平成 28 年度　筑波大学　２次試験前期日程 (数学問題)120 分

- 社会学類は $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ から 1 題選択，$\boxed{3}$ 必答 (数 II・B)，及び他教科との選択
- 国際総合・障害科学類は，数 II・B 選択の場合は $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ から 1 題選択，$\boxed{3}$ 必答．数 III 選択の場合は $\boxed{4}$ 〜 $\boxed{6}$ から 2 題選択，及び他教科との選択
- 教育・心理学類は $\boxed{1}$ 〜 $\boxed{3}$ 必答，$\boxed{4}$ 〜 $\boxed{6}$ から 1 題選択
- 生物資源・生物・地球・数学・物理・化学・応用理工・工学システム・情報科学類は $\boxed{1}$ 〜 $\boxed{3}$ から 2 題選択，$\boxed{4}$ 〜 $\boxed{6}$ 必答
- 情報メディア創生学類は $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ から 1 題選択，$\boxed{3}$ 〜 $\boxed{6}$ 必答
- 知識情報・図書館学類は $\boxed{2}$ 〜 $\boxed{6}$ ，または $\boxed{1}$, $\boxed{3}$ 〜 $\boxed{6}$ から 2 題選択，及び他教科との選択
- 社会工学類は $\boxed{1}$ 〜 $\boxed{3}$ から 1 題選択，$\boxed{4}$ 〜 $\boxed{6}$ 必答
- 医学・医療学類は $\boxed{1}$ 〜 $\boxed{3}$ 必答，$\boxed{4}$ 〜 $\boxed{6}$ から 2 題選択

$\boxed{\mathbf{1}}$ k を実数とする．xy 平面の曲線 $C_1 : y = x^2$ と $C_2 : y = -x^2 + 2kx + 1 - k^2$ が異なる共有点 P，Q を持つとする．ただし点 P，Q の x 座標は正であるとする．また，原点を O とする．

(1) k のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) k が (1) の範囲を動くとき，△OPQ の重心 G の軌跡を求めよ．

(3) △OPQ の面積を S とするとき，S^2 を k を用いて表せ．

(4) k が (1) の範囲を動くとする．△OPQ の面積が最大となるような k の値と，そのときの重心 G の座標を求めよ．

2 xy 平面の直線 $y = (\tan 2\theta)x$ を ℓ とする．ただし $0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ とする．図で示すように，円 C_1, C_2 を以下の (i)〜(iv) で定める．

(i) 円 C_1 は直線 ℓ および x 軸の正の部分と接する．

(ii) 円 C_1 の中心は第 1 象限にあり，原点 O から中心までの距離 d_1 は $\sin 2\theta$ である．

(iii) 円 C_2 は直線 ℓ，x 軸の正の部分，および円 C_1 と接する．

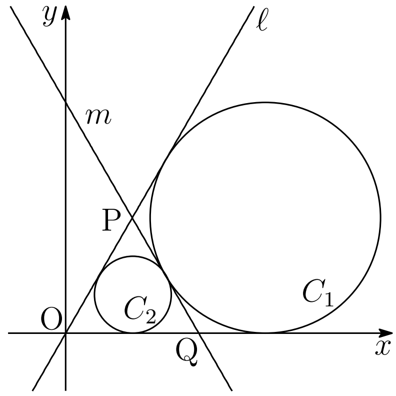
(iv) 円 C_2 の中心は第 1 象限にあり，原点 O から中心までの距離 d_2 は $d_1 > d_2$ を満たす．

円 C_1 と円 C_2 の共通接線のうち，x 軸，直線 ℓ と異なる直線を m とし，直線 m と直線 ℓ，x 軸との交点をそれぞれ P，Q とする．

(1) 円 C_1，C_2 の半径を $\sin\theta$，$\cos\theta$ を用いて表せ．

(2) θ が $0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ の範囲を動くとき，線分 PQ の長さの最大値を求めよ．

