

平成30年度 筑波大学 2次試験前期日程(数学問題)120分

- 社会学類は [1] [2] から1題選択, [3] 必答(数II・B), 及び他教科との選択
- 国際総合・障害科学類は, 数II・B選択の場合は [1] [2] から1題選択, [3] 必答. 数III選択の場合は [4] [5] [6] から2題選択, 及び他教科との選択
- 教育・心理学類は [1] [2] [3] 必答, [4] [5] [6] から1題選択
- 生物資源・生物・地球・数学・物理・化学・応用理工・工学システム・情報科学類は [1] [2] [3] から2題選択, [4] [5] [6] 必答
- 情報メディア創生学類は [1] [2] から1題選択, [3] [4] [5] [6] 必答
- 知識情報・図書館学類は [2] [3] [4] [5] [6], または [1] [3] [4] [5] [6] から2題選択, 及び他教科との選択
- 社会工学類は [1] [2] [3] から1題選択, [4] [5] [6] 必答
- 医学・医療学類は [1] [2] [3] 必答, [4] [5] [6] から2題選択

[1] $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする. 放物線 $y = x^2$ 上に3点 $O(0, 0)$, $A(\tan \theta, \tan^2 \theta)$, $B(-\tan \theta, \tan^2 \theta)$ をとる. 三角形 OAB の内心の y 座標を p とし, 外心の y 座標を q とする. また, 正の実数 a に対して, 直線 $y = a$ と放物線 $y = x^2$ で囲まれた図形の面積を $S(a)$ で表す.

(1) p, q を $\cos \theta$ を用いて表せ.

(2) $\frac{S(p)}{S(q)}$ が整数であるような $\cos \theta$ の値をすべて求めよ.

[2] 放物線 $C: y = x^2 + ax + b$ が2直線 $l_1: y = px$ ($p > 0$), $l_2: y = qx$ ($q < 0$) と接している. また, C と l_1, l_2 で囲まれた図形の面積を S とする.

(1) a, b を p, q を用いてそれぞれ表せ.

(2) S を p, q を用いて表せ.

(3) l_1, l_2 が直交するように p, q が動くとき, S の最小値を求めよ.

3 正三角形 OAB に対し、直線 OA 上の点 P_1, P_2, P_3, \dots および直線 OB 上の点 Q_1, Q_2, Q_3, \dots を、次の (I), (II), (III) を満たすようにとる。

- (I) $P_1 = A$ である。
- (II) 線分 $P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3, \dots$ はすべて直線 OA に垂直である。
- (III) 線分 $Q_1P_2, Q_2P_3, Q_3P_4, \dots$ はすべて直線 OB に垂直である。

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とおく。点 O を基準とする位置ベクトルが、整数 k, l によって $k\vec{a} + l\vec{b}$ と表される点全体の集合を S とする。 n を自然数とすると、以下の問いに答えよ。

- (1) $\overrightarrow{OP_n}$ と $\overrightarrow{OQ_n}$ を \vec{a}, \vec{b} を用いて表せ。
- (2) $\overrightarrow{OR} = x\vec{a} + y\vec{b}$ で定まる点 R が線分 Q_nP_{n+1} 上にあるとき、 x を y を用いて表せ。また、線分 Q_nP_{n+1} 上にある S の点の個数を求めよ。
- (3) 三角形 $OP_{n+1}Q_n$ の周または内部にある S の点の個数を求めよ。

4 2つの曲線

$$C_1 : y = \frac{1}{\sqrt{2} \sin x} \quad (0 < x < \pi)$$

$$C_2 : y = \sqrt{2}(\sin x - \cos x) \quad (0 < x < \pi)$$

について以下の問いに答えよ。

- (1) 曲線 C_1 と曲線 C_2 の共有点の x 座標を求めよ。
- (2) 曲線 C_1 と曲線 C_2 とで囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積 V が π^2 であることを示せ。

5 $f(x) = \int_0^x \frac{4\pi}{t^2 + \pi^2} dt$ とし、 $c \geq \pi$ とする。数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = c$,

$a_{n+1} = f(a_n)$ ($n = 1, 2, \dots$) で定める。

- (1) $f(\pi)$ を求めよ。また、 $x \geq \pi$ のとき、 $0 < f'(x) \leq \frac{2}{\pi}$ が成り立つことを示せ。
- (2) すべての自然数 n に対して、 $a_n \geq \pi$ が成り立つことを示せ。
- (3) すべての自然数 n に対して、 $|a_{n+1} - \pi| \leq \frac{2}{\pi}|a_n - \pi|$ が成り立つことを示せ。また、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

6 複素数 α に対して, 複素数平面上の 3 点 $O(0)$, $A(\alpha)$, $B(\alpha^2)$ を考える. 次の条件 (I), (II), (III) をすべて満たす複素数 α 全体の集合を S とする.

