

平成28年度 筑波大学 2次試験前期日程(数学問題)120分

- 社会学類は [1] [2] から1題選択, [3] 必答(数II・B), 及び他教科との選択
- 国際総合・障害科学類は, 数II・B選択の場合は [1] [2] から1題選択, [3] 必答. 数III選択の場合は [4] [5] [6] から2題選択, 及び他教科との選択
- 教育・心理学類は [1] [2] [3] 必答, [4] [5] [6] から1題選択
- 生物資源・生物・地球・数学・物理・化学・応用理工・工学システム・情報科学類は [1] [2] [3] から2題選択, [4] [5] [6] 必答
- 情報メディア創生学類は [1] [2] から1題選択, [3] [4] [5] [6] 必答
- 知識情報・図書館学類は [2] [3] [4] [5] [6], または [1] [3] [4] [5] [6] から2題選択, 及び他教科との選択
- 社会工学類は [1] [2] [3] から1題選択, [4] [5] [6] 必答
- 医学・医療学類は [1] [2] [3] 必答, [4] [5] [6] から2題選択

[1] k を実数とする. xy 平面の曲線 $C_1: y = x^2$ と $C_2: y = -x^2 + 2kx + 1 - k^2$ が異なる共有点 P, Q を持つとする. ただし点 P, Q の x 座標は正であるとする. また, 原点を O とする.

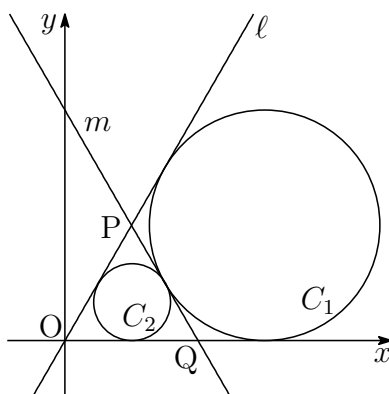
- (1) k のとりうる値の範囲を求めよ.
- (2) k が(1)の範囲を動くとき, $\triangle OPQ$ の重心 G の軌跡を求めよ.
- (3) $\triangle OPQ$ の面積を S とするとき, S^2 を k を用いて表せ.
- (4) k が(1)の範囲を動くとする. $\triangle OPQ$ の面積が最大となるような k の値と, そのときの重心 G の座標を求めよ.

2 xy 平面の直線 $y = (\tan 2\theta)x$ を ℓ とする. ただし $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ とする. 図で示すように, 円 C_1, C_2 を以下の (i)~(iv) で定める.

- (i) 円 C_1 は直線 ℓ および x 軸の正の部分と接する.
- (ii) 円 C_1 の中心は第 1 象限にあり, 原点 O から中心までの距離 d_1 は $\sin 2\theta$ である.
- (iii) 円 C_2 は直線 ℓ , x 軸の正の部分, および円 C_1 と接する.
- (iv) 円 C_2 の中心は第 1 象限にあり, 原点 O から中心までの距離 d_2 は $d_1 > d_2$ を満たす.

円 C_1 と円 C_2 の共通接線のうち, x 軸, 直線 ℓ と異なる直線を m とし, 直線 m と直線 ℓ , x 軸との交点をそれぞれ P, Q とする.

- (1) 円 C_1, C_2 の半径を $\sin \theta, \cos \theta$ を用いて表せ.
- (2) θ が $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ の範囲を動くとき, 線分 PQ の長さの最大値を求めよ.
- (3) (2) の最大値を与える θ について直線 m の方程式を求めよ.



3 四面体 $OABC$ において, $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$ とおく. このとき等式

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 1$$

が成り立つとする. t は実数の定数で, $0 < t < 1$ を満たすとする. 線分 OA を $t:1-t$ に内分する点を P とし, 線分 BC を $t:1-t$ に内分する点を Q とする. また, 線分 PQ の中点を M とする.

- (1) \vec{OM} を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ と t を用いて表せ.
- (2) 線分 OM と線分 BM の長さが等しいとき, 線分 OB の長さを求めよ.
- (3) 4点 O, A, B, C が点 M を中心とする同一球面上にあるとする. このとき, $\triangle OAB$ と $\triangle OCB$ は合同であることを示せ.