(3) (2) の最大値を与える θ について直線 m の方程式を求めよ．



3 四面体 OABC において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とおく．このとき等式

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = 1$$

が成り立つとする．t は実数の定数で，$0 < t < 1$ を満たすとする．線分 OA を $t : 1 - t$ に内分する点を P とし，線分 BC を $t : 1 - t$ に内分する点を Q とする．また，線分 PQ の中点を M とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ と t を用いて表せ．

(2) 線分 OM と線分 BM の長さが等しいとき，線分 OB の長さを求めよ．

(3) 4 点 O，A，B，C が点 M を中心とする同一球面上にあるとする．このとき，△OAB と △OCB は合同であることを示せ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 関数 $f(x)=2\sqrt{x}e^{-x}$ $(x \geqq 0)$ について次の問いに答えよ．

(1) $f'(a)=0$，$f''(b)=0$ を満たす a，b を求め，$y=f(x)$ のグラフの概形を描け．ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}e^{-x}=0$ であることは証明なしで用いてよい．

(2) $k \geqq 0$ のとき $V(k)=\displaystyle\int_0^k xe^{-2x}\,dx$ を k を用いて表せ．

(3) (1) で求めた a，b に対して曲線 $y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ $\triangle\mathrm{PQR}$ において $\angle\mathrm{RPQ}=\theta$，$\angle\mathrm{PQR}=\dfrac{\pi}{2}$ とする．点 P_n $(n=1,2,3,\cdots)$ を次で定める．

$$\mathrm{P}_1=\mathrm{P},\quad \mathrm{P}_2=\mathrm{Q},\quad \mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+2}=\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$$

ただし，点 P_{n+2} は線分 $\mathrm{P}_n\mathrm{R}$ 上にあるものとする．実数 θ_n $(n=1,2,3,\cdots)$ を

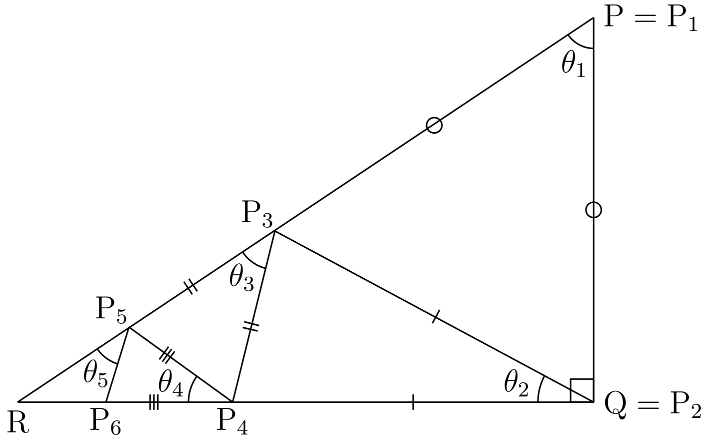
$$\theta_n=\angle\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+2}\quad(0<\theta_n<\pi)$$

で定める．

(1) θ_2，θ_3 を θ を用いて表せ，

(2) $\theta_{n+1}+\dfrac{\theta_n}{2}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ は n によらない定数であることを示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\theta_n$ を求めよ．



$\boxed{\mathbf{6}}$ 複素数平面上を動く点 z を考える．次の問いに答えよ．

(1) 等式 $|z-1|=|z+1|$ を満たす点 z の全体は虚軸であることを示せ．

(2) 点 z が原点を除いた虚軸上を動くとき，$w=\dfrac{z+1}{z}$ が描く図形は直線から1点を除いたものとなる．この図形を描け．

(3) a を正の実数とする．点 z が虚軸上を動くとき，$w=\dfrac{z+1}{z-a}$ が描く図形は円から1点を除いたものとなる．この円の中心と半径を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $C_1 : y = x^2$，$C_2 : y = -x^2 + 2kx + 1 - k^2$ の 2 式から y を消去すると

$$2x^2 - 2kx + k^2 - 1 = 0$$

この方程式の判別式を D とし，方程式の解を $\alpha,\ \beta$ とすると

$$D/4 = (-k)^2 - 2(k^2 - 1) = 2 - k^2, \quad \alpha + \beta = k, \quad \alpha\beta = \frac{k^2 - 1}{2}$$

