平成 29 年度　筑波大学　２次試験前期日程 (数学問題)120 分

- 社会学類は $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ から 1 題選択，$\boxed{3}$ 必答 (数 II・B)，及び他教科との選択
- 国際総合・障害科学類は，数 II・B 選択の場合は $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ から 1 題選択，$\boxed{3}$ 必答．数 III 選択の場合は $\boxed{4}$ 〜 $\boxed{6}$ から 2 題選択，及び他教科との選択
- 教育・心理学類は $\boxed{1}$ 〜 $\boxed{3}$ 必答，$\boxed{4}$ 〜 $\boxed{6}$ から 1 題選択
- 生物資源・生物・地球・数学・物理・化学・応用理工・工学システム・情報科学類は $\boxed{1}$ 〜 $\boxed{3}$ から 2 題選択，$\boxed{4}$ 〜 $\boxed{6}$ 必答
- 情報メディア創生学類は $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ から 1 題選択，$\boxed{3}$ 〜 $\boxed{6}$ 必答
- 知識情報・図書館学類は $\boxed{2}$ 〜 $\boxed{6}$ ，または $\boxed{1}$, $\boxed{3}$ 〜 $\boxed{6}$ から 2 題選択，及び他教科との選択
- 社会工学類は $\boxed{1}$ 〜 $\boxed{3}$ から 1 題選択，$\boxed{4}$ 〜 $\boxed{6}$ 必答
- 医学・医療学類は $\boxed{1}$ 〜 $\boxed{3}$ 必答，$\boxed{4}$ 〜 $\boxed{6}$ から 2 題選択

$\boxed{\textbf{1}}$ a を正の実数とする．2 つの関数

$$y = \frac{1}{3}ax^2 - 2a^2x + \frac{7}{3}a^3, \quad y = -\frac{2}{3}ax^2 + 2a^2x - \frac{2}{3}a^3$$

のグラフは，2 点 A，B で交わる．但し，A の x 座標は B の x 座標より小さいとする．また，2 点 A，B を結ぶ線分の垂直二等分線を ℓ とする．

(1) 2 点 A，B の座標を a を用いて表せ．

(2) 直線 ℓ の方程式を a を用いて表せ．

(3) 原点と直線 ℓ の距離 d を a を用いて表せ．また，$a > 0$ の範囲で d を最大にする a の値を求めよ．

$\boxed{\textbf{2}}$ a，b，c を実数とし，β，m をそれぞれ $0 < \beta < 1$，$m > 0$ を満たす実数とする．また，関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ は $x = \beta, -\beta$ で極値をとり，$f(-1) = f(\beta) = -m$，$f(1) = f(-\beta) = m$ を満たすとする．

(1) a，b，c，および β，m の値を求めよ．

(2) 関数 $g(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ は，$-1 \leqq x \leqq 1$ に対して $f(-1) \leqq g(x) \leqq f(1)$ を満たすとする．$h(x) = f(x) - g(x)$ とおくとき，$h(-1)$，$h(-\beta)$，$h(\beta)$，$h(1)$ それぞれと 0 との大きさを比較することにより，$h(x)$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_{n+2} = 3{a_{n+1}}^2 - 6a_{n+1}a_n + 3{a_n}^2 + a_{n+1} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

を満たすとする．また，$b_n = a_{n+1} - a_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とおく．以下の問いに答えよ．

(1) $b_n \geqq 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を示せ．

(2) b_n $(n = 1, 2, \cdots)$ の一の位の数が 2 であることを数学的帰納法を用いて証明せよ．

(3) a_{2017} の一の位の数を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 関数

$$f(x) = 2x^2 - 9x + 14 - \frac{9}{x} + \frac{2}{x^2} \quad (x > 0)$$

について以下の問いに答えよ．

(1) 方程式 $f(x) = 0$ の解をすべて求めよ．

(2) 関数 $f(x)$ のすべての極値を求めよ．

(3) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ xy 平面において，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という．また，実数 a に対して，a 以下の最大の整数を $[\,a\,]$ で表す．記号 $[\quad]$ をガウス記号という．以下の問いでは N は自然数とする．