4 関数 $f(x) = 2\sqrt{x}e^{-x}$ ($x \geq 0$) について次の問いに答えよ.

- (1) $f'(a) = 0$, $f''(b) = 0$ を満たす a, b を求め, $y = f(x)$ のグラフの概形を描け. ただし, $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x}e^{-x} = 0$ であることは証明なしで用いてよい.
- (2) $k \geq 0$ のとき $V(k) = \int_0^k xe^{-2x} dx$ を k を用いて表せ.
- (3) (1) で求めた a, b に対して曲線 $y = f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x = a, x = b$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ.

5 $\triangle PQR$ において $\angle RPQ = \theta$, $\angle PQR = \frac{\pi}{2}$ とする. 点 P_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を次で定める.

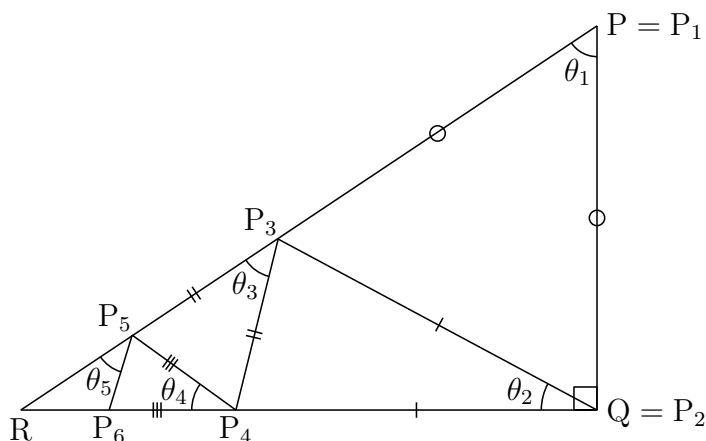
$$P_1 = P, \quad P_2 = Q, \quad P_n P_{n+2} = P_n P_{n+1}$$

ただし, 点 P_{n+2} は線分 $P_n R$ 上にあるものとする. 実数 θ_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を

$$\theta_n = \angle P_{n+1} P_n P_{n+2} \quad (0 < \theta_n < \pi)$$

で定める.

- (1) θ_2, θ_3 を θ を用いて表せ,
- (2) $\theta_{n+1} + \frac{\theta_n}{2}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) は n によらない定数であることを示せ.
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n$ を求めよ.



6 複素数平面上を動く点 z を考える．次の問いに答えよ．

- (1) 等式 $|z - 1| = |z + 1|$ を満たす点 z の全体は虚軸であることを示せ．
- (2) 点 z が原点を除いた虚軸上を動くとき， $w = \frac{z+1}{z}$ が描く図形は直線から 1 点を除いたものとなる．この図形を描け．
- (3) a を正の実数とする．点 z が虚軸上を動くとき， $w = \frac{z+1}{z-a}$ が描く図形は円から 1 点を除いたものとなる．この円の中心と半径を求めよ．

解答例

- 1 (1) $C_1: y = x^2$, $C_2: y = -x^2 + 2kx + 1 - k^2$ の2式から y を消去すると

$$2x^2 - 2kx + k^2 - 1 = 0$$

この方程式の判別式を D とし、方程式の解を α , β とすると

$$D/4 = (-k)^2 - 2(k^2 - 1) = 2 - k^2, \quad \alpha + \beta = k, \quad \alpha\beta = \frac{k^2 - 1}{2}$$

$\alpha > 0$, $\beta > 0$ であるから、 $D > 0$, $\alpha + \beta > 0$, $\alpha\beta > 0$ より

$$\begin{cases} 2 - k^2 > 0 \\ k > 0 \\ k^2 - 1 > 0 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad \begin{cases} -\sqrt{2} < k < \sqrt{2} \\ k > 0 \\ k < -1, 1 < k \end{cases}$$

よって、 k のとりうる値の範囲は $1 < k < \sqrt{2}$

- (2) $P(\alpha, \alpha^2)$, $Q(\beta, \beta^2)$ とすると、 $\triangle OPQ$ の重心 $G(x, y)$ は

$$x = \frac{\alpha + \beta}{3} = \frac{k}{3}, \quad y = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{3} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{3} = \frac{1}{3}, \quad 1 < k < \sqrt{2}$$

