平成25年度　筑波大学　2次試験前期日程(数学問題)120分

- 社会学類 $\boxed{1}$, $\boxed{4}$ 必答 (数II・B)，及び他教科との選択.
- 国際総合学類　数II・B 選択の場合は $\boxed{1}$, $\boxed{4}$ 必答.
  数III・C 選択の場合は $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ から1題選択，$\boxed{5}$, $\boxed{6}$ から1題選択.
- 教育・障害学類　数II・B 選択の場合は $\boxed{1}$, $\boxed{4}$ 必答.
  数III 選択の場合は $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ 必答．数C 選択の場合は $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ 必答.
- 心理学類　$\boxed{1}$, $\boxed{4}$ 必答，$\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ から2題選択.
- 生物学類・生物資源学類・医学・医療学類
  $\boxed{1}$ 〜 $\boxed{3}$ 必答，$\boxed{4}$ 〜 $\boxed{6}$ から2題選択.
- 地球・数学・物理・化学・応用理工・工学システム・情報科学・情報メディア創生学類　$\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ 必答，$\boxed{1}$, $\boxed{4}$ から1題選択.
- 社会工学類　$\boxed{2}$, $\boxed{3}$ 必答，$\boxed{1}$, $\boxed{4}$ から1題選択，$\boxed{5}$, $\boxed{6}$ から1題選択.
- 知識情報・図書館学類　$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{3}$ から1題選択，$\boxed{4}$ 〜 $\boxed{6}$ から1題選択.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $f(x)$，$g(t)$ を

$$f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$$
$$g(t) = \cos 3t - \cos 2t + \cos t$$

とおく.

(1) $2g(t) - 1 = f(2\cos t)$ が成り立つことを示せ.

(2) $\theta = \dfrac{\pi}{7}$ のとき，$2g(\theta)\cos\theta = 1 + \cos\theta - 2g(\theta)$ が成り立つことを示せ.

(3) $2\cos\dfrac{\pi}{7}$ は3次方程式 $f(x) = 0$ の解であることを示せ.

2 n は自然数とする．

(1) $1 \leqq k \leqq n$ を満たす自然数 k に対して

$$\int_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi} \sin 2nt \cos t\,dt = (-1)^{k+1}\frac{2n}{4n^2-1}\left(\cos\frac{k}{2n}\pi + \cos\frac{k-1}{2n}\pi\right)$$

が成り立つことを示せ．

(2) 媒介変数 t によって

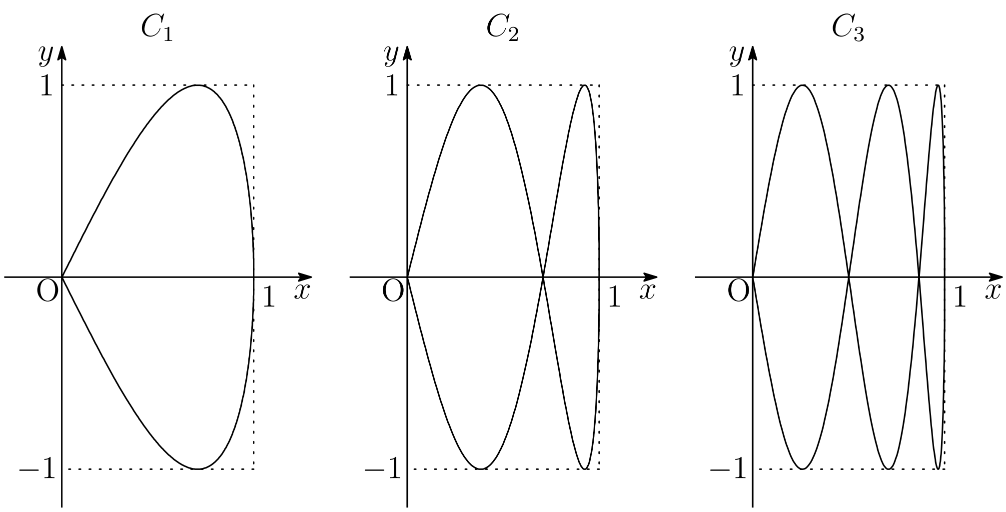
$$x = \sin t, \quad y = \sin 2nt \quad (0 \leqq t \leqq \pi)$$