$\alpha > 0,\ \beta > 0$ であるから，$D > 0,\ \alpha + \beta > 0,\ \alpha\beta > 0$ より

$$\begin{cases} 2 - k^2 > 0 \\ k > 0 \\ k^2 - 1 > 0 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad \begin{cases} -\sqrt{2} < k < \sqrt{2} \\ k > 0 \\ k < -1,\ 1 < k \end{cases}$$

よって，k のとりうる値の範囲は $\boldsymbol{1 < k < \sqrt{2}}$

(2) $\mathrm{P}(\alpha,\ \alpha^2)$，$\mathrm{Q}(\beta,\ \beta^2)$ とすると，$\triangle$OPQ の重心 $\mathrm{G}(x,\ y)$ は

$$x = \frac{\alpha + \beta}{3} = \frac{k}{3}, \quad y = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{3} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{3} = \frac{1}{3}, \quad 1 < k < \sqrt{2}$$

よって，G の軌跡は $\boldsymbol{y = \frac{1}{3}\ \left(\frac{1}{3} < x < \frac{\sqrt{2}}{3}\right)}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (\alpha,\ \alpha^2)$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (\beta,\ \beta^2)$ より

$$S = \frac{1}{2}|\alpha\beta^2 - \alpha^2\beta| = \frac{1}{2}\alpha\beta|\beta - \alpha|$$

よって
$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{4}(\alpha\beta)^2(\beta - \alpha)^2 = \frac{1}{4}(\alpha\beta)^2\{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta\} \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{k^2 - 1}{2}\right)^2\left\{k^2 - 4\cdot\frac{k^2 - 1}{2}\right\} = \boldsymbol{\frac{1}{16}(k^2 - 1)^2(2 - k^2)} \end{aligned}$$

(4) 正の数 $k^2 - 1,\ k^2 - 1,\ 2(2 - k^2)$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{(k^2 - 1) + (k^2 - 1) + 2(2 - k^2)}{3} \geqq \sqrt[3]{(k^2 - 1)^2\cdot 2(2 - k^2)}$$

したがって $(k^2 - 1)^2(2 - k^2) \leqq \dfrac{4}{27}$ ゆえに $S^2 \leqq \dfrac{1}{108}$

上式において，等号が成立するとき，S は最大となる．このとき

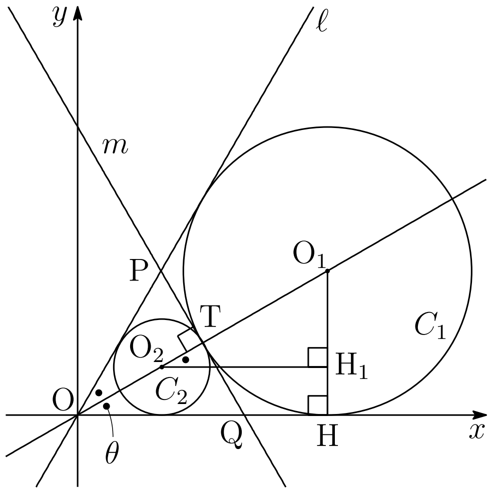
$$k^2 - 1 = 2(2 - k^2) \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{k = \frac{\sqrt{15}}{3},\ \ \mathrm{G}\left(\frac{\sqrt{15}}{9},\ \frac{1}{3}\right)}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) C_1, C_2 の中心をそれぞれ O_1, O_2 とし，C_1, C_2 の半径をそれぞれ r_1, r_2 とする．O_1 から x 軸へ垂線 OH を引き，O_2 から線分 OH に垂線 $\mathrm{O}_2\mathrm{H}_1$ を引く．$\mathrm{OO}_1 = d_1 = \sin 2\theta$ であるから，$\triangle \mathrm{OO}_1\mathrm{H}$，$\triangle \mathrm{O}_2\mathrm{O}_1\mathrm{H}_1$ について