よって、 G の軌跡は $y = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} < x < \frac{\sqrt{2}}{3} \right)$

- (3) $\overrightarrow{OP} = (\alpha, \alpha^2)$, $\overrightarrow{OQ} = (\beta, \beta^2)$ より

$$S = \frac{1}{2} |\alpha\beta^2 - \alpha^2\beta| = \frac{1}{2} \alpha\beta |\beta - \alpha|$$

$$\begin{aligned} \text{よって } S^2 &= \frac{1}{4} (\alpha\beta)^2 (\beta - \alpha)^2 = \frac{1}{4} (\alpha\beta)^2 \{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta\} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{k^2 - 1}{2} \right)^2 \left\{ k^2 - 4 \cdot \frac{k^2 - 1}{2} \right\} = \frac{1}{16} (k^2 - 1)^2 (2 - k^2) \end{aligned}$$

- (4) 正の数 $k^2 - 1$, $k^2 - 1$, $2(2 - k^2)$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{(k^2 - 1) + (k^2 - 1) + 2(2 - k^2)}{3} \geq \sqrt[3]{(k^2 - 1)^2 \cdot 2(2 - k^2)}$$

したがって $(k^2 - 1)^2 (2 - k^2) \leq \frac{4}{27}$ ゆえに $S^2 \leq \frac{1}{108}$

上式において、等号が成立するとき、 S は最大となる。このとき

$$k^2 - 1 = 2(2 - k^2) \quad \text{よって} \quad k = \frac{\sqrt{15}}{3}, \quad G \left(\frac{\sqrt{15}}{9}, \frac{1}{3} \right)$$



(3) $OM = AM$ より, $|\overrightarrow{OM}| = |\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}|$ であるから

$$|\overrightarrow{OM}|^2 = |\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}|^2 \quad \text{整理すると} \quad |\overrightarrow{OA}|^2 = 2\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OA}$$

上の第2式に $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ および (1) の結果を代入すると

$$\begin{aligned} |\vec{a}|^2 &= \{t\vec{a} + (1-t)\vec{b} + t\vec{c}\} \cdot \vec{a} \\ &= t|\vec{a}|^2 + (1-t)\vec{a} \cdot \vec{b} + t\vec{c} \cdot \vec{a} \end{aligned}$$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 1$ を代入すると $(1-t)|\vec{a}|^2 = 1$ ゆえに $|\vec{a}| = \frac{1}{\sqrt{1-t}}$

$OM = CM$ より, $|\overrightarrow{OM}| = |\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC}|$ であるから

$$|\overrightarrow{OM}|^2 = |\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC}|^2 \quad \text{整理すると} \quad |\overrightarrow{OC}|^2 = 2\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OC}$$

上の第2式に $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ および (1) の結果を代入すると

$$\begin{aligned} |\vec{c}|^2 &= \{t\vec{a} + (1-t)\vec{b} + t\vec{c}\} \cdot \vec{c} \\ &= t\vec{c} \cdot \vec{a} + (1-t)\vec{b} \cdot \vec{c} + t|\vec{c}|^2 \end{aligned}$$

$\vec{c} \cdot \vec{a} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 1$ を代入すると $(1-t)|\vec{c}|^2 = 1$ ゆえに $|\vec{c}| = \frac{1}{\sqrt{1-t}}$

$$|\vec{c}| = |\vec{a}|, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} \quad \text{より} \quad \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{b}||\vec{c}|}$$

ゆえに $\cos \angle AOB = \cos \angle BOC$ すなわち $\angle AOB = \angle BOC$

$\triangle OAB$ と $\triangle OCB$ において, $OA = OC$, OB は共通, $\angle AOB = \angle BOC$ であるから, 2辺夾角が等しい. よって, $\triangle OAB \equiv \triangle OCB$ ■