と表される曲線 C_n で囲まれた部分の面積 S_n を求めよ．ただし，必要なら

$$\sum_{k=1}^{n-1} \cos\frac{k}{2n}\pi = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tan\frac{\pi}{4n}} - 1\right) \quad (n \geqq 2)$$

を用いてよい．

(3) 極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．



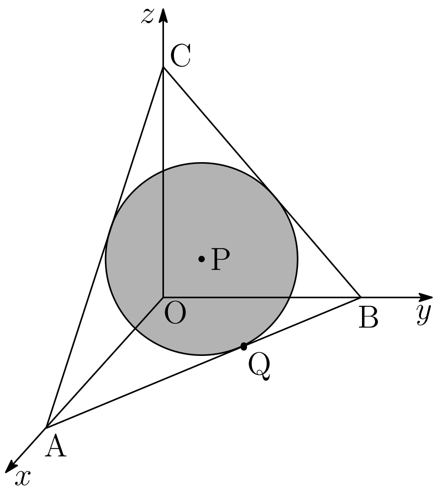
3 xyz 空間において，点 A(1, 0, 0)，B(0, 1, 0)，C(0, 0, 1) を通る平面上にあり，正三角形 ABC に内接する円板を D とする．円板 D の中心を P，円板 D と辺 AB の接点を Q とする．

(1) 点 P と点 Q の座標を求めよ．

(2) 円板 D が平面 $z=t$ と共有点をもつ t の範囲を求めよ．

(3) 円板 D と平面 $z=t$ の共通部分が線分であるとき，その線分の長さを t を用いて表せ．

(4) 円板 D を z 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ．



4 3 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ が

$$a_{n+1} = -b_n - c_n \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$
$$b_{n+1} = -c_n - a_n \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$
$$c_{n+1} = -a_n - b_n \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

および $a_1 = a$，$b_1 = b$，$c_1 = c$ を満たすとする．ただし，a，b，c は定数とする．

(1) $p_n = a_n + b_n + c_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$
で与えられる数列 $\{p_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) $q_n = (-1)^n\{(a_n)^2 + (b_n)^2 + (c_n)^2\} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$
で与えられる数列 $\{q_n\}$ の初項から第 $2n$ 項までの和を T_n とする．$a+b+c$ が奇数であれば，すべての自然数 n に対して T_n が正の奇数であることを数学的帰納法を用いて示せ．

5 2次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ．ただし，a，b，c，d は実数とする．

(1) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を満たす A は存在しないことを示せ．

(2) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ を満たす A をすべて求めよ．

(3) (2) で求めた A のそれぞれについて $A + A^2 + \cdots + A^{2013}$ を求めよ．

6 楕円 $C : \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ の，直線 $y = mx$ と平行な2接線を ℓ_1，ℓ_1' とし，ℓ_1，ℓ_1' に直交する C の2接線を ℓ_2，ℓ_2' とする．

(1) ℓ_1 と ℓ_1' の方程式を m を用いて表せ．

(2) ℓ_1 と ℓ_1' の距離 d_1 および ℓ_2 と ℓ_2' の距離 d_2 をそれぞれ m を用いて表せ．ただし，平行な2直線 ℓ_1，ℓ_1' の距離とは，ℓ の1点と直線 ℓ' の距離である．

(3) $(d_1)^2 + (d_2)^2$ は m によらず一定であることを示せ．

(4) ℓ_1，ℓ_1'，ℓ_2，ℓ_2' で囲まれる長方形の面積 S を d_1 を用いて表せ．さらに m が変化するとき，S の最大値を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$，$g(t) = \cos 3t - \cos 2t + \cos t$ より

$$\begin{aligned} 2g(t) - 1 &= 2(\cos 3t - \cos 2t + \cos t) - 1 \\ &= 2\cos 3t - 2\cos 2t + 2\cos t - 1 \\ &= 2(4\cos^3 t - 3\cos t) - 2(2\cos^2 t - 1) + 2\cos t - 1 \\ &= 8\cos^3 t - 4\cos^2 t - 4\cos t + 1 \\ &= (2\cos t)^2 - (2\cos t)^2 - 2{\cdot}2\cos t + 1 \\ &= f(2\cos t) \end{aligned}$$