$$\frac{\mathrm{O}_1\mathrm{H}}{\mathrm{OO}_1} = \frac{\mathrm{O}_1\mathrm{H}_1}{\mathrm{O}_2\mathrm{O}_1} = \sin\theta \quad \text{ゆえに} \quad \frac{r_1}{\sin 2\theta} = \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2} = \sin\theta$$

よって　$r_1 = \sin 2\theta \sin\theta = \mathbf{2\sin^2\theta\cos\theta}$

$$r_2 = \frac{r_1(1-\sin\theta)}{1+\sin\theta} = \frac{\mathbf{2\sin^2\theta\cos\theta(1-\sin\theta)}}{\mathbf{1+\sin\theta}}$$



(2) C_1 と C_2 の接点を T とすると

$$\mathrm{OT} = \mathrm{OO}_1 - \mathrm{TO}_1 = \sin 2\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta = 2\sin\theta\cos\theta(1-\sin\theta)$$

$$\mathrm{PT} = \mathrm{OT}\tan\theta = 2\sin\theta\cos\theta(1-\sin\theta)\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 2\sin^2\theta(1-\sin\theta)$$

したがって　$\mathrm{PQ} = 2\mathrm{PT} = 4\sin^2\theta(1-\sin\theta)$

正の数 $\sin\theta$, $\sin\theta$, $2(1-\sin\theta)$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{\sin\theta + \sin\theta + 2(1-\sin\theta)}{3} \geqq \sqrt[3]{\sin^2\theta\cdot 2(1-\sin\theta)}$$

ゆえに　$\mathrm{PQ} = 4\sin^2\theta(1-\sin\theta) \leqq \dfrac{16}{27}$　また，等号が成立するとき

$$\sin\theta = 2(1-\sin\theta) \quad \text{すなわち} \quad \sin\theta = \frac{2}{3} < \sin\frac{\pi}{4}$$

よって，$\sin\theta = \dfrac{2}{3}$ のとき，線分 PQ は最大値 $\mathbf{\dfrac{16}{27}}$ をとる．

(3) (2) の結果から，$\sin\theta = \dfrac{2}{3}$ のとき

$$\begin{aligned}\mathrm{OQ} &= \frac{\mathrm{OT}}{\cos\theta} = \frac{2\sin\theta\cos\theta(1-\sin\theta)}{\cos\theta}\\ &= 2\sin\theta(1-\sin\theta) = 2\cdot\frac{2}{3}\left(1-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}\end{aligned}$$

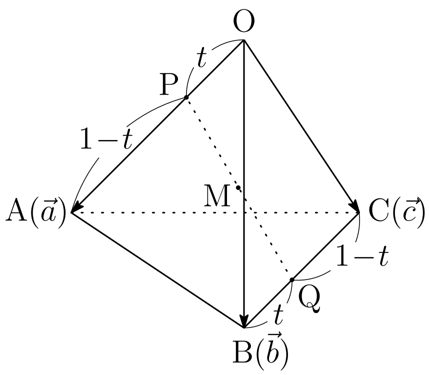
$\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$，$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

したがって，直線 OT の傾きは $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

直線 m は，点 $\mathrm{Q}\left(\dfrac{4}{9},\ 0\right)$ を通り，直線 OT と垂直であるから

$$\boldsymbol{y = -\frac{\sqrt{5}}{2}\left(x-\frac{4}{9}\right)}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) P は線分 OA を $t:1-t$ に内分し，Q は線分 BC を $t:1-t$ に内分するから



$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = t\vec{a}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (1-t)\vec{b} + t\vec{c}$$