- (I) α は実数でも純虚数でもない.
- (II) $|\alpha| > 1$ である.
- (III) 三角形 OAB は直角三角形である.

このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) α が S に属するとき, $\angle OAB = \frac{\pi}{2}$ であることを示せ.
- (2) 集合 S を複素数平面に図示せよ.
- (3) x, y を $\alpha^2 = x + yi$ を満たす実数とする. α が S を動くとき, xy 平面上の点 (x, y) の軌跡を求め, 図示せよ.

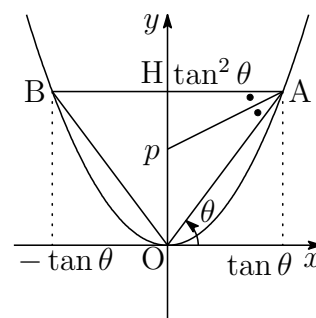
解答例

- 1 (1) AB と y 軸との交点を H とすると

$$OA : AH = 1 : \cos \theta$$

H の y 座標が $\tan^2 \theta$ であるから

$$\begin{aligned} p &= \frac{OA}{OA + AH} \tan^2 \theta \\ &= \frac{1}{1 + \cos \theta} \cdot \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1 - \cos \theta}{\cos^2 \theta} \end{aligned}$$



$AB = 2 \tan \theta$, $\angle AOB = \pi - 2\theta$ より, $\triangle OAB$ に正弦定理を適用すると

$$q = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \tan \theta}{\sin(\pi - 2\theta)} = \frac{\tan \theta}{\sin 2\theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cdot \frac{1}{2 \sin \theta \cos \theta} = \frac{1}{2 \cos^2 \theta}$$

$$(2) S(a) = \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} (a - x^2) dx = \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} (\sqrt{a} + x)(\sqrt{a} - x) dx = \frac{1}{6} (2\sqrt{a})^3 = \frac{4}{3} a^{\frac{3}{2}}$$

(1) の結果を利用から

$$\frac{S(p)}{S(q)} = \left(\frac{p}{q} \right)^{\frac{3}{2}} = \{2(1 - \cos \theta)\}^{\frac{3}{2}}$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より, $0 < 2(1 - \cos \theta) < 2$ であるから

$$0 < \{2(1 - \cos \theta)\}^{\frac{3}{2}} < 2\sqrt{2} < 3$$

したがって, $\frac{S(p)}{S(q)}$ が整数であるとき, $\frac{S(p)}{S(q)} = 1, 2$

$$\frac{S(p)}{S(q)} = 1 \text{ のとき } \{2(1 - \cos \theta)\}^{\frac{3}{2}} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\frac{S(p)}{S(q)} = 2 \text{ のとき } \{2(1 - \cos \theta)\}^{\frac{3}{2}} = 2 \quad \text{ゆえに} \quad \cos \theta = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

よって $\cos \theta = \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ ■

- 2 (1) $C: y = x^2 + ax + b$, $l_1: y = px$ ($p > 0$),
 $l_2: y = qx$ ($q < 0$) について, C と l_1 ,
 C と l_2 から, y を消去して整理すると

$$x^2 + (a - p)x + b = 0$$

$$x^2 + (a - q)x + b = 0$$

これらの2次方程式は, ともに重解をもつ
 から, 係数について

$$(a - p)^2 - 4b = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$(a - q)^2 - 4b = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ より } (2a - p - q)(-p + q) = 0$$

$$p \neq q \text{ より } a = \frac{p + q}{2} \quad \text{これを } \textcircled{2} \text{ に代入して } b = \frac{(p - q)^2}{16}$$

- (2) C と l_1 の接点の x 座標を α , C と l_2 の接点の x 座標を β とすると, これらは (1) で求めた2次方程式の重解であるから¹

$$\alpha = -\frac{a - p}{2} = \frac{p - q}{4}, \quad \beta = -\frac{a - q}{2} = -\frac{p - q}{4}$$