(2) $\begin{aligned}[t] 2g(\theta)\cos\theta &= 2(\cos 3\theta - \cos 2\theta + \cos\theta)\cos\theta \\ &= 2\cos 3\theta\cos\theta - 2\cos 2\theta\cos\theta + 2\cos^2\theta \\ &= (\cos 4\theta + \cos 2\theta) - (\cos 3\theta + \cos\theta) + \cos 2\theta + 1 \\ &= \cos 4\theta - \cos 3\theta + 2\cos 2\theta - \cos\theta + 1 \end{aligned}$

$\theta = \dfrac{\pi}{7}$ より，$\cos 4\theta = -\cos 3\theta$ であるから

$$\begin{aligned} 2g(\theta)\cos\theta &= -2\cos 3\theta + 2\cos 2\theta - \cos\theta + 1 \\ &= 1 + \cos\theta - 2(\cos 3\theta - \cos 2\theta + \cos\theta) \\ &= 1 + \cos\theta - 2g(\theta) \end{aligned}$$

(3) $\theta = \dfrac{\pi}{7}$ のとき，(2) の結果から

$$\{2g(\theta) - 1\}(1 + \cos\theta) = 0$$

$1 + \cos\theta \neq 0$ であるから　　$2g(\theta) - 1 = 0$

したがって，(1) の結果から　　$f(2\cos\theta) = 0$

よって，$2\cos\dfrac{\pi}{7}$ は，3 次方程式 $f(x) = 0$ の解である．

別解 $\theta=\dfrac{\pi}{7}$ のとき，$w=\cos\theta+i\sin\theta$ とすると，$w^7+1=0$ より

$$(w+1)(w^6-w^5+w^4-w^3+w^2-w+1)=0$$

$w+1\neq0$ であるから

$$w^6-w^5+w^4-w^3+w^2-w+1=0$$

上式の実部に注目すると

$$\cos6\theta-\cos5\theta+\cos4\theta-\cos3\theta+\cos2\theta-\cos\theta+1=0$$

$\cos6\theta=-\cos\theta$，$\cos5\theta=-\cos2\theta$，$\cos4\theta=-\cos3\theta$ であるから

$$\begin{aligned}-2\cos3\theta+2\cos2\theta-2\cos\theta+1&=0\\2(\cos3\theta-\cos2\theta+\cos\theta)-1&=0\end{aligned}$$

したがって　$2g(\theta)-1=0$　(1) の結果から　$f(2\cos\theta)=0$

よって，$2\cos\dfrac{\pi}{7}$ は，3 次方程式 $f(x)=0$ の解である．■

$\boxed{2}$ (1) $I_k=\displaystyle\int_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi}\sin2nt\cos t\,dt=\frac{1}{2}\int_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi}\{\sin(2n+1)t+\sin(2n-1)t\}$ とおくと

$$\begin{aligned}I_k&=-\frac{1}{2(2n+1)}\Big[\cos(2nt+t)\Big]_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi}-\frac{1}{2(2n-1)}\Big[\cos(2nt-t)\Big]_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi}\\
&=-\frac{1}{2(2n+1)}\left\{\cos\left(k\pi+\frac{k}{2n}\pi\right)-\cos\left((k-1)\pi+\frac{k-1}{2n}\pi\right)\right\}\\
&\qquad-\frac{1}{2(2n-1)}\left\{\cos\left(k\pi-\frac{k}{2n}\pi\right)-\cos\left((k-1)\pi-\frac{k-1}{2n}\pi\right)\right\}\\
&=-\frac{1}{2(2n+1)}\left\{(-1)^k\cos\frac{k}{2n}\pi-(-1)^{k-1}\cos\frac{k-1}{2n}\pi\right\}\\
&\qquad-\frac{1}{2(2n-1)}\left\{(-1)^k\cos\frac{k}{2n}\pi-(-1)^{k-1}\cos\frac{k-1}{2n}\pi\right\}\\
&=\frac{(-1)^{k+1}}{2(2n+1)}\left(\cos\frac{k}{2n}\pi+\cos\frac{k-1}{2n}\pi\right)+\frac{(-1)^{k+1}}{2(2n-1)}\left(\cos\frac{k}{2n}\pi+\cos\frac{k-1}{2n}\pi\right)\\
&=(-1)^{k+1}\frac{2n}{4n^2-1}\left(\cos\frac{k}{2n}\pi+\cos\frac{k-1}{2n}\pi\right)\end{aligned}$$

