平成 25 年度　筑波大学　2 次試験前期日程 (数学問題)120 分

- 社会学類 1 4 必答 (数 II・B)，及び他教科との選択.
- 国際総合学類　数 II・B 選択の場合は 1 4 必答.
  数 III・C 選択の場合は 2 3 から 1 題選択， 5 6 から 1 題選択.
- 教育・障害学類　数 II・B 選択の場合は 1 4 必答.
  数 III 選択の場合は 2 3 必答．数 C 選択の場合は 5 6 必答.
- 心理学類 1 4 必答， 2 3 5 6 から 2 題選択.
- 生物学類・生物資源学類・医学・医療学類
  1 2 3 必答， 4 5 6 から 2 題選択.
- 地球・数学・物理・化学・応用理工・工学システム・情報科学・情報メディア創生学類 2 3 5 6 必答， 1 4 から 1 題選択.
- 社会工学類 2 3 必答， 1 4 から 1 題選択， 5 6 から 1 題選択.
- 知識情報・図書館学類 1 2 3 から 1 題選択， 4 5 6 から 1 題選択.

1 $f(x)$，$g(t)$ を

$$f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$$
$$g(t) = \cos 3t - \cos 2t + \cos t$$

とおく.

(1) $2g(t) - 1 = f(2\cos t)$ が成り立つことを示せ.

(2) $\theta = \dfrac{\pi}{7}$ のとき，$2g(\theta)\cos\theta = 1 + \cos\theta - 2g(\theta)$ が成り立つことを示せ.

(3) $2\cos\dfrac{\pi}{7}$ は 3 次方程式 $f(x) = 0$ の解であることを示せ.

2 n は自然数とする．

(1) $1 \leqq k \leqq n$ を満たす自然数 k に対して

$$\int_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi} \sin 2nt \cos t \, dt = (-1)^{k+1} \frac{2n}{4n^2-1} \left(\cos \frac{k}{2n}\pi + \cos \frac{k-1}{2n}\pi \right)$$

が成り立つことを示せ．

(2) 媒介変数 t によって

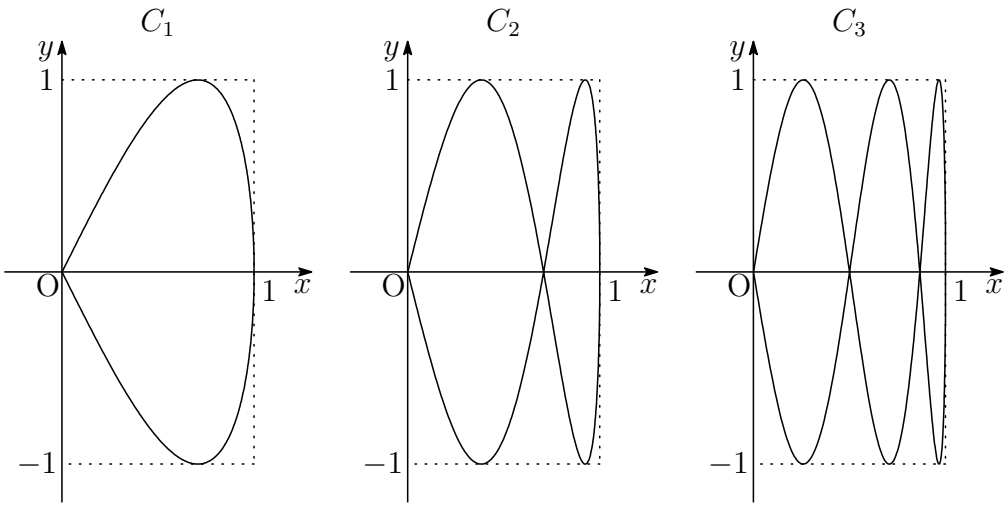
$$x = \sin t, \quad y = \sin 2nt \quad (0 \leqq t \leqq \pi)$$

と表される曲線 C_n で囲まれた部分の面積 S_n を求めよ．ただし，必要なら

$$\sum_{k=1}^{n-1} \cos \frac{k}{2n}\pi = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tan \frac{\pi}{4n}} - 1 \right) \quad (n \geqq 2)$$

