

## 平成26年度 筑波大学 2次試験前期日程(数学問題)120分

- 社会学類 [1], [4] 必答(数II・B), 及び他教科との選択.
- 国際総合学類 数II・B選択の場合は [1], [4] 必答.  
数III・C選択の場合は [2], [3] から1題選択, [5], [6] から1題選択.
- 教育・障害学類 数II・B選択の場合は [1], [4] 必答.  
数III選択の場合は [2], [3] 必答. 数C選択の場合は [5], [6] 必答.
- 心理学類 [1], [4] 必答, [2], [3], [5], [6] から2題選択.
- 生物学類・生物資源学類・医学・医療学類  
[1] ~ [3] 必答, [4] ~ [6] から2題選択.
- 地球・数学・物理・化学・応用理工・工学システム・情報科学・情報メディア  
創生学類 [2], [3], [5], [6] 必答, [1], [4] から1題選択.
- 社会工学類 [2], [3] 必答, [1], [4] から1題選択, [5], [6] から1題選択.
- 知識情報・図書館学類 [1] ~ [3] から1題選択, [4] ~ [6] から1題選択.

**1**  $f(x) = x^3 - x$  とする.  $y = f(x)$  のグラフに点  $P(a, b)$  から引いた接線は3本あるとする. 3つの接点  $A(\alpha, f(\alpha))$ ,  $B(\beta, f(\beta))$ ,  $C(\gamma, f(\gamma))$  を頂点とする三角形の重心を  $G$  とする.

- (1)  $\alpha + \beta + \gamma$ ,  $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$  および  $\alpha\beta\gamma$  を  $a, b$  を用いて表せ.
- (2) 点  $G$  の座標を  $a, b$  を用いて表せ.
- (3) 点  $G$  の  $x$  座標が正で,  $y$  座標が負となるような点  $P$  の範囲を図示せよ.

**2**  $xy$  平面上の曲線  $C: y = x \sin x + \cos x - 1$  ( $0 < x < \pi$ ) に対して, 以下の問いに答えよ. ただし  $3 < \pi < \frac{16}{5}$  であることは証明なしで用いてよい.

- (1) 曲線  $C$  と  $x$  軸の交点はただ1つであることを示せ.
- (2) 曲線  $C$  と  $x$  軸の交点を  $A(\alpha, 0)$  とする.  $\alpha > \frac{2}{3}\pi$  であることを示せ.
- (3) 曲線  $C$ ,  $y$  軸および直線  $y = \frac{\pi}{2} - 1$  で囲まれている部分の面積を  $S$  とする.  
また,  $xy$  平面の原点  $O$ , 点  $A$  および曲線  $C$  の点  $B\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} - 1\right)$  を頂点とする三角形  $OAB$  の面積を  $T$  とする.  $S < T$  であることを示せ.

3 関数  $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$  を  $x > 0$  で考える.  $y = f(x)$  のグラフの点  $(a, f(a))$  における接線を  $l_a$  とし,  $l_a$  と  $y$  軸との交点を  $(0, Y(a))$  とする. 以下の問いに答えよ. ただし, 実数  $k$  に対して  $\lim_{t \rightarrow \infty} t^k e^{-t} = 0$  であることは証明なしで用いてよい.

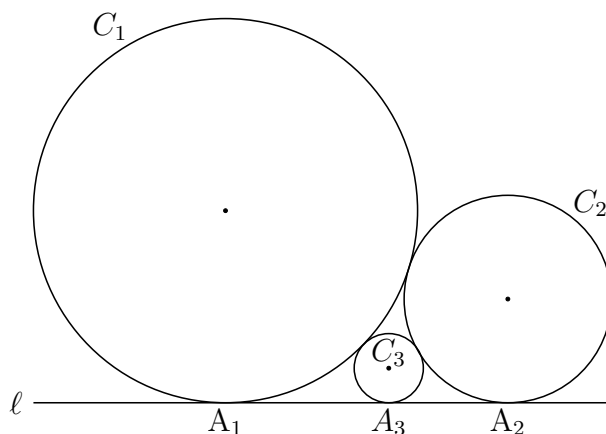
- (1)  $Y(a)$  がとりうる値の範囲を求めよ.
- (2)  $0 < a < b$  である  $a, b$  に対して,  $l_a$  と  $l_b$  が  $x$  軸上で交わるとき,  $a$  のとりうる値の範囲を求め,  $b$  を  $a$  で表せ.
- (3) (2) の  $a, b$  に対して,  $Z(a) = Y(a) - Y(b)$  とおく.  $\lim_{a \rightarrow +0} Z(a)$  および  $\lim_{a \rightarrow +0} \frac{Z'(a)}{a}$  を求めよ.