M は線分 PQ の中点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{2} = \boldsymbol{\frac{t\vec{a}+(1-t)\vec{b}+t\vec{c}}{2}}$$

(2) $\mathrm{OM} = \mathrm{BM}$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{OM}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OM}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}|$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OM}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 \quad \text{整理すると} \quad |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 = 2\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

上の第 2 式に $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ および (1) の結果を代入すると

$$\begin{aligned}|\vec{b}|^2 &= \{t\vec{a} + (1-t)\vec{b} + t\vec{c}\}\cdot\vec{b}\\ &= t\vec{a}\cdot\vec{b} + (1-t)|\vec{b}|^2 + t\vec{b}\cdot\vec{c}\end{aligned}$$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = 1$ を代入して，整理すると　$t(|\vec{b}|^2 - 2) = 0$

$t \neq 0$ であるから　$|\vec{b}|^2 - 2 = 0$　よって　$\mathrm{OB} = |\vec{b}| = \boldsymbol{\sqrt{2}}$

(3) $\mathrm{OM}=\mathrm{AM}$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 \quad \text{整理すると} \quad |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=2\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

上の第 2 式に $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$ および (1) の結果を代入すると

$$\begin{aligned}|\vec{a}|^2&=\{t\vec{a}+(1-t)\vec{b}+t\vec{c}\}\cdot\vec{a}\\&=t|\vec{a}|^2+(1-t)\vec{a}\cdot\vec{b}+t\vec{c}\cdot\vec{a}\end{aligned}$$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1$ を代入すると　$(1-t)|\vec{a}|^2=1$　　ゆえに　$|\vec{a}|=\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$

$\mathrm{OM}=\mathrm{CM}$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 \quad \text{整理すると} \quad |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=2\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

上の第 2 式に $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ および (1) の結果を代入すると

$$\begin{aligned}|\vec{c}|^2&=\{t\vec{a}+(1-t)\vec{b}+t\vec{c}\}\cdot\vec{c}\\&=t\vec{c}\cdot\vec{a}+(1-t)\vec{b}\cdot\vec{c}+t|\vec{c}|^2\end{aligned}$$

$\vec{c}\cdot\vec{a}=\vec{b}\cdot\vec{c}=1$ を代入すると　$(1-t)|\vec{c}|^2=1$　　ゆえに　$|\vec{c}|=\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$

$|\vec{c}|=|\vec{a}|$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}$ より　$\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}||\vec{c}|}$

ゆえに　$\cos\angle\mathrm{AOB}=\cos\angle\mathrm{BOC}$　すなわち　$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{BOC}$

$\triangle\mathrm{OAB}$ と $\triangle\mathrm{OCB}$ において，$\mathrm{OA}=\mathrm{OC}$，OB は共通，$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{BOC}$ であるから，2 辺夾角が等しい．よって，$\triangle\mathrm{OAB}\equiv\triangle\mathrm{OCB}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $f(x)=2\sqrt{x}e^{-x}$ について

$$(2\sqrt{x})'=\frac{1}{\sqrt{x}},\quad (2\sqrt{x})''=-\frac{1}{2x\sqrt{x}},\quad (e^{-x})'=-e^{-x},\quad (e^{-x})''=e^{-x}$$

したがって
$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-x}+2\sqrt{x}\cdot(-e^{-x})=\frac{1-2x}{\sqrt{x}}e^{-x}\\ f''(x)&=-\frac{1}{2x\sqrt{x}}e^{-x}+2\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}(-e^{-x})+2\sqrt{x}e^{-x}\\ &=\frac{-1-4x+4x^2}{2x\sqrt{x}}e^{-x}\end{aligned}$$