4 (1) $f(x) = 2\sqrt{x}e^{-x}$ について

$$(2\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad (2\sqrt{x})'' = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}, \quad (e^{-x})' = -e^{-x}, \quad (e^{-x})'' = e^{-x}$$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{x}}e^{-x} + 2\sqrt{x} \cdot (-e^{-x}) = \frac{1-2x}{\sqrt{x}}e^{-x} \\ f''(x) &= -\frac{1}{2x\sqrt{x}}e^{-x} + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}(-e^{-x}) + 2\sqrt{x}e^{-x} \\ &= \frac{-1-4x+4x^2}{2x\sqrt{x}}e^{-x} \end{aligned}$$

$$f'(a) = 0 \text{ より } 1 - 2a = 0 \ (a \geq 0) \quad \text{ゆえに} \quad a = \frac{1}{2}$$

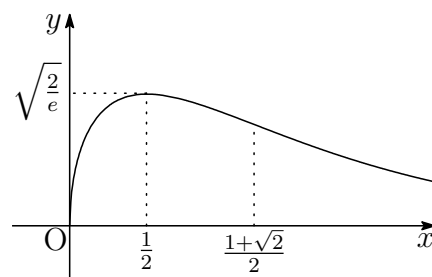
$$f''(b) = 0 \text{ より } -1 - 4b + 4b^2 = 0 \ (b \geq 0) \quad \text{ゆえに} \quad b = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$$

x	0	...	$\frac{1}{2}$...	$\frac{1+\sqrt{2}}{2}$...
$f'(x)$		+	0	-	-	-
$f''(x)$		-	-	-	0	+
$f(x)$	0	↗	極大	↘	変曲点	↘

$$\text{極大値 } f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{e}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

増減表により $y = f(x)$ のグラフの概形は右の図のようになる.



補足 $f(x) = g(x)h(x)$ とすると

$$f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x),$$

$$f''(x) = g''(x)h(x) + 2g'(x)h'(x) + g(x)h''(x)$$

$$f'''(x) = g'''(x)h(x) + 3g''(x)h'(x) + 3g'(x)h''(x) + g(x)h'''(x)$$

一般には、次のライプニッツ (Leibniz) の公式がある¹.

$$f^{(n)}(x) = \sum_{r=0}^n {}_n C_r g^{(n-r)}(x) h^{(r)}(x)$$

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/oita/oita_2020.pdf [6]

$$\begin{aligned}
 (2) \quad V(k) &= \int_0^k x e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} \int_0^k x (e^{-2x})' dx \\
 &= -\frac{1}{2} \left[\left(x + \frac{1}{2} \right) e^{-2x} \right]_0^k = -\frac{2k+1}{4} e^{-2k} + \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

(3) 求める回転体の体積を V とすると, (2) の結果を利用して

$$\begin{aligned}
 \frac{V}{\pi} &= \int_a^b f(x)^2 dx = 4 \int_a^b x e^{-2x} dx \\
 &= 4 \int_0^b x e^{-2x} dx - 4 \int_0^a x e^{-2x} dx \\
 &= 4V(b) - 4V(a) \\
 &= -(2b+1)e^{-2b} + (2a+1)e^{-2a}
 \end{aligned}$$

上式に $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ を代入すると

$$\frac{V}{\pi} = -(2+\sqrt{2})e^{-1-\sqrt{2}} + 2e^{-1}$$

よって
$$V = \left(\frac{2}{e} - \frac{2+\sqrt{2}}{e^{1+\sqrt{2}}} \right) \pi$$

解説 本来, 部分積分法

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

は漸化式である. $f(x)$ の第 n 次導関数を $f^{(n)}(x)$ と表すように (n は自然数), ここで, n を 0 さらに負の整数まで拡張することにする. 実際にはこのような定義はないが, $f^{(-n)}(x)$ を $f(x)$ の第 n 次原始関数と定義する. 上の積分について, 部分積分法を繰り返すと

$$\begin{aligned} \int f(x)g'(x) dx &= f(x)g(x) - f^{(1)}(x)g^{(-1)}(x) + f^{(2)}(x)g^{(-2)}(x) \\ &\quad \cdots + (-1)^n f^{(n)}(x)g^{(-n)}(x) + (-1)^{n+1} \int f^{(n+1)}(x)g^{(-n)}(x) dx \end{aligned}$$