4 平面上の直線  $l$  に同じ側で接する 2 つの円  $C_1, C_2$  があり,  $C_1$  と  $C_2$  も互いに外接している.  $l, C_1, C_2$  で囲まれた領域内に, これら 3 つと互いに接する円  $C_3$  を作る. 同様に  $l, C_n, C_{n+1}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) で囲まれた領域内にあり, これら 3 つと互いに接する円を  $C_{n+2}$  とする. 円  $C_n$  の半径を  $r_n$  とし,  $x_n = \frac{1}{\sqrt{r_n}}$  とおく. このとき, 以下の問いに答えよ. ただし,  $r_1 = 16, r_2 = 9$  とする.

- (1)  $l$  が  $C_1, C_2, C_3$  と接する点を, それぞれ  $A_1, A_2, A_3$  とおく. 線分  $A_1A_2, A_1A_3, A_2A_3$  の長さおよび  $r_3$  の値を求めよ.
- (2) ある定数  $a, b$  に対して  $x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) となることを示せ.  $a, b$  の値も求めよ.
- (3) (2) で求めた  $a, b$  に対して, 2 次方程式  $t^2 = at + b$  の解を  $\alpha, \beta$  ( $\alpha > \beta$ ) とする.  $x_1 = c\alpha^2 + d\beta^2$  を満たす有理数  $c, d$  の値を求めよ. ただし,  $\sqrt{5}$  が無理数であることは証明なしで用いてよい.
- (4) (3) の  $c, d, \alpha, \beta$  に対して,

$$x_n = c\alpha^{n+1} + d\beta^{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

となることを示し, 数列  $\{r_n\}$  の一般項を  $\alpha, \beta$  を用いて表せ.



**5** 実数を成分とする正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

について、以下の問いに答えよ。

(1)  $AB = BA$  を満たす  $A$  は、実数  $x, y$  を用いて  $A = xB + yE$  と表せることを示せ。

(2)  $A^3 = E$  のとき

$$(t^2 - \Delta)A = (t\Delta + 1)E$$

を示せ。ただし、 $t = a + d$ ,  $\Delta = ad - bc$  をとする。

(3)  $AB = BA$  かつ  $A^3 = E$  を満たす  $A$  をすべて求めよ。

**6**  $xy$  平面上に楕円

$$C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad (a > \sqrt{13})$$

および双曲線

$$C_2: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (b > 0)$$

があり、 $C_1$  と  $C_2$  は同一の焦点をもつとする。また  $C_1$  と  $C_2$  の交点  $P\left(2\sqrt{1 + \frac{t^2}{b^2}}, t\right)$

( $t > 0$ ) における  $C_1, C_2$  の接線をそれぞれ  $l_1, l_2$  とする。

(1)  $a$  と  $b$  の間に成り立つ関係式を求め、点  $P$  の座標を  $a$  を用いて表せ。

(2)  $l_1$  と  $l_2$  が直交することを示せ。

(3)  $a$  が  $a > \sqrt{13}$  を満たしながら動くときの点  $P$  の軌跡を図示せよ。

## 解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad f(x) = x^3 - x \text{ より } f'(x) = 3x^2 - 1$$

曲線  $y = f(x)$  上の点  $(t, f(t))$  における接線の方程式は

$$y - (t^3 - t) = (3t^2 - 1)(x - t) \quad \text{すなわち} \quad y = (3t^2 - 1)x - 2t^3$$

これが点  $P(a, b)$  を通るから

$$b = (3t^2 - 1)a - 2t^3 \quad \text{整理すると} \quad 2t^3 - 3at^2 + a + b = 0 \quad (*)$$

この3次方程式の解が  $\alpha, \beta, \gamma$  であるから, 解と係数の関係により

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{3a}{2}, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0, \quad \alpha\beta\gamma = -\frac{a+b}{2}$$