別解 $I_k=\displaystyle\int_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi}\sin 2nt\cos t\,dt$ とし，$u=2nt-(k-1)\pi$ とおくと

$$\frac{du}{dt}=2n$$

t	$\frac{k-1}{2n}\pi \longrightarrow \frac{k}{2n}\pi$
u	$0 \longrightarrow \pi$

$$\begin{aligned}
I_k &= \frac{1}{2n}\int_0^{\pi}\sin\{u+(k-1)\pi\}\cos\frac{u+(k-1)\pi}{2n}\,du \\
&= \frac{(-1)^{k-1}}{2n}\int_0^{\pi}\sin u\cos\frac{u+(k-1)\pi}{2n}\,du \\
&= \frac{(-1)^{k-1}}{4n}\int_0^{\pi}\left\{\sin\left(\frac{2n+1}{2n}u+\frac{k-1}{2n}\pi\right)+\sin\left(\frac{2n-1}{2n}u-\frac{k-1}{2n}\pi\right)\right\}du \\
&= \frac{(-1)^{k}}{2(2n+1)}\Big[\ \cos\left(\frac{2n+1}{2n}u+\frac{k-1}{2n}\pi\right)\ \Big]_0^{\pi} \\
&\qquad\qquad + \frac{(-1)^{k}}{2(2n-1)}\Big[\ \cos\left(\frac{2n-1}{2n}u-\frac{k-1}{2n}\pi\right)\ \Big]_0^{\pi} \\
&= \frac{(-1)^{k}}{2(2n+1)}\left\{\cos\left(\pi+\frac{k}{2n}\pi\right)-\cos\frac{k-1}{2n}\pi\right\} \\
&\qquad\qquad + \frac{(-1)^{k}}{2(2n-1)}\left\{\cos\left(\pi-\frac{k}{2n}\pi\right)-\cos\frac{k-1}{2n}\pi\right\} \\
&= \frac{(-1)^{k+1}}{2(2n+1)}\left(\cos\frac{k}{2n}\pi+\cos\frac{k-1}{2n}\pi\right) \\
&\qquad\qquad + \frac{(-1)^{k+1}}{2(2n-1)}\left(\cos\frac{k}{2n}\pi+\cos\frac{k-1}{2n}\pi\right) \\
&= (-1)^{k+1}\frac{2n}{4n^2-1}\left(\cos\frac{k}{2n}\pi+\cos\frac{k-1}{2n}\pi\right)
\end{aligned}$$

(2) $\sin(\pi - t) = \sin t$，$\sin 2n(\pi - t) = -\sin 2nt$ より，曲線 C_n の $0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$ の部分と $\frac{\pi}{2} \leqq t \leqq \pi$ の部分は x 軸に関して対称である．

$x = \sin t$，$y = \sin 2nt$ より

$$\begin{aligned}
\frac{S_n}{2} &= \int_0^1 |y|\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |y|\frac{dx}{dt}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin 2nt|\cos t\,dt \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{\frac{k-1}{2n}}^{\frac{k}{2n}} \sin 2nt \cos t\,dt \right| = \sum_{k=1}^{n} |I_k| \\
&= \frac{2n}{4n^2-1}\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{k}{2n}\pi + \cos\frac{k-1}{2n}\pi\right) \\
&= \frac{2n}{4n^2-1}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{k}{2n}\pi + 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{k}{2n}\pi\right) \\
&= \frac{2n}{4n^2-1}\left(2\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{k}{2n}\pi + 1\right) = \frac{2n}{4n^2-1}\cdot\frac{1}{\tan\frac{\pi}{4n}}
\end{aligned}$$

よって $$\boldsymbol{S_n = \frac{4n}{(4n^2-1)\tan\frac{\pi}{4n}}}$$

(3) (2) の結果から

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{16n^2}{(4n^2-1)\pi}\cdot\frac{\frac{\pi}{4n}}{\tan\frac{\pi}{4n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{4}{\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)\pi}\cdot\frac{\frac{\pi}{4n}}{\tan\frac{\pi}{4n}} = \boldsymbol{\frac{4}{\pi}}$$

補足 $n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k}{2n}\pi &= \frac{1}{\sin\frac{\pi}{4n}}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k}{2n}\pi\sin\frac{\pi}{4n} \\
&= \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{4n}}\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{2k+1}{4n}\pi - \sin\frac{2k-1}{4n}\pi\right) \\
&= \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{4n}}\left(\sin\frac{2n+1}{4n}\pi - \sin\frac{\pi}{4n}\right) \\
&= \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{4n}}\left(\cos\frac{\pi}{4n} - \sin\frac{\pi}{4n}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tan\frac{\pi}{4n}} - 1\right)
\end{aligned}$$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) △ABC は正三角形であるから，点 P は △ABC の重心である．