(1) n を $0 \leqq n \leqq N$ を満たす整数とする．点 $(n,\ 0)$ と点 $\left(n,\ N\sin\left(\dfrac{\pi n}{2N}\right)\right)$ を結ぶ線分上にある格子点の個数をガウス記号を用いて表せ．

(2) 直線 $y = x$ と，x 軸，および直線 $x = N$ で囲まれた領域 (境界を含む) にある格子点の個数を $A(N)$ とおく．このとき $A(N)$ を求めよ．

(3) 曲線 $y = N\sin\left(\dfrac{\pi x}{2N}\right)$ $(0 \leqq x \leqq N)$ と，x 軸，および直線 $x = N$ で囲まれた領域 (境界を含む) にある格子点の個数を $B(N)$ とおく．(2) の $A(N)$ に対して $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \frac{B(N)}{A(N)}$ を求めよ．

$\boxed{\textbf{6}}$ $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$ とする．複素数平面上において，原点を中心とする半径 1 の円の上に異なる 5 点 $\mathrm{P}_1(w_1)$，$\mathrm{P}_2(w_2)$，$\mathrm{P}_3(w_3)$，$\mathrm{P}_4(w_4)$，$\mathrm{P}_5(w_5)$ が反時計まわりに並んでおり，次の 2 つの条件 (I)，(II) を満たすとする．

(I) $(\cos^2 a)(w_2 - w_1)^2 + (\sin^2 a)(w_5 - w_1)^2 = 0$ が成り立つ．

(II) $\dfrac{w_3}{w_2}$ と $-\dfrac{w_4}{w_2}$ は方程式 $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$ の解である．

また，五角形 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4\mathrm{P}_5$ の面積を S とする．以下の問いに答えよ．

(1) 五角形 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4\mathrm{P}_5$ の原点 P_1 における内角 $\angle\mathrm{P}_5\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ を求めよ．

(2) S を a を用いて表せ．

(3) $R = |w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5|$ とする．このとき，$R^2 + 2S$ は a の値によらないことを示せ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $y=\dfrac{1}{3}ax^2-2a^2x+\dfrac{7}{3}a^3,\ \ y=-\dfrac{2}{3}ax^2+2a^2x-\dfrac{2}{3}a^3\ \ (a>0)$ を連立すると

$$\frac{1}{3}ax^2-2a^2x+\frac{7}{3}a^3=-\frac{2}{3}ax^2+2a^2x-\frac{2}{3}a^3$$

整理すると　$ax^2-4a^2x+3a^3=0$　ゆえに　$a(x-a)(x-3a)=0$

条件より　$\mathbf{A}\left(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{\frac{2}{3}a^3}\right),\ \mathbf{B}\left(\boldsymbol{3a,-\frac{2}{3}a^3}\right)$

(2) ABの中点 $(2a,\ 0)$，ABの傾きが $-\dfrac{2}{3}a^2$ であるから，ℓ は

$$y=\frac{3}{2a^2}(x-2a)\quad \text{すなわち}\quad 3x-2a^2y-6a=0$$

別解　ℓ 上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ について，$\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2$ より

$$\begin{aligned}(x-a)^2+\left(y-\frac{2}{3}a^3\right)^2&=(x-3a)^2+\left(y+\frac{2}{3}a^3\right)^2\\ -2ax+a^2-\frac{4}{3}a^3y+\frac{4}{9}a^6&=-6ax+9a^2+\frac{4}{3}a^3y+\frac{4}{9}a^6\\ 4ax-\frac{8}{3}a^3y-8a^2&=0\\ 3x-2a^2y-6a&=0\end{aligned}$$

(3) 原点Oと直線 ℓ の距離 d は，$a>0$ より

$$d=\frac{|-6a|}{\sqrt{3^2+(-2a^2)^2}}=\boldsymbol{\frac{6a}{\sqrt{4a^4+9}}}$$

相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{1}{d^2}=\frac{4a^4+9}{36a^2}=\frac{1}{36}\left(4a^2+\frac{9}{a^2}\right)\geqq\frac{1}{36}\cdot2\sqrt{4a^2\cdot\frac{9}{a^2}}=\frac{1}{3}$$