(2)  $G$  の座標を  $(X, Y)$  とすると

$$3X = \alpha + \beta + \gamma = \frac{3a}{2},$$

$$3Y = f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma)$$

$$= (\alpha^3 - \alpha) + (\beta^3 - \beta) + (\gamma^3 - \gamma)$$

$$= (\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3) - (\alpha + \beta + \gamma)$$

$$= (\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma) + 3\alpha\beta\gamma - (\alpha + \beta + \gamma)$$

$$= (\alpha + \beta + \gamma)\{(\alpha + \beta + \gamma)^2 - 3(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\} + 3\alpha\beta\gamma - (\alpha + \beta + \gamma)$$

$$= \left(\frac{3a}{2}\right) \left\{ \left(\frac{3a}{2}\right)^2 - 3 \cdot 0 \right\} + 3 \left(-\frac{a+b}{2}\right) - \frac{3a}{2}$$

$$= \frac{27}{8}a^3 - 3a - \frac{3b}{2}$$

$$\text{したがって } X = \frac{a}{2}, \quad Y = \frac{9}{8}a^3 - a - \frac{b}{2} \quad \text{よって } G \left( \frac{a}{2}, \frac{9}{8}a^3 - a - \frac{b}{2} \right)$$

(3) (\*) より,  $g(t) = 2t^3 - 3at^2 + a + b$  とおくと

$$g'(t) = 6t^2 - 6at = 6t(t - a)$$

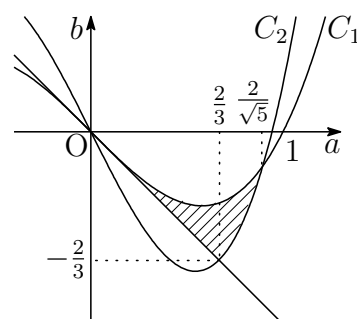
方程式 (\*) が相異なる 3 つの実数解をもつから,  $g(0)g(a) < 0$  より<sup>1</sup>

$$(a + b)(-a^3 + a + b) < 0 \quad (**)$$

また, (2) の結果から

$$\frac{a}{2} > 0, \quad \frac{9}{8}a^3 - a - \frac{b}{2} < 0 \quad \text{すなわち} \quad a > 0, \quad b > \frac{9}{4}a^3 - 2a \quad (***)$$

$C_1 : b = a^3 - a$ ,  $C_2 : b = \frac{9}{4}a^3 - 2a$  とすると,  
(\*\*), (\*\*\*) より, 求める領域は, 右の図の  
斜線部分で, 境界線は含まない.



<sup>1</sup>[http://kumamoto.s12.xrea.com/N/CHdai/CHdai\\_2017.pdf](http://kumamoto.s12.xrea.com/N/CHdai/CHdai_2017.pdf) (p.12 参照)

- 2 (1)  $f(x) = x \sin x + \cos x - 1$  とおくと  $(0 < x < \pi)$   $f'(x) = x \cos x$

$x$	$(0)$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$(\pi)$
$f'(x)$		$+$	$0$	$-$	
$f(x)$	$(0)$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2} - 1$	$\searrow$	$(-2)$

したがって、増減表から

$$f(\alpha) = 0 \quad (0 < \alpha < \pi)$$

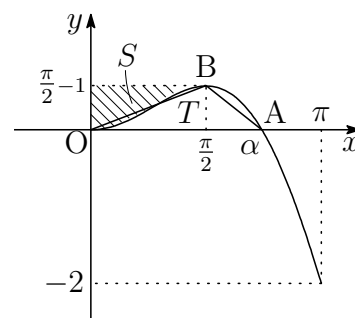
を満たす  $\alpha$  ( $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ) がただ1つ存在する。

$$(2) f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2} = \sqrt{3} \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\frac{\pi}{3} > 1 > \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ であるから } f\left(\frac{2\pi}{3}\right) > 0$$

$$\text{したがって } f\left(\frac{2\pi}{3}\right) > f(\alpha)$$

$$\text{区間 } \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \text{ において, } f(x) \text{ は単調減少であるから } \frac{2\pi}{3} < \alpha$$



- (3)  $S$  は右の図の斜線部分の面積であるから

$$\begin{aligned} S &= \frac{\pi}{2} \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x \sin x + \cos x - 1) dx \\ &= \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2} - \left[ -x \cos x + 2 \sin x - x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4} - 2 \end{aligned}$$