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})=\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)\quad \text{よって}\quad \mathbf{P}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}},\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}},\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right)$$

また，点 Q は線分 AB の中点である．

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)\quad \text{よって}\quad \mathbf{Q}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\ \mathbf{0}\right)$$

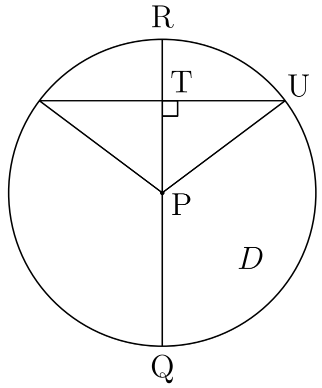
(2) 点 P に関して点 Q と対称な点を R とすると　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}=2\overrightarrow{\mathrm{OP}}$

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=2\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=2\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)=\left(\frac{1}{6},\ \frac{1}{6},\ \frac{2}{3}\right)$$

よって，求める t の値の範囲は　$\mathbf{0}\leqq \boldsymbol{t}\leqq\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\left(-\frac{1}{6},-\frac{1}{6},\ \frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\ 1\right)$

線分 QR 上の点 T の z 座標が t であるとき



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OT}}&=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+t\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\ 1\right)\\&=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)+t\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\ 1\right)\\&=\left(\frac{1-t}{2},\ \frac{1-t}{2},\ t\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PT}}=\overrightarrow{\mathrm{OT}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\left(\frac{1-t}{2},\ \frac{1-t}{2},\ t\right)-\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)\\&=\left(\frac{1}{6}-\frac{t}{2},\ \frac{1}{6}-\frac{t}{2},t-\frac{1}{3}\right)=(3t-1)\overrightarrow{\mathrm{QP}}\end{aligned}$$

右の図において $|\overrightarrow{\mathrm{PU}}|=|\overrightarrow{\mathrm{QP}}|=\frac{1}{\sqrt{6}}$ より

$$\begin{aligned}\mathrm{TU}^2&=|\overrightarrow{\mathrm{PU}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{PT}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{QP}}|^2-(3t-1)^2|\overrightarrow{\mathrm{QP}}|^2\\&=\frac{1}{6}\{1-(3t-1)^2\}=t-\frac{3}{2}t^2\end{aligned}$$

よって，求める線分の長さは　$2\mathrm{TU}=\mathbf{2}\sqrt{\boldsymbol{t}-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{t}^{\mathbf{2}}}$

(4) z 軸上に点 $\mathrm{T}'(0,\ 0,\ t)$ をとると，$\angle\mathrm{T'TU} = 90^\circ$ であるから，求める立体の体積を V とすると

$$\frac{V}{\pi} = \int_0^{\frac{2}{3}} (\mathrm{T'U}^2 - \mathrm{T'T}^2)\,dt = \int_0^{\frac{2}{3}} \mathrm{TU}^2\,dt = \int_0^{\frac{2}{3}} \left(t - \frac{3}{2}t^2\right) dt$$
$$= \frac{3}{2}\int_0^{\frac{2}{3}} t\left(\frac{2}{3} - t\right) dt = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{27}$$

よって　$\boldsymbol{V = \dfrac{2}{27}\pi}$ ■

4 (1) $(*)\begin{cases} a_{n+1} = -b_n - c_n & (n = 1, 2, 3, \cdots) \\ b_{n+1} = -c_n - a_n & (n = 1, 2, 3, \cdots) \\ c_{n+1} = -a_n - b_n & (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$

$(*)$ の 3 式の辺々を加えると

$$a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = -2(a_n + b_n + c_n) \quad \text{すなわち} \quad p_{n+1} = -2p_n$$

$p_1 = a + b + c$ であるから，$p_n = (a + b + c)(-2)^{n-1}$ より

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} p_k = (a + b + c)\cdot\frac{1 - (-2)^n}{1 - (-2)} = \boldsymbol{\frac{1}{3}(a + b + c)\{1 - (-2)^n\}}$$