上式および (1) の方程式から

$$x^2 + ax + b - px = (x - \alpha)^2, \quad x^2 + ax + b - qx = (x - \beta)^2$$

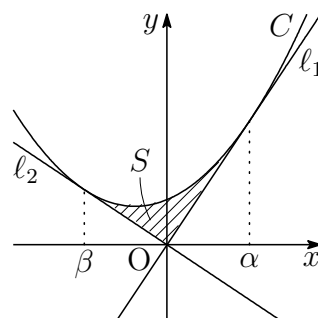
$$\begin{aligned} \text{よって } S &= \int_{\beta}^0 (x - \beta)^2 dx + \int_0^{\alpha} (x - \alpha)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x - \beta)^3 \right]_{\beta}^0 + \left[\frac{1}{3}(x - \alpha)^3 \right]_0^{\alpha} = \frac{\alpha^3 - \beta^3}{3} = \frac{(p - q)^3}{96} \end{aligned}$$

- (3) l_1 と l_2 は直交するから $pq = -1$ ゆえに $q = -\frac{1}{p}$
 $p > 0$ より, 相加平均・相乗平均の大小関係により

$$p - q = p + \frac{1}{p} \geq 2\sqrt{p \cdot \frac{1}{p}} = 2 \quad \dots (*)$$

上式において, 等号が成立するとき $p = \frac{1}{p}$ すなわち $p = 1$

$$(2) \text{ の結果および } (*) \text{ より } S \geq \frac{2^3}{96} = \frac{1}{12} \quad \text{よって, } S \text{ の最小値は } \frac{1}{12} \quad \blacksquare$$



¹http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_bun-2009.pdf 4 を参照

3 (1) $OQ_1 = 2OP_1, OP_2 = 2OQ_1,$
 $OQ_2 = 2OP_2, OP_3 = 2OQ_2,$

...

ゆえに

$$OP_2 = 4OP_1, OQ_2 = 4OQ_1,$$

$$OP_3 = 4OP_2, OQ_3 = 4OQ_2,$$

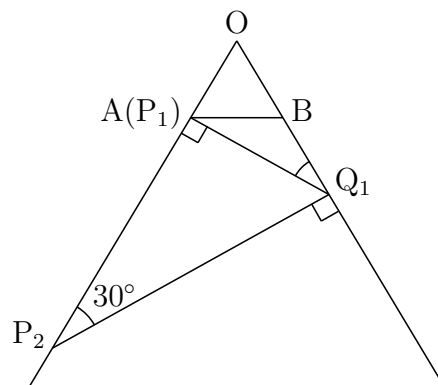
...

したがって

$$OP_n = 4^{n-1}OP_1, OQ_n = 4^{n-1}OQ_1$$

$$\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OQ_1} = 2\overrightarrow{OB} = 2\vec{b} \text{ であるから}$$

$$\overrightarrow{OP_n} = 4^{n-1}\vec{a}, \quad \overrightarrow{OQ_n} = 2 \cdot 4^{n-1}\vec{b}$$



(2) (1)の結果から

$$\overrightarrow{OP_{n+1}} = 4^n \vec{a}, \quad \overrightarrow{OQ_n} = 2 \cdot 4^{n-1} \vec{b}$$

点 R が線分 $Q_n P_{n+1}$ 上にあるから、実数 t を用いて $(0 \leq t \leq 1)$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OR} &= t\overrightarrow{OP_{n+1}} + (1-t)\overrightarrow{OQ_n} \\ &= t(4^n \vec{a}) + (1-t)(2 \cdot 4^{n-1} \vec{b}) \\ &= 4^n t \vec{a} + 2 \cdot 4^{n-1} (1-t) \vec{b} \end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad x = 4^n t, \quad y = 2 \cdot 4^{n-1} (1-t)$$

上の第2式から $2y = 4^n - 4^n t$ これと上の第1式の辺々を加えると

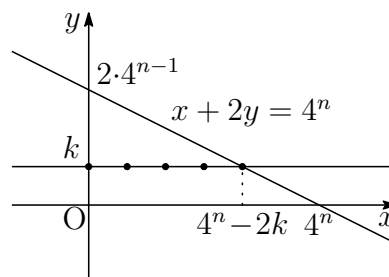
$$x + 2y = 4^n \quad \text{よって} \quad x = 4^n - 2y$$

$x = 2(2 \cdot 4^{n-1} - y) \geq 0, y \geq 0$ であるから、 S の点の個数は

$$2 \cdot 4^{n-1} + 1 \text{ (個)}$$

(3) S の点の個数は、右の図から

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{2 \cdot 4^{n-1}} (4^n - 2k + 1) \\ &= (4^n + 1)(2 \cdot 4^{n-1} + 1) \\ &\quad - 2 \cdot \frac{2 \cdot 4^{n-1} (2 \cdot 4^{n-1} + 1)}{2} \\ &= 4^{2n-1} + 4^n + 1 \end{aligned}$$