$f'(a)=0$ より　$1-2a=0$ $(a\geqq 0)$　ゆえに　$\boldsymbol{a=\frac{1}{2}}$

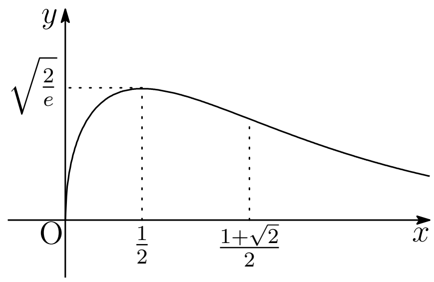
$f''(b)=0$ より　$-1-4b+4b^2=0$ $(b\geqq 0)$　ゆえに　$\boldsymbol{b=\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1+\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0	↗	極大	↘	変曲点	↘

極大値 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\frac{2}{e}}$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$

増減表により $y=f(x)$ のグラフの概形は右の図のようになる．



補足 $f(x)=g(x)h(x)$ とすると

$$\begin{aligned}f'(x)&=g'(x)h(x)+g(x)h'(x),\\ f''(x)&=g''(x)h(x)+2g'(x)h'(x)+g(x)h''(x)\\ f'''(x)&=g'''(x)h(x)+3g''(x)h'(x)+3g'(x)h''(x)+g(x)h'''(x)\end{aligned}$$

一般には，次のライプニッツ (Leibniz) の公式がある [1]．

$$f^{(n)}(x)=\sum_{r=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_r\,g^{(n-r)}(x)h^{(r)}(x)$$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/oita/oita_2020.pdf $\boxed{6}$

(2) $V(k)=\displaystyle\int_0^k xe^{-2x}\,dx=-\frac{1}{2}\int_0^k x(e^{-2x})'\,dx$

$$=-\frac{1}{2}\left[\ \left(x+\frac{1}{2}\right)e^{-2x}\ \right]_0^k=\boldsymbol{-\frac{2k+1}{4}e^{-2k}+\frac{1}{4}}$$

(3) 求める回転体の体積を V とすると，(2) の結果を利用して

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi}&=\int_a^b f(x)^2\,dx=4\int_a^b xe^{-2x}\,dx\\&=4\int_0^b xe^{-2x}\,dx-4\int_0^a xe^{-2x}\,dx\\&=4V(b)-4V(a)\\&=-(2b+1)e^{-2b}+(2a+1)e^{-2a}\end{aligned}$$

上式に $a=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ を代入すると

$$\frac{V}{\pi}=-(2+\sqrt{2})e^{-1-\sqrt{2}}+2e^{-1}$$

よって　　$\boldsymbol{V=\left(\dfrac{2}{e}-\dfrac{2+\sqrt{2}}{e^{1+\sqrt{2}}}\right)\pi}$

解説 本来，部分積分法

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(g)g(x)\,dx$$

は漸化式である．$f(x)$ の第 n 次導関数を $f^{(n)}(x)$ と表すように (n は自然数)，ここで，n を 0 さらに負の整数まで拡張することにする．実際にはこのような定義はないが，$f^{(-n)}(x)$ を $f(x)$ の第 n 次原始関数と定義する．上の積分について，部分積分法を繰り返すと

$$\begin{aligned}\int f(x)g'(x)\,dx &= f(x)g(x) - f^{(1)}(x)g^{(-1)}(x) + f^{(2)}(x)g^{(-2)}(x) \\ &\quad \cdots + (-1)^n f^{(n)}(x)g^{(-n)}(x) + (-1)^{n+1}\int f^{(n+1)}(x)g^{(-n)}(x)\,dx\end{aligned}$$

が成立する[2]．$f(x)$ を整式，$g'(x) = e^{ax}$ とすると

$$g(x) = \frac{1}{a}e^{ax}, \quad g^{(-1)}(x) = \frac{1}{a^2}e^{ax}, \quad g^{(-2)}(x) = \frac{1}{a^3}e^{ax}, \cdots \quad \text{(積分定数は省略)}$$

したがって

$$\boldsymbol{\int f(x)e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}\left\{f(x) - \frac{f'(x)}{a} + \frac{f''(x)}{a^2} - \frac{f'''(x)}{a^3} + \cdots\right\}e^{ax} + C}$$