$T$  は、 $\triangle OAB$  の面積であるから

$$T = \frac{1}{2} \alpha \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right)$$

上の2式と(2)の結果から

$$\begin{aligned} T - S &= \frac{1}{2} \alpha \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) - \left( \frac{\pi^2}{4} - 2 \right) \\ &> \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{3} \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) - \left( \frac{\pi^2}{4} - 2 \right) \\ &= 2 - \frac{\pi^2}{12} - \frac{\pi}{3} > 2 - \frac{1}{12} \left( \frac{16}{5} \right)^2 - \frac{1}{3} \cdot \frac{16}{5} = \frac{2}{25} > 0 \end{aligned}$$

よって  $S < T$  ■

**3** (1)  $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$  より  $f'(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$

曲線  $y = f(x)$  上の点  $(a, f(a))$  における接線  $l_a$  の方程式は

$$y - e^{-\frac{a^2}{2}} = -ae^{-\frac{a^2}{2}}(x - a)$$

すなわち  $y = -ae^{-\frac{a^2}{2}}x + (a^2 + 1)e^{-\frac{a^2}{2}} \quad \dots (*)$

したがって  $Y(a) = (a^2 + 1)e^{-\frac{a^2}{2}}$

$$\begin{aligned} Y'(a) &= 2ae^{-\frac{a^2}{2}} + (a^2 + 1)(-a)e^{-\frac{a^2}{2}} = (a - a^3)e^{-\frac{a^2}{2}} \quad (**) \\ &= -a(a + 1)(a - 1)e^{-\frac{a^2}{2}} \end{aligned}$$

$a$	(0)	...	1	...
$Y'(a)$		+	0	-
$Y(a)$		↗	$\frac{2}{\sqrt{e}}$	↘

また,  $\lim_{a \rightarrow +0} Y(a) = 1, \lim_{a \rightarrow \infty} Y(a) = 0$  よって  $0 < Y(a) \leq \frac{2}{\sqrt{e}}$

(2) (\*) より  $y = e^{-\frac{a^2}{2}}(-ax + a^2 + 1)$

したがって,  $l_a$  の  $x$  軸との交点の  $x$  座標は  $(0 < a < b)$

$$-ax + a^2 + 1 = 0 \quad \text{すなわち} \quad x = \frac{a^2 + 1}{a} \quad \dots \textcircled{1}$$

同様に,  $l_b$  の  $x$  軸との交点の  $x$  座標は  $x = \frac{b^2 + 1}{b} \quad \dots \textcircled{2}$

このとき, ①, ② が一致するから

$$\frac{a^2 + 1}{a} = \frac{b^2 + 1}{b} \quad \text{ゆえに} \quad (b - a)(ab - 1) = 0$$

このとき,  $0 < a < b$  より,  $b - a \neq 0$  であるから

$$ab - 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad b = \frac{1}{a} > a > 0$$

上の第2式から  $b = \frac{1}{a}, 0 < a < 1$

(3)  $b = \frac{1}{a}$  であるから,  $a \rightarrow +0$  のとき  $b \rightarrow \infty$

$$\lim_{a \rightarrow +0} Y(a) = 1, \quad \lim_{b \rightarrow \infty} Y(b) = \lim_{b \rightarrow \infty} (b^2 + 1)e^{-\frac{b^2}{2}} = 0$$

このとき,  $Z(a) = Y(a) - Y(b)$  について

$$\lim_{a \rightarrow +0} Z(a) = \lim_{a \rightarrow +0} Y(a) - \lim_{b \rightarrow \infty} Y(b) = 1 - 0 = 1$$

$Z(a) = Y(a) - Y(b)$  の両辺を  $a$  について微分すると

$$\begin{aligned} Z'(a) &= Y'(a) - Y'(b) \cdot \frac{db}{da} = Y'(a) - Y'(b) \left( -\frac{1}{a^2} \right) \\ &= Y'(a) + b^2 Y'(b) \end{aligned}$$

したがって, (\*\*) により

$$\begin{aligned} \frac{Z'(a)}{a} &= \frac{Y'(a)}{a} + \frac{b^2 Y'(b)}{a} = \frac{Y'(a)}{a} + b^3 Y'(b) \\ &= (1 - a^2)e^{-\frac{a^2}{2}} + b^2 \cdot b^2 (1 - b^2)e^{-\frac{b^2}{2}} \end{aligned}$$