が成立する². $f(x)$ を整式, $g'(x) = e^{ax}$ とすると

$$g(x) = \frac{1}{a}e^{ax}, \quad g^{(-1)}(x) = \frac{1}{a^2}e^{ax}, \quad g^{(-2)}(x) = \frac{1}{a^3}e^{ax}, \dots \quad (\text{積分定数は省略})$$

したがって

$$\int f(x)e^{ax} dx = \frac{1}{a} \left\{ f(x) - \frac{f'(x)}{a} + \frac{f''(x)}{a^2} - \frac{f'''(x)}{a^3} + \dots \right\} e^{ax} + C$$

例えば, 上式に $a = 1, -1, -2$ を代入すると

$$\begin{aligned} \int f(x)e^x dx &= \{f(x) - f'(x) + f''(x) - f'''(x) + \dots\} e^x + C \\ \int f(x)e^{-x} dx &= -\{f(x) + f'(x) + f''(x) + f'''(x) + \dots\} e^x + C \\ \int f(x)e^{-2x} dx &= -\frac{1}{2} \left\{ f(x) + \frac{f'(x)}{2} + \frac{f''(x)}{2^2} + \frac{f'''(x)}{2^3} + \dots \right\} e^{-2x} + C \end{aligned}$$

上の第3式に $f(x) = x$ を代入すると

$$\int xe^{-2x} dx = -\frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \right) e^{-2x} + C$$

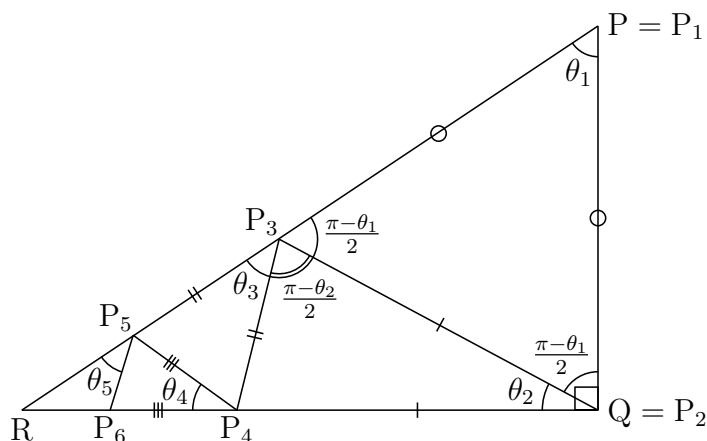
■

²<http://kumamoto.s12.xrea.com/N/TKdai/TKdai-2020.pdf> (p.14)

5 (1) 下の図から

$$\theta_1 = \theta, \quad \frac{\pi - \theta_1}{2} + \theta_2 = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi - \theta_1}{2} + \frac{\pi - \theta_2}{2} + \theta_3 = \pi$$

よって $\theta_2 = \frac{\theta}{2}, \theta_3 = \frac{3}{4}\theta$



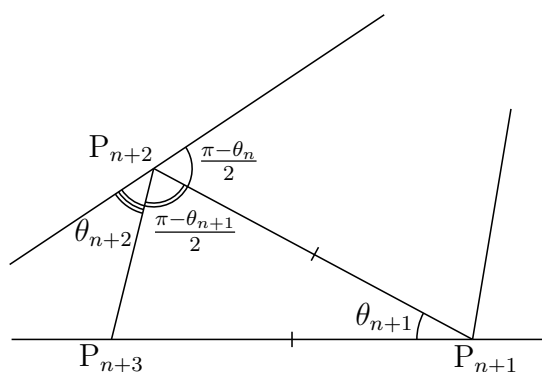
(2) 右の図から

$$\frac{\pi - \theta_n}{2} + \frac{\pi - \theta_{n+1}}{2} + \theta_{n+2} = \pi$$

したがって

$$(*) \quad \theta_{n+2} + \frac{\theta_{n+1}}{2} = \theta_{n+1} + \frac{\theta_n}{2}$$

よって, $\theta_{n+1} + \frac{\theta_n}{2}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)
は, n によらない定数である.