例えば，上式に $a = 1, -1, -2$ を代入すると

$$\begin{aligned}\int f(x)e^{x}\,dx &= \{f(x) - f'(x) + f''(x) - f'''(x) + \cdots\}\,e^{x} + C \\ \int f(x)e^{-x}\,dx &= -\{f(x) + f'(x) + f''(x) + f'''(x) + \cdots\}\,e^{x} + C \\ \int f(x)e^{-2x}\,dx &= -\frac{1}{2}\left\{f(x) + \frac{f'(x)}{2} + \frac{f''(x)}{2^2} + \frac{f'''(x)}{2^3} + \cdots\right\}e^{-2x} + C\end{aligned}$$

上の第 3 式に $f(x) = x$ を代入すると

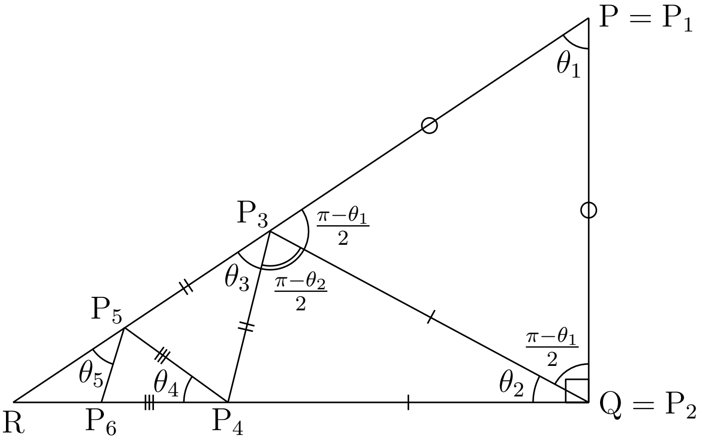
$$\int xe^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)e^{-2x} + C$$

[2]http://kumamoto.s12.xrea.com/N/TKdai/TKdai_2020.pdf (p.14)

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) 下の図から

$$\theta_1 = \theta, \quad \frac{\pi - \theta_1}{2} + \theta_2 = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi - \theta_1}{2} + \frac{\pi - \theta_2}{2} + \theta_3 = \pi$$

よって　$\boldsymbol{\theta_2 = \dfrac{\theta}{2},\ \theta_3 = \dfrac{3}{4}\theta}$



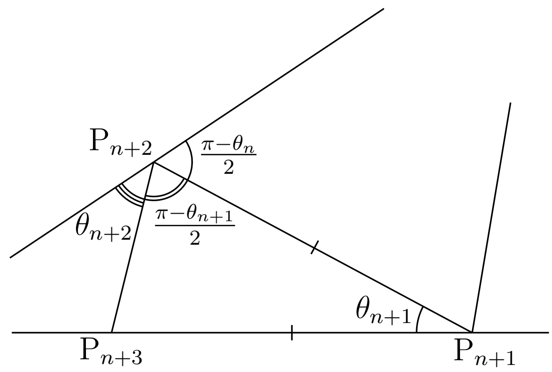
(2) 右の図から

$$\frac{\pi - \theta_n}{2} + \frac{\pi - \theta_{n+1}}{2} + \theta_{n+2} = \pi$$

したがって

$$(*) \quad \theta_{n+2} + \frac{\theta_{n+1}}{2} = \theta_{n+1} + \frac{\theta_n}{2}$$

よって，$\theta_{n+1} + \dfrac{\theta_n}{2}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ は，n によらない定数である．



(3) $(*)$ より　$\theta_{n+1} + \dfrac{\theta_n}{2} = \theta_2 + \dfrac{\theta_1}{2} = \theta$　ゆえに　$\theta_{n+1} - \dfrac{2}{3}\theta = -\dfrac{1}{2}\left(\theta_n - \dfrac{2}{3}\theta\right)$