$\lim_{a \rightarrow +0} (1 - a^2)e^{-\frac{a^2}{2}} = 1$ ,  $\lim_{b \rightarrow \infty} b^2 \cdot b^2 (1 - b^2)e^{-\frac{b^2}{2}} = 0$  であるから

$$\lim_{a \rightarrow +0} \frac{Z'(a)}{a} = 1$$



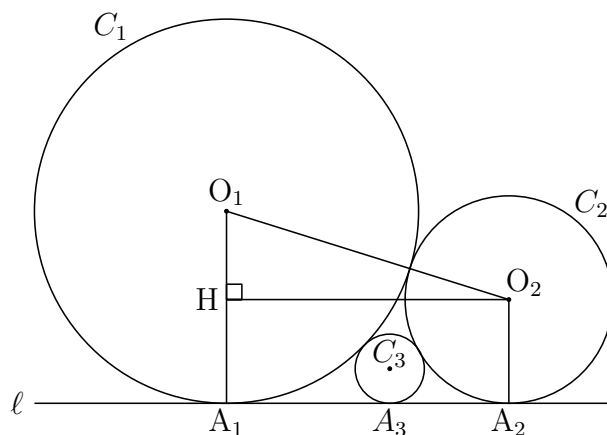


- 4 (1) 図の直角三角形  $O_1O_2H$  について,  $O_1O_2 = r_1 + r_2$ ,  $O_1H = r_1 - r_2$  より

$$HO_2^2 = O_1O_2^2 - O_1H^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2 = 4r_1r_2$$

したがって  $A_1A_2 = HO_2 = 2\sqrt{r_1r_2} \cdots \textcircled{1}$

同様に  $A_1A_3 = 2\sqrt{r_1r_3} \cdots \textcircled{2}$ ,  $A_2A_3 = 2\sqrt{r_2r_3} \cdots \textcircled{3}$



$A_1A_3 + A_2A_3 = A_1A_2$  であるから,  $\textcircled{1}$ ,  $\textcircled{2}$ ,  $\textcircled{3}$  より

$$2\sqrt{r_1r_3} + 2\sqrt{r_2r_3} = 2\sqrt{r_1r_2} \quad \text{ゆえに} \quad \sqrt{r_3} = \frac{\sqrt{r_1r_2}}{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2}} \quad (*)$$

(\*) を  $\textcircled{2}$ ,  $\textcircled{3}$  に代入すると

$$A_1A_3 = \frac{2r_1\sqrt{r_2}}{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2}}, \quad A_2A_3 = \frac{2r_2\sqrt{r_1}}{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2}}$$

$r_1 = 16$ ,  $r_2 = 9$  を  $\textcircled{1}$  および上の 2 式に代入すると

$$A_1A_2 = 24, \quad A_1A_3 = \frac{96}{7}, \quad A_2A_3 = \frac{72}{7}$$

また, (\*) に代入すると  $\sqrt{r_3} = \frac{12}{7}$  よって  $r_3 = \frac{144}{49}$

(2) (\*) の両辺の逆数をとると  $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_2}} + \frac{1}{\sqrt{r_1}}$

(1) で示した計算と同様にして  $\frac{1}{\sqrt{r_{n+2}}} = \frac{1}{\sqrt{r_{n+1}}} + \frac{1}{\sqrt{r_n}}$

したがって  $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$  よって  $\mathbf{a = b = 1}$

(3) 2次方程式  $t^2 = at + b$  は,  $a = b = 1$  のとき  $t^2 = t + 1$   
 $\alpha, \beta$  はこの方程式の解であるから ( $\alpha > \beta$ )

$$\alpha^2 = \alpha + 1, \quad \beta^2 = \beta + 1 \quad (**)$$

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

また, 2次方程式  $t^2 - t - 1 = 0$  の解と係数の関係および上式から

$$\alpha + \beta = 1, \quad \alpha\beta = -1, \quad \alpha - \beta = \sqrt{5}$$

$x_1 = \frac{1}{\sqrt{r_1}} = \frac{1}{4}$  および (\*\*) を  $x_1 = c\alpha^2 + d\beta^2$  に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} &= c(\alpha + 1) + d(\beta + 1) = c \cdot \frac{3 + \sqrt{5}}{2} + d \cdot \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \\ &= \frac{3}{2}(c + d) + \frac{1}{2}(c - d)\sqrt{5} \end{aligned}$$