別解 右の図の長方形 $OP_{n+1}O'Q_n$ の周または内部の格子点の数は

$$(4^n + 1)(2 \cdot 4^{n-1} + 1)$$

(2) より, 線分 Q_nP_{n+1} 上の格子点の数は

$$2 \cdot 4^{n-1} + 1$$

よって, S の点の個数は

$$\frac{(4^n + 1)(2 \cdot 4^{n-1} + 1) + 2 \cdot 4^{n-1} + 1}{2} = (2 \cdot 4^{n-1} + 1)^2 = 4^{2n-1} + 4^n + 1$$

■

4 (1) $C_1 : y = \frac{1}{\sqrt{2} \sin x}$, $C_2 : y = \sqrt{2}(\sin x - \cos x)$ ($0 < x < \pi$) より

$$\begin{aligned} \sqrt{2}(\sin x - \cos x) - \frac{1}{\sqrt{2} \sin x} &= \frac{2 \sin x (\sin x - \cos x) - 1}{\sqrt{2} \sin x} \\ &= -\frac{\sin 2x + \cos 2x}{\sqrt{2} \sin x} = -\frac{\sin(2x + \frac{\pi}{4})}{\sin x} \quad (*) \end{aligned}$$

$\frac{\pi}{4} < 2x + \frac{\pi}{4} < 2\pi + \frac{\pi}{4}$ であるから, C_1, C_2 の共有点の x 座標は

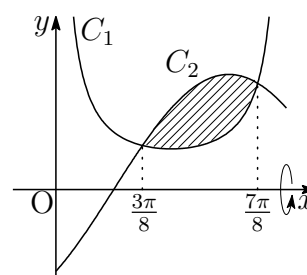
$$2x + \frac{\pi}{4} = \pi, 2\pi \quad \text{よって} \quad x = \frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}$$

(2) $\frac{3\pi}{8} \leq x \leq \frac{7\pi}{8}$ のとき

$$\pi \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq 2\pi$$

(*) より, この区間において

$$\sqrt{2}(\sin x - \cos x) \geq \frac{1}{\sqrt{2} \sin x} > 0$$



したがって, 求める回転体の体積を V とすると

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi} &= \int_{\frac{3\pi}{8}}^{\frac{7\pi}{8}} \left\{ 2(\sin x - \cos x)^2 - \frac{1}{2 \sin^2 x} \right\} dx \\ &= \int_{\frac{3\pi}{8}}^{\frac{7\pi}{8}} \left\{ 2 - 2 \sin 2x - \frac{1}{2 \sin^2 x} \right\} dx = \left[2x + \cos 2x + \frac{1}{2 \tan x} \right]_{\frac{3\pi}{8}}^{\frac{7\pi}{8}} \\ &= \pi + \sqrt{2} + \frac{1}{2 \tan \frac{7\pi}{8}} - \frac{1}{2 \tan \frac{3\pi}{8}} = \pi + \sqrt{2} - \frac{1}{2} \tan \frac{3\pi}{8} - \frac{1}{2} \tan \frac{\pi}{8} = \pi \end{aligned}$$

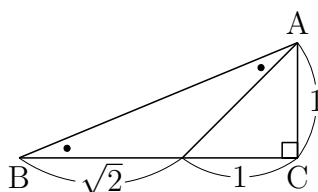
よって $V = \pi^2$

補足 (2) の計算について

$$\frac{1}{\tan \frac{7\pi}{8}} = -\frac{1}{\tan \frac{\pi}{8}} = -\tan \frac{3\pi}{8} \qquad \frac{1}{\tan \frac{3\pi}{8}} = \tan \frac{\pi}{8}$$

下の三角形から

$$\tan \frac{\pi}{8} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2} - 1, \quad \tan \frac{3\pi}{8} = \sqrt{2} + 1$$



同様に $\tan \frac{5\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}, \quad \tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$

さらに $\tan \frac{11\pi}{24} = 2 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} = (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{3} + \sqrt{2})$

$$\tan \frac{\pi}{24} = (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = -2 + \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{6}$$

5 (1) $f(\pi) = \int_0^\pi \frac{4\pi}{t^2 + \pi^2} dt$ において, $t = \pi \tan \theta$ とおくと

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{\pi}{\cos^2 \theta} \quad \begin{array}{c|c} t & 0 \rightarrow \pi \\ \theta & 0 \rightarrow \frac{\pi}{4} \end{array}$$

したがって $f(\pi) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4\pi}{(\pi \tan \theta) + \pi^2} \cdot \frac{\pi}{\cos^2 \theta} d\theta = 4 \left[\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \pi$

$f(x) = \int_0^x \frac{4\pi}{t^2 + \pi^2} dt$ を x で微分すると

$$f'(x) = \frac{4\pi}{x^2 + \pi^2}$$

よって, $x \geq \pi$ のとき $0 < f'(x) \leq \frac{4\pi}{\pi^2 + \pi^2} = \frac{2}{\pi}$

(2) すべての自然数 n に対して, $a_n \geq \pi \cdots (*)$

[1] $a_1 = c \geq \pi$ より, $n = 1$ のとき, $(*)$ は成立する.