したがって　$d\leqq\sqrt{3}$　等号が成立するとき

$$4a^2=\frac{9}{a^2}\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{a=\sqrt{\frac{3}{2}}}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $f(x)$ は $x=\beta, -\beta$ で極値をとるから，最高次の係数に注意して

$$f'(x) = 3(x+\beta)(x-\beta) = 3x^2 - 3\beta^2$$

$f(x)$ の定数項が c であるから　　$f(x) = x^3 - 3\beta^2 x + c \quad \cdots (*)$

$(-1) = f(\beta) = -m$，$f(1) = f(-\beta) = m$ により

$$\begin{aligned} -1 + 3\beta^2 + c &= -m & \cdots ① \\ -2\beta^3 + c &= -m & \cdots ② \\ 1 - 3\beta^2 + c &= m & \cdots ③ \\ 2\beta^3 + c &= m & \cdots ④ \end{aligned}$$

②, ④ より　$c = 0,\ m = 2\beta^3 \quad \cdots ⑤$　　これを ③ に代入すると

$$1 - 3\beta^2 = 2\beta^3 \quad \text{ゆえに} \quad (\beta+1)^2(2\beta-1) = 0$$

$0 < \beta < 1$ であるから　$\beta = \dfrac{1}{2}$　これを ⑤ に代入して　$m = \dfrac{1}{4}$

$c = 0$，$\beta = \dfrac{1}{2}$，$m = \dfrac{1}{4}$ は ① を満たす．$(*)$ は　$f(x) = x^3 - \dfrac{3}{4}x$

よって　　$\boldsymbol{a = 0,\ b = -\dfrac{3}{4},\ c = 0,\ \beta = \dfrac{1}{2},\ m = \dfrac{1}{4}}$

(2) $f(-1) \leqq g(x) \leqq f(1)$ より　$f(x) - f(1) \leqq f(x) - g(x) \leqq f(x) - f(-1)$

$$f(x) - f(1) \leqq h(x) \leqq f(x) - f(-1)$$

$x = -1, -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2},\ 1$ を代入すると，条件により

$$h(-1) \leqq 0, \quad 0 \leqq h\left(-\frac{1}{2}\right), \quad h\left(\frac{1}{2}\right) \leqq 0, \quad 0 \leqq h(1)$$

$h(x)$ は高々2次の整式であるから，$h(x) = sx^2 + tx + u$ とおくと

$$s - t + u \leqq 0, \quad \frac{1}{4}s - \frac{1}{2}t + u \geqq 0, \quad \frac{1}{4}s + \frac{1}{2}t + u \leqq 0, \quad s + t + u \geqq 0$$

上の第1式と第4式，第2式と第3式から

$$-t \leqq s + u \leqq t, \quad \frac{1}{2}t \leqq \frac{1}{4}s + u \leqq -\frac{1}{2}t$$

上の2式から　$t = 0$　ゆえに　$s + u = 0,\ \dfrac{1}{4}s + u = 0$

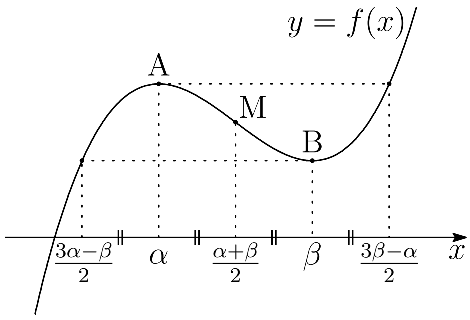
これを解いて　$s = u = 0$　よって　$\boldsymbol{h(x) = 0}$

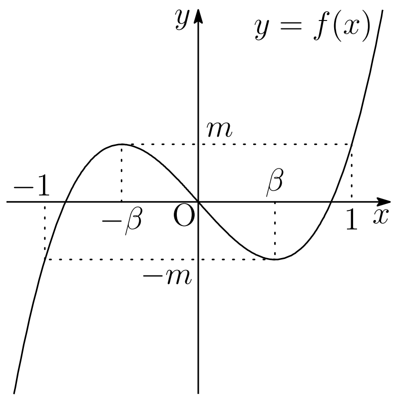
補足 一般に，3 次関数 $y=f(x)$ が 2 点 $\mathrm{A}(\alpha,\ f(\alpha))$，$\mathrm{B}(\beta,\ f(\beta))$ で極値をとるとき (左図)，AB の中点 M は $y=f(x)$ 上にあり，$\mathrm{M}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)$.