$c, d$  は有理数であるから  $\frac{3}{2}(c + d) = \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{2}(c - d) = 0$

これを解いて  $\mathbf{c = d = \frac{1}{12}}$

$$(4) \quad c = d = \frac{1}{12} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} c\alpha^3 + d\beta^3 &= \frac{1}{12}(\alpha^3 + \beta^3) = \frac{1}{12}\{(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)\} \\ &= \frac{1}{12}\{1^3 - 3 \cdot (-1)(1)\} = \frac{1}{3} = x_2 \end{aligned}$$

$$(A) \quad x_n = \frac{1}{12}(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) \text{ とおく.}$$

[1]  $n = 1, 2$  のとき, (A) は成立する.

[2]  $n \leq k$  のとき, (A) が成立すると仮定すると,  $x_{k+1} = x_k + x_{k-1}$  より

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \frac{1}{12}(\alpha^{k+1} + \beta^{k+1}) + \frac{1}{12}(\alpha^k + \beta^k) \\ &= \frac{1}{12}(\alpha^{k+1} + \alpha^k) + \frac{1}{12}(\beta^{k+1} + \beta^k) \end{aligned}$$

(\*\*) より,  $\alpha^{k+1} + \alpha^k = \alpha^{k+2}$ ,  $\beta^{k+1} + \beta^k = \beta^{k+2}$  であるから

$$x_{k+1} = \frac{1}{12}\alpha^{k+2} + \frac{1}{12}\beta^{k+2}$$

したがって,  $n \leq k+1$  のときも (A) は成立する.

[1], [2] より, すべての自然数  $n$  について, (A) は成立する.

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{r_n}} \text{ より, } r_n = \frac{1}{x_n^2} \text{ であるから}$$

$$r_n = \left( \frac{12}{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}} \right)^2 = \frac{144}{(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1})^2}$$

別解  $x_{n+2} - (\alpha + \beta)x_{n+1} + \alpha\beta x_n = 0$  より

$$\begin{aligned} x_{n+1} - \alpha x_n &= \beta(x_n - \alpha x_{n-1}) \\ &= \beta^{n-1}(x_2 - \alpha x_1) = \beta^{n-1}(\alpha\beta)^2 \left( \frac{1}{3} - \frac{\alpha}{4} \right) \\ &= \frac{1}{12}\beta^{n+1}(4\alpha^2 - 3\alpha^3) = \frac{1}{12}(1 - 2\alpha)\beta^{n+1} \\ &= \frac{1}{12}(\beta - \alpha)\beta^{n+1}, \end{aligned}$$

$$\text{同様に } x_{n+1} - \beta x_n = \frac{1}{12}(\alpha - \beta)\alpha^{n+1}$$

上の 2 式から  $x_{n+1}$  を消去して整理すると

$$x_n = \frac{1}{12}(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1})$$



5 (1)  $AB = BA$  より

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a-b & a+2b \\ c-d & c+2d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -a+2c & -b+2d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(1, 1), (2, 2) 成分から  $-b = c$

(1, 2), (2, 1) 成分から  $a - d = -b = c$

上の2式から,  $c = -b$ ,  $d = a + b$  とおくと

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a+b \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + (a-b) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= bB + (a-b)E \end{aligned}$$

(2)  $A$  にハミルトン・ケリーの定理を適用すると

$$A^2 - tA + \Delta E = O \quad \text{ゆえに} \quad A^2 = tA - \Delta E$$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad A^3 &= tA^2 - \Delta A = t(tA - \Delta E) - \Delta A \\ &= (t^2 - \Delta)A - t\Delta E \end{aligned}$$

$$A^3 = E \text{ より } (t^2 - \Delta)A - t\Delta E = E \quad \text{よって} \quad (t^2 - \Delta)A = (t\Delta + 1)E$$

(3)  $t^2 - \Delta \neq 0$  のとき,  $A$  は  $E$  のスカラー倍であるから,  $A^3 = E$  より  $A = E$   
 $t^2 - \Delta = 0$  のとき,  $t\Delta + 1 = 0$  であるから  $t = -1$ ,  $\Delta = 1 \dots (*)$