(2) $(*)$ の第 1 式から第 2 式の辺々を引くと

$$a_{n+1} - b_{n+1} = a_n - b_n \quad \text{ゆえに} \quad a_n - b_n = a - b \quad \cdots①$$

同様にして　$b_n - c_n = b - c$　$\cdots②$，　$c_n - a_n = c - a$　$\cdots③$

また，(1) の結果から　$a_n + b_n + c_n = (a + b + c)(-2)^{n-1}$　$\cdots(**)$

$(**) + ① - ③$ より

$$3a_n = (a + b + c)(-2)^{n-1} + 2a - b - c$$
$$= 3a + (a + b + c)\{(-2)^{n-1} - 1\}$$

よって　$\boldsymbol{a_n = a + \dfrac{1}{3}(a + b + c)\{(-2)^{n-1} - 1\}}$

同様に　$\boldsymbol{b_n = b + \dfrac{1}{3}(a + b + c)\{(-2)^{n-1} - 1\}}$

$\boldsymbol{c_n = c + \dfrac{1}{3}(a + b + c)\{(-2)^{n-1} - 1\}}$

(3) $q_n = (-1)^n\{(a_n)^2 + (b_n)^2 + (c_n)^2\}$，$T_n = \sum_{j=1}^{2n} q_j$ について

(A)　「T_n は正の奇数である」

［1］ $n = 1$ のとき

$$\begin{aligned}T_1 &= -\{(a_1)^2 + (b_1)^2 + (c_1)^2\} + (-1)^2\{(a_2)^2 + (b_2)^2 + (c_2)^2\}\\ &= -(a^2 + b^2 + c^2) + (-b - c)^2 + (-c - a)^2 + (-a - b)^2\\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca\\ &= (a + b + c)^2\end{aligned}$$

$a + b + c$ は奇数であるから，T_1 は正の奇数である．
よって，$n = 1$ のとき，(A) は成立する．

［2］ $n = k$ のとき，T_k が正の奇数であると仮定すると

$$\begin{aligned}T_{k+1} &= \sum_{j=1}^{2(k+1)} q_j = \sum_{j=1}^{2k} q_j + q_{2k+1} + q_{2k+2}\\ &= T_k + q_{2k+1} + q_{2k+2} \qquad (***)\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}q_{2k+1} + q_{2k+2} &= (-1)^{2k+1}\{(a_{2k+1})^2 + (b_{2k+1})^2 + (c_{2k+1})^2\}\\ &\qquad + (-1)^{2k+2}\{(a_{2k+2})^2 + (b_{2k+2})^2 + (c_{2k+2})^2\}\\ &= -\{(a_{2k+1})^2 + (b_{2k+1})^2 + (c_{2k+1})^2\} + (-b_{2k+1} - c_{2k+1})^2\\ &\qquad + (-c_{2k+1} - a_{2k+1})^2 - (-a_{2k+1} - b_{2k+1})^2\\ &= {a_{2k+1}}^2 + {b_{2k+1}}^2 + {c_{2k+1}}^2\\ &\qquad + 2a_{2k+1}b_{2k+1} + 2b_{2k+1}c_{2k+1} + 2c_{2k+1}a_{2k+1}\\ &= (a_{2k+1} + b_{2k+1} + c_{2k+1})^2 = (p_{2k+1})^2\\ &= \{(a + b + c)(-2)^{2k}\}^2 = (a + b + c)^2 \cdot 2^{4k}\end{aligned}$$

$q_{2k+1} + q_{2k}$ は，偶数であるから，$(***)$ より，T_{k+1} は奇数となる．

［1］，［2］より，すべての自然数 n について，(A) は成立する．■

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ のとき

$$\left|A^2\right| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{ゆえに} \quad |A|^2 = -1$$

よって，これを満たす行列 A は存在しない．

(2) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ のとき

$$\left|A^2\right| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{ゆえに} \quad |A|^2 = 1 \quad \text{すなわち} \quad |A| = \pm 1$$

(i) $|A| = 1$ のとき，ハミルトン・ケリーの定理により

$$A^2 - (\mathrm{tr}A)A + E = O \quad \text{ゆえに} \quad (\mathrm{tr}A)A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

したがって　$(\mathrm{tr}A)^2|A| = 2$　ゆえに　$\mathrm{tr}A = \pm\sqrt{2}$

よって　$A = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(ii) $|A| = -1$ のとき，ハミルトン・ケリーの定理により

$$A^2 - (\mathrm{tr}A)A - E = O \quad \text{ゆえに} \quad (\mathrm{tr}A)A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

