ℓ_2 の接点の x 座標を β とすると，これらは (1) で求めた 2 次方程式の重解であるから [1]

$$\alpha = -\frac{a-p}{2} = \frac{p-q}{4}, \quad \beta = -\frac{a-q}{2} = -\frac{p-q}{4}$$

上式および (1) の方程式から

$$x^2 + ax + b - px = (x-\alpha)^2, \quad x^2 + ax + b - qx = (x-\beta)^2$$

よって　$S = \displaystyle\int_\beta^0 (x-\beta)^2\,dx + \int_0^\alpha (x-\alpha)^2\,dx$

$$= \left[\frac{1}{3}(x-\beta)^3\right]_\beta^0 + \left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\right]_0^\alpha = \frac{\alpha^3 - \beta^3}{3} = \boldsymbol{\frac{(p-q)^3}{96}}$$

(3) ℓ_1 と ℓ_2 は直交するから　$pq = -1$　ゆえに　$q = -\dfrac{1}{p}$

$p > 0$ より，相加平均・相乗平均の大小関係により

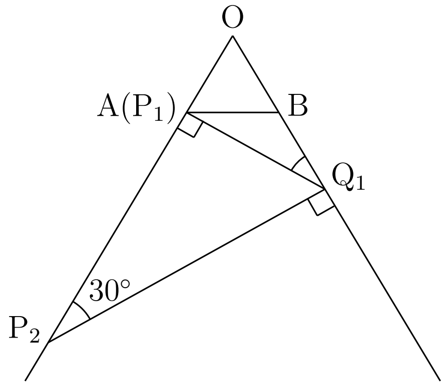
$$p - q = p + \frac{1}{p} \geqq 2\sqrt{p \cdot \frac{1}{p}} = 2 \quad \cdots (*)$$

上式おいて，等号が成立するとき　$p = \dfrac{1}{p}$　すなわち　$p = 1$

(2) の結果および $(*)$ より　$S \geqq \dfrac{2^3}{96} = \dfrac{1}{12}$　よって，S の最小値は　$\boldsymbol{\dfrac{1}{12}}$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_bun_2009.pdf $\boxed{4}$ を参照

$\boxed{\textbf{3}}$ (1) $\mathrm{OQ_1 = 2OP_1}$, $\mathrm{OP_2 = 2OQ_1}$,
$\mathrm{OQ_2 = 2OP_2}$, $\mathrm{OP_3 = 2OQ_2}$,
$\cdots$
ゆえに
$\mathrm{OP_2 = 4OP_1}$, $\mathrm{OQ_2 = 4OQ_1}$,
$\mathrm{OP_3 = 4OP_2}$, $\mathrm{OQ_3 = 4OQ_2}$,
$\cdots$
したがって
$\mathrm{OP}_n = 4^{n-1}\mathrm{OP_1}$, $\mathrm{OQ}_n = 4^{n-1}\mathrm{OQ_1}$



$\overrightarrow{\mathrm{OP_1}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 2\vec{b}$ であるから

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}_n} = 4^{n-1}\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}_n} = 2{\cdot}4^{n-1}\vec{b}}$$

(2) (1) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+1}} = 4^n\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}_n} = 2{\cdot}4^{n-1}\vec{b}$$

点 R が線分 $\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$ 上にあるから，実数 t を用いて $(0 \leqq t \leqq 1)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}} &= t\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+1}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n}\\ &= t(4^n\vec{a}) + (1-t)(2{\cdot}4^{n-1}\vec{b})\\ &= 4^nt\vec{a} + 2{\cdot}4^{n-1}(1-t)\vec{b}\end{aligned}$$

したがって　$x = 4^nt$, $y = 2{\cdot}4^{n-1}(1-t)$

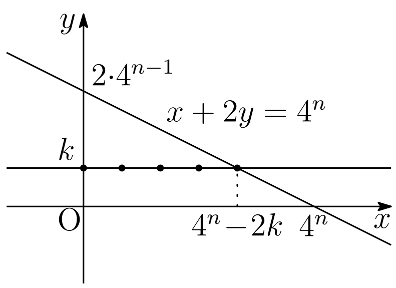
上の第 2 式から　$2y = 4^n - 4^nt$　これと上の第 1 式の辺々を加えると

$$x + 2y = 4^n \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{x = 4^n - 2y}$$

$x = 2(2{\cdot}4^{n-1} - y) \geqq 0$，$y \geqq 0$ であるから，S の点の個数は

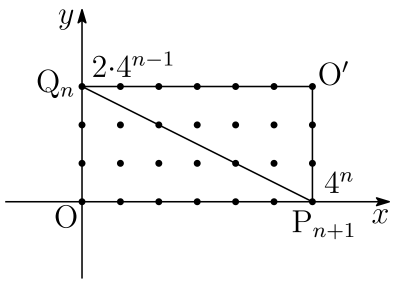
$$\boldsymbol{2{\cdot}4^{n-1} + 1}\ (\text{個})$$