(3) (*) より $\theta_{n+1} + \frac{\theta_n}{2} = \theta_2 + \frac{\theta_1}{2} = \theta$ ゆえに $\theta_{n+1} - \frac{2}{3}\theta = -\frac{1}{2} \left(\theta_n - \frac{2}{3}\theta \right)$

したがって $\theta_n = \frac{2}{3}\theta + \frac{\theta}{3} \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1}$ よって $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = \frac{2}{3}\theta$

別解 $\theta_{n+2} + \frac{\theta_{n+1}}{2} = \theta_{n+1} + \frac{\theta_n}{2}$, $\theta_{n+2} - \theta_{n+1} = -\frac{1}{2}(\theta_{n+1} - \theta_n)$ より

$$\theta_{n+1} + \frac{\theta_n}{2} = \theta, \quad \theta_{n+1} - \theta_n = \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} (\theta_2 - \theta_1) = \left(-\frac{1}{2} \right)^n \theta$$

上の2式から θ_{n+1} を消去すると $\theta_n = \frac{2}{3} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right\} \theta$ ■

6 (1) $|z-1| = |z+1|$ より, $|z-1|^2 = |z+1|^2$ であるから

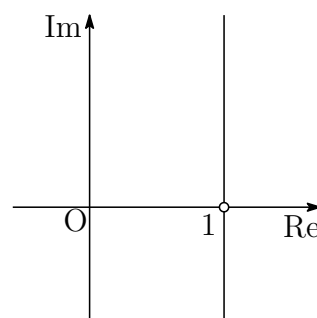
$$(z-1)(\bar{z}-1) = (z+1)(\bar{z}+1) \quad \text{整理すると} \quad z+\bar{z}=0$$

したがって $\operatorname{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2} = 0$ よって 点 z の全体は虚軸

(2) $z \neq 0, \operatorname{Re}(z) = 0$ のとき

$$w = \frac{z+1}{z} = 1 + \frac{1}{z} = 1 + \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

\bar{z} は純虚数で, $\bar{z} \neq 0$ であるから, w の描く図形は, 右の図の直線で, 点 1 を除く.



(3) (*) $w = \frac{z+1}{z-a}$ より $w-1 = \frac{a+1}{z-a}$

$a > 0$ より, $a+1 \neq 0$ であるから $w \neq 1$

(*) より $z = \frac{aw+1}{w-1}$ z は虚軸上を動くから, $z+\bar{z}=0$ より

$$\frac{aw+1}{w-1} + \frac{a\bar{w}+1}{\bar{w}-1} = 0 \quad \text{整理すると} \quad 2a|w|^2 + (1-a)(w+\bar{w}) - 2 = 0$$

したがって $|w|^2 + \frac{1-a}{2a}(w+\bar{w}) = \frac{1}{a}$

ゆえに $\left|w - \frac{a-1}{2a}\right|^2 = \left(\frac{a+1}{2a}\right)^2$ すなわち $\left|w - \frac{a-1}{2a}\right| = \frac{a+1}{2a}$

よって w は中心 $\frac{a-1}{2a}$, 半径 $\frac{a+1}{2a}$ の円 ($w \neq 1$)

別解 (*) より $w = 1 + \frac{a+1}{z-a}$

z は純虚数であるから, $z = ai \tan \theta$ とおくと $\left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$

$$\begin{aligned} w &= 1 + \frac{a+1}{a(i \tan \theta - 1)} = 1 - \frac{(a+1) \cos \theta}{a(\cos \theta - i \sin \theta)} \\ &= 1 - \frac{a+1}{a} \cos \theta (\cos \theta + i \sin \theta) = 1 - \frac{a+1}{a} (\cos^2 \theta + i \sin \theta \cos \theta) \\ &= 1 - \frac{a+1}{2a} (1 + \cos 2\theta + i \sin 2\theta) = \frac{a-1}{2a} - \frac{a+1}{2a} (\cos 2\theta + i \sin 2\theta) \end{aligned}$$

$-\pi < 2\theta < \pi$ であるから, w は点 1 を除く中心 $\frac{a-1}{2a}$, 半径 $\frac{a+1}{2a}$ の円. ■