[2] $n = k$ のとき, $(*)$ が成立すると仮定すると

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= f(a_k) = \int_0^{a_k} \frac{4\pi}{t^2 + \pi^2} dt = \int_0^\pi \frac{4\pi}{t^2 + \pi^2} dt + \int_\pi^{a_k} \frac{4\pi}{t^2 + \pi^2} dt \\ &= \pi + \int_\pi^{a_k} \frac{4\pi}{t^2 + \pi^2} dt \geq \pi \quad \cdots (**)$$

したがって, $n = k + 1$ のときも $(*)$ は成立する.

[1], [2] よりすべての自然数 n について, $(*)$ は成立する.

(3) $(**)$ と同様にして $a_{n+1} = \pi + \int_\pi^{a_n} \frac{4\pi}{t^2 + \pi^2} dt$

$$a_{n+1} - \pi = \int_\pi^{a_n} \frac{4\pi}{t^2 + \pi^2} dt \leq \int_\pi^{a_n} \frac{4\pi^2}{\pi^2 + \pi^2} dt = \frac{2}{\pi}(a_n - \pi)$$

(2) の結果に注意して $0 \leq a_{n+1} - \pi \leq \frac{2}{\pi}(a_n - \pi)$

したがって, すべての自然数 n に対して $|a_{n+1} - \pi| \leq \frac{2}{\pi}|a_n - \pi|$

$0 < \frac{2}{\pi} < 1$ であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - \pi| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-1} |a_1 - \pi| = 0 \quad \text{よって} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pi$$



- 6 (1) $A(\alpha)$, $B(\alpha^2)$ について ($|\alpha| > 1$, α は純虚数ではない)

$|\alpha^2| > |\alpha|$ となり, OA は最大辺ではないから, $\angle OBA$ は直角ではない.

$\angle AOB = \arg \frac{\alpha^2}{\alpha} = \arg \alpha$ より, $\angle AOB$ は直角ではない.

よって, 直角三角形 OAB の直角は $\angle OAB$ より $\angle OAB = \frac{\pi}{2}$

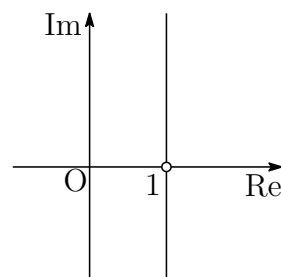
- (2) $OA = |\alpha|$, $OB = |\alpha^2|$, $AB = |\alpha^2 - \alpha|$

(1) の結果より, $OA^2 + AB^2 = OB^2$ であるから

$$\begin{aligned} |\alpha|^2 + |\alpha^2 - \alpha|^2 &= |\alpha^2|^2 \\ |\alpha|^2 + |\alpha|^2 |\alpha - 1|^2 &= |\alpha|^4 \\ 1 + |\alpha - 1|^2 &= |\alpha|^2 \quad (|\alpha| \neq 0) \end{aligned}$$

整理すると $\alpha + \bar{\alpha} = 2$ ゆえに $\operatorname{Re}(\alpha) = 1$

また, 条件から $\operatorname{Im}(\alpha) \neq 0$ よって, 集合 S は右図のとおり.



別解 $\angle OAB = \frac{\pi}{2}$ より, $\frac{\alpha^2 - \alpha}{0 - \alpha} = -\alpha + 1$ は純虚数であるから, 0でない実数 k を用いて

$$-\alpha + 1 = ki \quad \text{ゆえに} \quad \alpha = 1 - ki \quad (k \neq 0)$$

- (3) (2) の結果より $\alpha = 1 + ti$ ($t \neq 0$) とおくと

$$\alpha^2 = (1 + ti)^2 = 1 - t^2 + 2ti$$

$\alpha^2 = x + yi$ であるから

$$x = 1 - t^2, \quad y = 2t \neq 0$$

上の2式から t を消去すると

$$x = 1 - \frac{y^2}{4}, \quad y \neq 0$$

よって, 求める軌跡は, 右図のとおり.