したがって　$(\mathrm{tr}A)^2|A| = 2$　ゆえに　$-(\mathrm{tr}A)^2 = 2$

よって，これを満たす行列 A は存在しない．

(i),(ii) より　$\boldsymbol{A = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$

補足 A，B を 2 次の正方行列，k を定数とすると，次式が成立する．

$$|AB| = |A||B|, \quad |A^2| = |A|^2, \quad |kA| = k^2|A|$$

(3) $A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ より，$A^4=-E$ であるから

$$\begin{aligned}
&E+A+A^2+A^3+A^4+A^5+A^6+A^7\\
=&E+A+A^2+A^3+A^4(E+A+A^2+A^3)\\
=&E+A+A^2+A^3-E(E+A+A^2+A^3)=O,
\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{2013}A^k=A+A^2+A^3+A^4+A^5+\sum_{k=6}^{2013}A^k$$

このとき　$A^2=(\mathrm{tr}A)A-E$,

$$\begin{aligned}
A^3&=(\mathrm{tr}A)A^2-A=(\mathrm{tr}A)\{(\mathrm{tr}A)A-E\}-A\\
&=\{(\mathrm{tr}A)^2-1\}A-(\mathrm{tr}A)E=A-(\mathrm{tr}A)E
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A+A^2+A^3+A^4+A^5&=A+A^2+A^3-E-A\\
&=-E+A^2+A^3\\
&=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}+A-(\mathrm{tr}A)E\\
&=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\mp\sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\\
&=\left(1\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=6}^{2013}A^k&=A^6\sum_{k=0}^{2007}A^k\\
&=A^6\sum_{k=0}^{250}A^{8k}(E+A+A^2+A^3+A^4+A^5+A^6+A^7)=O
\end{aligned}$$

よって，$A=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ のとき (複号同順)

$$\boldsymbol{A+A^2+A^3+\cdots+A^{2013}=\left(1\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}$$

補足 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix}$ と考えてもよい． ■

6 (1) 楕円 $C : \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ に接する傾き m の直線を $y = mx + k$ とおき，2 式から y を消去すると

$$\frac{x^2}{16} + \frac{1}{9}(mx+k)^2 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \left(m^2 + \frac{9}{16}\right)x^2 + 2mkx + k^9 - 9 = 0$$

このとき，上の第 2 式の係数について

$$D/4 = (mk)^2 - \left(m^2 + \frac{9}{16}\right)(k^2 - 9) = 0$$
$$-\frac{9}{16}k^2 + 9\left(m^2 + \frac{9}{16}\right) = 0$$

これを k について解くと　$k = \pm\sqrt{16m^2+9}$

よって，ℓ_1，ℓ_1' の方程式は　$\boldsymbol{y = mx \pm \sqrt{16m^2+9}}$

(2) 点 $(x_0,\ mx_0 - \sqrt{16m^2+9})$ から直線 $mx - y + \sqrt{16m^2+9} = 0$ までの距離が d_1 に等しいから

$$d_1 = \frac{|\ mx_0 - (mx_0 - \sqrt{16m^2+9}) + \sqrt{16m^2+9}\ |}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \boldsymbol{\frac{2\sqrt{16m^2+9}}{\sqrt{m^2+1}}}$$

d_2 は上式の m を $-\dfrac{1}{m}$ に置き換えたものであるから

$$\boldsymbol{d_2 = \frac{2\sqrt{9m^2+16}}{\sqrt{m^2+1}}}$$

(3) (2) の結果から

$$(d_1)^2 + (d_2)^2 = \frac{4(16m^2+9)}{m^2+1} + \frac{4(9m^2+16)}{m^2+1} = 100$$

(4) $S = d_1d_2$ であるから，(3) の結果から

$$\boldsymbol{S = d_1\sqrt{100 - (d_1)^2}}$$

上式から　$S = \sqrt{100(d_1)^2 - (d_1)^4} = \sqrt{50^2 - ({d_1}^2 - 50)^2}$　$\cdots(*)$

${d_1}^2 = 50$ のとき　$\dfrac{4(16m^2+9)}{m^2+1} = 50$　ゆえに　$m = \pm 1$

$(*)$ より，$m = \pm 1$ のとき，S は最大値 **50** をとる． ■