M(変曲点) に関して曲線 $y=f(x)$ は対称で，次が成り立つ．

$$f(\alpha)=f\left(\frac{3\beta-\alpha}{2}\right),\quad f(\beta)=f\left(\frac{3\alpha-\beta}{2}\right)$$

このとき，数列 $\dfrac{3\alpha-\beta}{2},\ \alpha,\ \dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \beta,\ \dfrac{3\beta-\alpha}{2}$ は等差数列をなす．





本題の $y=f(x)$ では (右図)，2 点 $(-1,-m)$，$(1,\ m)$ で極値をとり，その中点 O に関して $y=f(x)$ は対称であるから，$f(x)$ は奇関数である．β は 0 と 1 の中央であるから，$\beta=\dfrac{1}{2}$ であり，最高次の係数に注意すると

$$f'(x)=3\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\quad \text{ゆえに}\quad f(x)=x^3-\frac{3}{4}x,\quad m=f(1)=\frac{1}{4}$$

発展 n 次多項式 $f(x)$ の x^n の係数が A であるとき，次式が成立する [1]．

$$f(x)=f(a)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+A(x-a)^n$$

3 次多項式 $f(x)$ の x^3 の係数が A，$f(x)$ が $x=\alpha,\ \beta$ で極値をとるとき，$f'(x)=3A(x-\alpha)(x-\beta)$，$f''(x)=3A(2x-\alpha-\beta)$ より，$x=\alpha$ を極として展開すると

$$\begin{aligned}f(x)&=f(\alpha)+f'(\alpha)(x-\alpha)+\frac{1}{2}f''(\alpha)(x-\alpha)^2+A(x-\alpha)^3\\&=f(\alpha)+\frac{3}{2}A(\alpha-\beta)(x-\alpha)^2+A(x-\alpha)^3\end{aligned}$$

よって，$f\left(\dfrac{3\beta-\alpha}{2}\right)=f(\alpha)$．また，$x=\beta$ を極とすると，$f\left(\dfrac{3\alpha-\beta}{2}\right)=f(\beta)$．

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/TKdai/TKdai_2020.pdf (p.15 を参照)

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $a_{n+2}=3{a_{n+1}}^2-6a_{n+1}a_n+3{a_n}^2+a_{n+1}$ より $(n=1,2,\cdots)$

$$a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)^2 \quad ゆえに \quad b_{n+1}=3{b_n}^2 \geqq 0$$

よって　　$b_n \geqq 0 \ \ (n=1,2,\cdots)$

(2) $(*)\quad b_n \equiv 2 \pmod{10}$

［1］$b_1=a_2-a_1=3-1=2$ より，$n=1$ のとき，$(*)$ は成立する．

［2］$n=k$ のとき，$(*)$ が成立すると仮定すると

$$b_{k+1}=3{b_k}^2 \equiv 3\cdot 2^2 \equiv 2 \pmod{10}$$

したがって，$n=k+1$ のときも，$(*)$ は成立する．

［1］，［2］より，すべての自然数 n について，$(*)$ が成立する．

(3) $b_n=a_{n+1}-a_n$ より，$n>1$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)=\sum_{k=1}^{n-1}b_k \quad ゆえに \quad a_n-a_1 \equiv \sum_{k=1}^{n-1}2 \pmod{10}$$

したがって　　$a_n \equiv 2(n-1)+1=2n-1 \pmod{10}$

ゆえに　$a_{2017} \equiv 2\cdot 2017-1 \equiv 3 \pmod{10}$　　よって　一の位の数は　**3**

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $f(x)=2x^2-9x+14-\dfrac{9}{x}+\dfrac{2}{x^2}\ (x>0)$ について，$t=x+\dfrac{1}{x}$ とおくと