(3) S の点の個数は，右の図から



$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{2\cdot4^{n-1}}(4^n - 2k + 1)\\ =&(4^n+1)(2{\cdot}4^{n-1}+1)\\ &\qquad - 2{\cdot}\frac{2{\cdot}4^{n-1}(2{\cdot}4^{n-1}+1)}{2}\\ =&\boldsymbol{4^{2n-1} + 4^n + 1}\end{aligned}$$

別解 右の図の長方形 $\mathrm{OP}_{n+1}\mathrm{O'Q}_n$ の周または内部の格子点の数は



$$(4^n+1)(2{\cdot}4^{n-1}+1)$$

(2) より，線分 $\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$ 上の格子点の数は

$$2{\cdot}4^{n-1}+1$$

よって，S の点の個数は

$$\frac{(4^n+1)(2{\cdot}4^{n-1}+1)+2{\cdot}4^{n-1}+1}{2}=(2{\cdot}4^{n-1}+1)^2=\boldsymbol{4^{2n-1}+4^n+1}$$

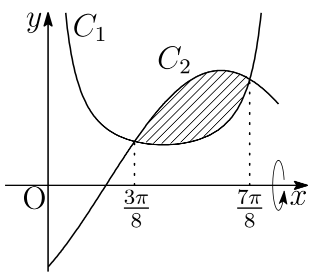
$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $C_1 : y=\dfrac{1}{\sqrt{2}\sin x}$, $C_2 : y=\sqrt{2}(\sin x-\cos x)$ $(0<x<\pi)$ より

$$\begin{aligned}\sqrt{2}(\sin x-\cos x)-\frac{1}{\sqrt{2}\sin x}&=\frac{2\sin x(\sin x-\cos x)-1}{\sqrt{2}\sin x}\\&=-\frac{\sin 2x+\cos 2x}{\sqrt{2}\sin x}=-\frac{\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin x}\end{aligned}\qquad (*)$$

$\dfrac{\pi}{4}<2x+\dfrac{\pi}{4}<2\pi+\dfrac{\pi}{4}$ であるから，C_1，C_2 の共有点の x 座標は

$$2x+\frac{\pi}{4}=\pi,\ 2\pi \quad よって \quad \boldsymbol{x=\frac{3\pi}{8},\ \frac{7\pi}{8}}$$

(2) $\dfrac{3\pi}{8}\leqq x\leqq\dfrac{7\pi}{8}$ のとき



$$\pi\leqq 2x+\frac{\pi}{4}\leqq 2\pi$$

$(*)$ より，この区間において

$$\sqrt{2}(\sin x-\cos x)\geqq\frac{1}{\sqrt{2}\sin x}>0$$

したがって，求める回転体の体積を V とすると

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi}&=\int_{\frac{3\pi}{8}}^{\frac{7\pi}{8}}\left\{2(\sin x-\cos x)^2-\frac{1}{2\sin^2 x}\right\}dx\\&=\int_{\frac{3\pi}{8}}^{\frac{7\pi}{8}}\left\{2-2\sin 2x-\frac{1}{2\sin^2 x}\right\}dx=\left[\ 2x+\cos 2x+\frac{1}{2\tan x}\ \right]_{\frac{3\pi}{8}}^{\frac{7\pi}{8}}\\&=\pi+\sqrt{2}+\frac{1}{2\tan\frac{7\pi}{8}}-\frac{1}{2\tan\frac{3\pi}{8}}=\pi+\sqrt{2}-\frac{1}{2}\tan\frac{3\pi}{8}-\frac{1}{2}\tan\frac{\pi}{8}=\pi\end{aligned}$$

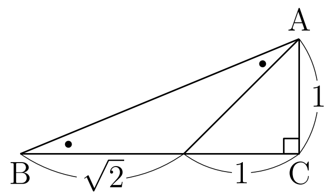
よって　　$\boldsymbol{V=\pi^2}$

補足 (2) の計算について

$$\frac{1}{\tan\frac{7\pi}{8}} = -\frac{1}{\tan\frac{\pi}{8}} = -\tan\frac{3\pi}{8} \qquad \frac{1}{\tan\frac{3\pi}{8}} = \tan\frac{\pi}{8}$$

下の三角形から

$$\tan\frac{\pi}{8} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1, \quad \tan\frac{3\pi}{8} = \sqrt{2}+1$$



同様に　$\tan\dfrac{5\pi}{12} = 2+\sqrt{3}, \qquad \tan\dfrac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}$

さらに　$\tan\dfrac{11\pi}{24} = 2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6} = (\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

$$\tan\frac{\pi}{24} = (\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = -2+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}$$

5 (1) $f(\pi) = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{4\pi}{t^2+\pi^2}\,dt$ において，$t = \pi\tan\theta$ とおくと

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{\pi}{\cos^2\theta}$$

t	$0 \longrightarrow \pi$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{4}$