を用いてよい．

(3) 極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．



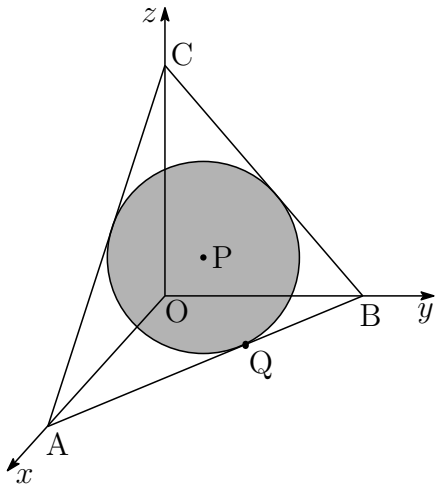
3 xyz 空間において，点 A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 1,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ 1)$ を通る平面上にあり，正三角形 ABC に内接する円板を D とする．円板 D の中心を P，円板 D と辺 AB の接点を Q とする．

(1) 点 P と点 Q の座標を求めよ．

(2) 円板 D が平面 $z=t$ と共有点をもつ t の範囲を求めよ．

(3) 円板 D と平面 $z=t$ の共通部分が線分であるとき，その線分の長さを t を用いて表せ．

(4) 円板 D を z 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ．



4 3 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ が

$$a_{n+1}=-b_n-c_n \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$
$$b_{n+1}=-c_n-a_n \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$
$$c_{n+1}=-a_n-b_n \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

および $a_1=a$，$b_1=b$，$c_1=c$ を満たすとする．ただし，a，b，c は定数とする．

(1) $p_n=a_n+b_n+c_n \quad (n=1,2,3,\cdots)$
で与えられる数列 $\{p_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) $q_n=(-1)^n\{(a_n)^2+(b_n)^2+(c_n)^2\} \quad (n=1,2,3,\cdots)$
で与えられる数列 $\{q_n\}$ の初項から第 $2n$ 項までの和を T_n とする．$a+b+c$ が奇数であれば，すべての自然数 n に対して T_n が正の奇数であることを数学的帰納法を用いて示せ．

5 2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ．ただし，a，b，c，d は実数とする．

(1) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を満たす A は存在しないことを示せ．

(2) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ を満たす A をすべて求めよ．

(3) (2) で求めた A のそれぞれについて $A + A^2 + \cdots + A^{2013}$ を求めよ．

6 楕円 $C : \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ の，直線 $y = mx$ と平行な 2 接線を ℓ_1，ℓ_1' とし，ℓ_1，ℓ_1' に直交する C の 2 接線を ℓ_2，ℓ_2' とする．

(1) ℓ_1 と ℓ_1' の方程式を m を用いて表せ．

(2) ℓ_1 と ℓ_1' の距離 d_1 および ℓ_2 と ℓ_2' の距離 d_2 をそれぞれ m を用いて表せ．ただし，平行な 2 直線 ℓ_1，ℓ_1' の距離とは，ℓ の 1 点と直線 ℓ' の距離である．

(3) $(d_1)^2 + (d_2)^2$ は m によらず一定であることを示せ．

(4) ℓ_1，ℓ_1'，ℓ_2，ℓ_2' で囲まれる長方形の面積 S を d_1 を用いて表せ．さらに m が変化するとき，S の最大値を求めよ．

解答例

1 (1) $f(x)=x^3-x^2-2x+1$，$g(t)=\cos 3t-\cos 2t+\cos t$ より

$$\begin{aligned}2g(t)-1&=2(\cos 3t-\cos 2t+\cos t)-1\\&=2\cos 3t-2\cos 2t+2\cos t-1\\&=2(4\cos^3 t-3\cos t)-2(2\cos^2 t-1)+2\cos t-1\\&=8\cos^3 t-4\cos^2 t-4\cos t+1\\&=(2\cos t)^3-(2\cos t)^2-2\cdot 2\cos t+1\\&=f(2\cos t)\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}2g(\theta)\cos\theta&=2(\cos 3\theta-\cos 2\theta+\cos\theta)\cos\theta\\&=2\cos 3\theta\cos\theta-2\cos 2\theta\cos\theta+2\cos^2\theta\\&=(\cos 4\theta+\cos 2\theta)-(\cos 3\theta+\cos\theta)+\cos 2\theta+1\\&=\cos 4\theta-\cos 3\theta+2\cos 2\theta-\cos\theta+1\end{aligned}$$