したがって　$\theta_n = \dfrac{2}{3}\theta + \dfrac{\theta}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$　　よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \theta_n = \boldsymbol{\frac{2}{3}\theta}$

別解 $\theta_{n+2} + \dfrac{\theta_{n+1}}{2} = \theta_{n+1} + \dfrac{\theta_n}{2}$，$\theta_{n+2} - \theta_{n+1} = -\dfrac{1}{2}(\theta_{n+1} - \theta_n)$ より

$$\theta_{n+1} + \frac{\theta_n}{2} = \theta, \quad \theta_{n+1} - \theta_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}(\theta_2 - \theta_1) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \theta$$

上の２式から θ_{n+1} を消去すると　$\theta_n = \dfrac{2}{3}\left\{1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}\theta$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $|z-1|=|z+1|$ より，$|z-1|^2=|z+1|^2$ であるから

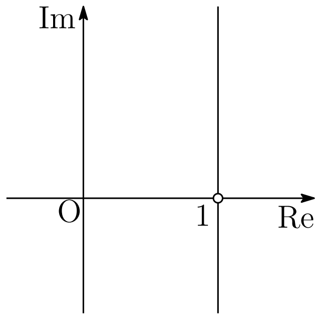
$$(z-1)(\overline{z}-1)=(z+1)(\overline{z}+1) \quad \text{整理すると} \quad z+\overline{z}=0$$

したがって　$\mathrm{Re}(z)=\dfrac{z+\overline{z}}{2}=0$　よって　点 z の全体は虚軸

(2) $z \neq 0$，$\mathrm{Re}(z)=0$ のとき

$$w=\frac{z+1}{z}=1+\frac{1}{z}=1+\frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

$\overline{z}$ は純虚数で，$\overline{z}\neq 0$ であるから，w の描く図形は，右の図の直線で，点 1 を除く．



(3) $(*)$　$w=\dfrac{z+1}{z-a}$ より　$w-1=\dfrac{a+1}{z-a}$

$a>0$ より，$a+1\neq 0$ であるから　$w\neq 1$

$(*)$ より　$z=\dfrac{aw+1}{w-1}$　z は純虚数であるから，$z+\overline{z}=0$ より

$$\frac{aw+1}{w-1}+\frac{a\overline{w}+1}{\overline{w}-1}=0 \quad \text{整理すると} \quad 2a|w|^2+(1-a)(w+\overline{w})-2=0$$

したがって　$|w|^2+\dfrac{1-a}{2a}(w+\overline{w})=\dfrac{1}{a}$

ゆえに　$\left|w-\dfrac{a-1}{2a}\right|^2=\left(\dfrac{a+1}{2a}\right)^2$　すなわち　$\left|w-\dfrac{a-1}{2a}\right|=\dfrac{a+1}{2a}$

よって　w は中心 $\boldsymbol{\dfrac{a-1}{2a}}$，半径 $\boldsymbol{\dfrac{a+1}{2a}}$ の円 $(w\neq 1)$

別解 $(*)$ より　$w=1+\dfrac{a+1}{z-a}$

z は純虚数であるから，$z=ai\tan\theta$ とおくと $\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\begin{aligned} w&=1+\frac{a+1}{a(i\tan\theta-1)}=1-\frac{(a+1)\cos\theta}{a(\cos\theta-i\sin\theta)}\\ &=1-\frac{a+1}{a}\cos\theta(\cos\theta+i\sin\theta)=1-\frac{a+1}{a}(\cos^2\theta+i\sin\theta\cos\theta)\\ &=1-\frac{a+1}{2a}(1+\cos 2\theta+i\sin 2\theta)=\frac{a-1}{2a}-\frac{a+1}{2a}(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)\end{aligned}$$

$-\pi<2\theta<\pi$ であるから，w は点 1 を除く中心 $\dfrac{a-1}{2a}$，半径 $\dfrac{a+1}{2a}$ の円．