よって　$f(\pi) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4\pi}{(\pi\tan\theta)+\pi^2}\cdot\frac{\pi}{\cos^2\theta}\,d\theta = 4\Big[\,\theta\,\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \boldsymbol{\pi}$

$f(x) = \displaystyle\int_0^{x} \frac{4\pi}{t^2+\pi^2}\,dt$ を x で微分すると $(x \geqq \pi)$

$$f'(x) = \frac{4\pi}{x^2+\pi^2} \leqq \frac{4\pi}{\pi^2+\pi^2} = \frac{2}{\pi}$$

(2)　すべての自然数 n に対して，$a_n \geqq \pi \quad \cdots(*)$

［1］$a_1 = c \geqq \pi$ より，$n=1$ のとき，$(*)$ は成立する．

［2］$n=k$ のとき，$(*)$ が成立すると仮定すると

$$\begin{aligned} a_{k+1} = f(a_k) &= \int_0^{a_k} \frac{4\pi}{t^2+\pi^2}\,dt = \int_0^{\pi} \frac{4\pi}{t^2+\pi^2}\,dt + \int_\pi^{a_k} \frac{4\pi}{t^2+\pi^2}\,dt \\ &= \pi + \int_\pi^{a_k} \frac{4\pi}{t^2+\pi^2}\,dt \geqq \pi \qquad \cdots(**) \end{aligned}$$

したがって，$n=k+1$ のときも $(*)$ は成立する．

［1］，［2］よりすべての自然数 n について，$(*)$ は成立する．

(3) $(**)$ と同様にして　$a_{n+1} = \pi + \displaystyle\int_\pi^{a_n} \frac{4\pi}{t^2+\pi^2}\,dt$

$$a_{n+1} - \pi = \int_\pi^{a_n} \frac{4\pi}{t^2+\pi^2}\,dt \leqq \int_\pi^{a_n} \frac{4\pi^2}{\pi^2+\pi^2}\,dt = \frac{2}{\pi}(a_n - \pi)$$

(2) の結果に注意して　$0 \leqq a_{n+1} - \pi \leqq \dfrac{2}{\pi}(a_n - \pi)$

したがって，すべての自然数 n に対して　$|a_{n+1} - \pi| \leqq \dfrac{2}{\pi}|a_n - \pi|$

$0 < \dfrac{2}{\pi} < 1$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} |a_n - \pi| \leqq \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-1} |a_1 - \pi| = 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = \pi}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\alpha^2)$ について ($|\alpha| > 1$，α は純虚数ではない)

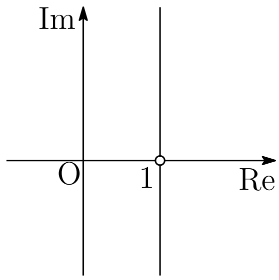
$|\alpha^2| > |\alpha|$ となり，OA は最大辺ではないから，$\angle\mathrm{OBA}$ は直角ではない．

$\angle\mathrm{AOB} = \arg\dfrac{\alpha^2}{\alpha} = \arg\alpha$ より，$\angle\mathrm{AOB}$ は直角ではない．

よって，直角三角形 OAB の直角は　　$\angle\mathrm{OAB}$

(2) $\mathrm{OA} = |\alpha|$，$\mathrm{OB} = |\alpha^2|$，$\mathrm{AB} = |\alpha^2 - \alpha|$

(1) の結果より，$\mathrm{OA}^2 + \mathrm{AB}^2 = \mathrm{OB}^2$ であるから

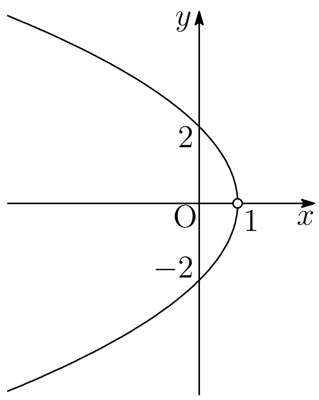


$$
\begin{aligned}
|\alpha|^2 + |\alpha^2 - \alpha|^2 &= |\alpha^2|^2 \\
|\alpha|^2 + |\alpha|^2|\alpha - 1|^2 &= |\alpha|^4 \\
1 + |\alpha - 1|^2 &= |\alpha|^2 \quad (|\alpha| \neq 0)
\end{aligned}
$$

整理すると　$\alpha + \overline{\alpha} = 2$　ゆえに　$\mathrm{Re}(\alpha) = 1$

また，条件から　$\mathrm{Im}(\alpha) \neq 0$　よって，集合 S は右図のとおり．

(3) (2) の結果より $\alpha = 1 + ti$ $(t \neq 0)$ とおくと



$$\alpha^2 = (1 + ti)^2 = 1 - t^2 + 2ti$$

$\alpha^2 = x + yi$ であるから

$$x = 1 - t^2, \quad y = 2t \neq 0$$

上の 2 式から t を消去すると

$$x = 1 - \frac{y^2}{4}, \quad y \neq 0$$

よって，求める軌跡は，右図のとおり．