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\left(x^2+2+\frac{1}{x^2}\right)-9\left(x+\frac{1}{x}\right)+10 \\ &= 2t^2-9t+10=(t-2)(2t-5) \quad \cdots(*) \end{aligned}$$

$t=2$ より　$x+\dfrac{1}{x}=2$　ゆえに　$(x-1)^2=0$　すなわち　$x=1$

$t=\dfrac{5}{2}$ より　$x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{2}$　ゆえに　$(x-2)(2x-1)=0$　すなわち　$x=\dfrac{1}{2},\ 2$

よって，求める解は　　$\boldsymbol{x=\dfrac{1}{2},\ 1,\ 2}$

(2) $f(x) = 2t^2 - 9t + 10$，$t = x + \dfrac{1}{x}$ より

$$f'(x) = (4t-9)\frac{dt}{dx} = \left(4x + \frac{4}{x} - 9\right)\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$$
$$= \frac{1}{x^3}(x+1)(x-1)(4x^2 - 9x + 4)$$

$x > 0$ に注意して，$4x^2 - 9x + 4 = 0$ を解くと　$x = \dfrac{9 \pm \sqrt{17}}{8}$

$\alpha = \dfrac{9 - \sqrt{17}}{8}$，$\beta = \dfrac{9 + \sqrt{17}}{8}$ とおくと，$x = \alpha,\ \beta$ のとき，$t = \dfrac{9}{4}$

$x = 1$ のとき，$t = 2$．$g(t) = (t-2)(2t-5)$ とおくと，$(*)$ より

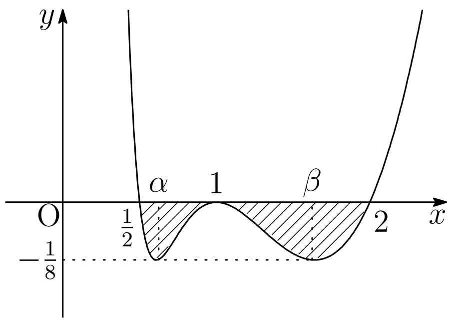
$$f(\alpha) = f(\beta) = g\left(\frac{9}{4}\right) = \left(\frac{9}{4} - 2\right)\left(2\cdot\frac{9}{4} - 5\right) = -\frac{1}{8},$$
$$f(1) = g(2) = 0$$

x	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	1	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$-\frac{1}{8}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{8}$	$\nearrow$

よって　$\boldsymbol{x = \dfrac{9 \pm \sqrt{17}}{2}}$ **のとき極小値** $\boldsymbol{-\dfrac{1}{8}}$，　$\boldsymbol{x = 1}$ **のとき極大値** $\boldsymbol{0}$

(3) 求める面積を S とすると，(1)，(2) の結果から

$$S = -\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(2x^2 - 9x + 14 - \frac{9}{x} + \frac{2}{x^2}\right)dx$$
$$= \left[-\frac{2}{3}x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 14x + 9\log x + \frac{2}{x}\right]_{\frac{1}{2}}^{2}$$
$$= \mathbf{18\log 2 - \frac{99}{8}}$$



$\boxed{5}$ (1) $0 \leqq n \leqq N$ において，$N\sin\left(\dfrac{\pi n}{2N}\right) \geqq 0$ であるから

$$\left[\,\boldsymbol{N\sin\left(\frac{\pi n}{2N}\right)}\right] + \mathbf{1}$$

(2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{N}(k+1) = \frac{1}{2}(N+1)(1+N+1) = \boldsymbol{\frac{1}{2}(N+1)(N+2)}$