$AB = BA$  より, (1) の結果から,  $A = xB + yE$  とおけるから

$$A = x \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & x \\ -x & 2x+y \end{pmatrix} \quad (**)$$

$$(*) \text{ より } 3x + 2y = -1, (x+y)(2x+y) + x^2 = 1$$

上の2式から  $y$  を消去して整理すると  $x = \pm 1$

上の第1式より,  $(x, y) = (1, -2), (-1, 1)$  であるから

$$\begin{aligned} A &= E, B - 2E, -B + E \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■

$$\boxed{6} \quad (1) \quad C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad (a > \sqrt{13}), \quad C_2: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (b > 0)$$

$C_1, C_2$  の焦点は, それぞれ  $(\sqrt{a^2 - 9}, 0), (\sqrt{4 + b^2}, 0)$

これらの焦点の座標が一致するから

$$\sqrt{a^2 - 9} = \sqrt{4 + b^2} \quad \text{ゆえに} \quad b^2 = a^2 - 13$$

点  $P\left(2\sqrt{1 + \frac{t^2}{b^2}}, t\right)$  ( $t > 0$ ) は  $C_2$  上にある.

$$\text{また, 点 } P \text{ が } C_1 \text{ にあるから} \quad \frac{4}{a^2} \left(1 + \frac{t^2}{b^2}\right) + \frac{t^2}{9} = 1$$

$$\text{ゆえに} \quad t^2 = \frac{9b^2(a^2 - 4)}{36 + a^2b^2} = \frac{9(a^2 - 13)(a^2 - 4)}{36 + a^2(a^2 - 13)} = \frac{9(a^2 - 13)}{a^2 - 9}$$

$$\text{上式より,} \quad \frac{t^2}{b^2} = \frac{t^2}{a^2 - 13} = \frac{9}{a^2 - 9} \quad \text{であるから} \quad (a > \sqrt{13})$$

$$2\sqrt{1 + \frac{t^2}{b^2}} = 2\sqrt{1 + \frac{9}{a^2 - 9}} = \frac{2a}{\sqrt{a^2 - 9}}$$

$$t > 0 \text{ より, } t = \frac{3\sqrt{a^2 - 13}}{\sqrt{a^2 - 9}} \text{ であるから} \quad P\left(\frac{2a}{\sqrt{a^2 - 9}}, \frac{3\sqrt{a^2 - 13}}{\sqrt{a^2 - 9}}\right)$$

$$(2) \quad s = \frac{2a}{\sqrt{a^2 - 9}} \text{ とすると} \quad l_1: \frac{sx}{a^2} + \frac{ty}{9} = 1, \quad l_2: \frac{sx}{4} - \frac{ty}{b^2} = 1$$

$l_1, l_2$  の法線ベクトルをそれぞれ, 次のようにおく.

$$\vec{u} = \left(\frac{s}{a^2}, \frac{t}{9}\right), \quad \vec{v} = \left(\frac{s}{4}, -\frac{t}{b^2}\right)$$

$$\text{このとき} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{s^2}{4a^2} - \frac{t^2}{9b^2} = \frac{1}{4a^2} \cdot \frac{4a^2}{a^2 - 9} - \frac{1}{9(a^2 - 13)} \cdot \frac{9(a^2 - 13)}{a^2 - 9} = 0$$

したがって  $\vec{u} \perp \vec{v}$  よって  $l_1 \perp l_2$

$$(3) s = \frac{2a}{\sqrt{a^2 - 9}}, \quad t = \frac{3\sqrt{a^2 - 13}}{\sqrt{a^2 - 9}} \text{ より } (a > \sqrt{13})$$

$$s^2 = \frac{4a^2}{a^2 - 9} = 4 + \frac{36}{a^2 - 9}$$

$$t^2 = \frac{9(a^2 - 13)}{a^2 - 9} = 9 - \frac{36}{a^2 - 9}$$

上の2式から  $s^2 + t^2 = 13$

また,  $a > \sqrt{13}$  より,  $0 < \frac{36}{a^2 - 9} < 9$  であるから

$$2 < s < \sqrt{13}, \quad 0 < t < 3$$

よって, 求める点Pの軌跡は, 下の図の実線部分である.  
ただし,  $\circ$  は含まない.