(3) (1) の結果から

$$\begin{aligned} B(N) &= \sum_{n=0}^{N}\left(\left[\,N\sin\left(\frac{\pi n}{2N}\right)\right]+1\right) = \sum_{n=0}^{N}\left[\,N\sin\left(\frac{\pi n}{2N}\right)\right] + N + 1 \\ &\leqq \sum_{n=0}^{N} N\sin\frac{\pi n}{2N} + N + 1, \\ B(N) &= \sum_{n=0}^{N}\left(\left[\,N\sin\left(\frac{\pi n}{2N}\right)\right]+1\right) > \sum_{n=0}^{N} N\sin\frac{\pi n}{2N} \end{aligned}$$

$A(N) = \dfrac{1}{2}(N+1)(N+2)$ より

$$\frac{2N}{(N+1)(N+2)}\sum_{n=0}^{N}\sin\frac{\pi n}{2N} < \frac{B(N)}{A(N)} \leqq \frac{2N}{(N+1)(N+2)}\sum_{n=0}^{N}\sin\frac{\pi n}{2N} + \frac{2}{N+2}$$

このとき

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty}\frac{2N}{(N+1)(N+2)}\sum_{n=0}^{N}\sin\frac{\pi n}{2N} &= \lim_{N\to\infty}\frac{2N^2}{(N+1)(N+2)}\cdot\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N}\sin\frac{\pi n}{2N} \\ &= 2\int_0^1 \sin\frac{\pi x}{2}\,dx = 2\left[-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2}\,\right]_0^1 = \frac{4}{\pi}, \end{aligned}$$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{2}{N+2} = 0$$

よって，はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{B(N)}{A(N)} = \boldsymbol{\frac{4}{\pi}}$

$\boxed{6}$ (1) $(\cos^2 a)(w_2 - w_1)^2 + (\sin^2 a)(w_5 - w_1)^2 = 0$ より

$$\frac{(w_2-w_1)^2}{(w_5-w_1)^2} = -\tan^2 a \quad \text{ゆえに} \quad \frac{w_2-w_1}{w_5-w_1} = \pm i\tan a \quad \cdots(*)$$

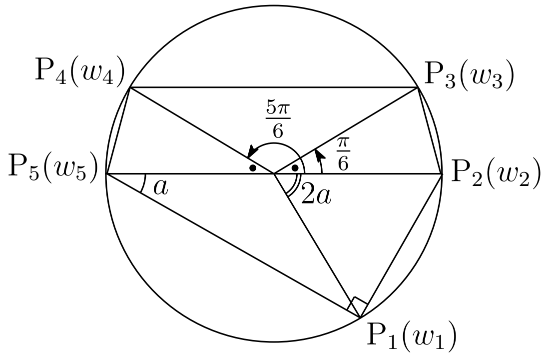
$\dfrac{w_2-w_1}{w_5-w_1}$ は純虚数であるから　$\angle \mathrm{P}_5\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2 = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{2}}$

(2) $z^2-\sqrt{3}z+1=0$ を解くと　$z=\dfrac{\sqrt{3}\pm i}{2}$

条件により，$\arg\dfrac{w_3}{w_2}<\arg\dfrac{w_5}{w_2}$ であるから

$$\frac{w_3}{w_2}=\frac{\sqrt{3}+i}{2}=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$$
$$\frac{w_5}{w_2}=-\frac{\sqrt{3}-i}{2}=\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}$$

(1) の結果および $(*)$ より　$\dfrac{|w_2-w_1|}{|w_5-w_1|}=\tan a$　ゆえに　$\angle \mathrm{P_1P_5P_2}=a$



上の図から，S は

$$S=\frac{1}{2}\cdot1^2\left(\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{6}+\sin(\pi-2a)+\sin 2a\right)$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}+\sin 2a}$$

(3) $w_2+w_5=0$ であるから

$$R=|w_1+w_3+w_4|=|w_2|\left|\frac{w_1}{w_2}+\frac{w_3}{w_2}+\frac{w_4}{w_2}\right|$$
$$=1\left|\cos(-2a)+i\sin(-2a)+\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right|$$
$$=|\cos 2a+i(1-\sin 2a)|$$

ゆえに　$R^2=\cos^2 2a+(1-\sin 2a)^2=2-2\sin 2a$

上式および (2) の結果から　$R^2+2S=3+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって，R^2+2S は，a の値によらない定数である．