$\theta=\dfrac{\pi}{7}$ より，$\cos 4\theta=-\cos 3\theta$ であるから

$$\begin{aligned}2g(\theta)\cos\theta&=-2\cos 3\theta+2\cos 2\theta-\cos\theta+1\\&=1+\cos\theta-2(\cos 3\theta-\cos 2\theta+\cos\theta)\\&=1+\cos\theta-2g(\theta)\end{aligned}$$

(3) $\theta=\dfrac{\pi}{7}$ のとき，(2) の結果から

$$\{2g(\theta)-1\}(1+\cos\theta)=0$$

$1+\cos\theta\neq 0$ であるから　　$2g(\theta)-1=0$

したがって，(1) の結果から　　$f(2\cos\theta)=0$

よって，$2\cos\dfrac{\pi}{7}$ は，3 次方程式 $f(x)=0$ の解である．

別解 $\theta=\dfrac{\pi}{7}$ のとき，$w=\cos\theta+i\sin\theta$ とすると，$w^7+1=0$ より

$$(w+1)(w^6-w^5+w^4-w^3+w^2-w+1)=0$$

$w+1\neq 0$ であるから

$$w^6-w^5+w^4-w^3+w^2-w+1=0$$

上式の実部に注目すると

$$\cos 6\theta-\cos 5\theta+\cos 4\theta-\cos 3\theta+\cos 2\theta-\cos\theta+1=0$$

$\cos 6\theta=-\cos\theta$，$\cos 5\theta=-\cos 2\theta$，$\cos 4\theta=-\cos 3\theta$ であるから

$$-2\cos 3\theta+2\cos 2\theta-2\cos\theta+1=0$$
$$2(\cos 3\theta-\cos 2\theta+\cos\theta)-1=0$$

したがって　$2g(\theta)-1=0$　(1) の結果から　$f(2\cos\theta)=0$

よって，$2\cos\dfrac{\pi}{7}$ は，3 次方程式 $f(x)=0$ の解である．　■

2　(1)　$I_k=\displaystyle\int_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi}\sin 2nt\cos t\,dt=\frac{1}{2}\int_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi}\{\sin(2n+1)t+\sin(2n-1)t\}$ とおくと

$$\begin{aligned}
I_k&=-\frac{1}{2(2n+1)}\Big[\cos(2nt+t)\Big]_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi}-\frac{1}{2(2n-1)}\Big[\cos(2nt-t)\Big]_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi}\\
&=-\frac{1}{2(2n+1)}\left\{\cos\left(k\pi+\frac{k}{2n}\pi\right)-\cos\left((k-1)\pi+\frac{k-1}{2n}\pi\right)\right\}\\
&\qquad-\frac{1}{2(2n-1)}\left\{\cos\left(k\pi-\frac{k}{2n}\pi\right)-\cos\left((k-1)\pi-\frac{k-1}{2n}\pi\right)\right\}\\
&=-\frac{1}{2(2n+1)}\left\{(-1)^k\cos\frac{k}{2n}\pi-(-1)^{k-1}\cos\frac{k-1}{2n}\pi\right\}\\
&\qquad-\frac{1}{2(2n-1)}\left\{(-1)^k\cos\frac{k}{2n}\pi-(-1)^{k-1}\cos\frac{k-1}{2n}\pi\right\}\\
&=\frac{(-1)^{k+1}}{2(2n+1)}\left(\cos\frac{k}{2n}\pi+\cos\frac{k-1}{2n}\pi\right)+\frac{(-1)^{k+1}}{2(2n-1)}\left(\cos\frac{k}{2n}\pi+\cos\frac{k-1}{2n}\pi\right)\\
&=(-1)^{k+1}\frac{2n}{4n^2-1}\left(\cos\frac{k}{2n}\pi+\cos\frac{k-1}{2n}\pi\right)
\end{aligned}$$

別解 $I_k = \displaystyle\int_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi} \sin 2nt \cos t \, dt$ とし，$u = 2nt - (k-1)\pi$ とおくと

$$\frac{du}{dt} = 2n$$

t	$\frac{k-1}{2n}\pi \longrightarrow \frac{k}{2n}\pi$
u	$0 \longrightarrow \pi$

$$\begin{aligned}
I_k &= \frac{1}{2n}\int_0^{\pi} \sin\{u + (k-1)\pi\} \cos\frac{u + (k-1)\pi}{2n}\, du \\
&= \frac{(-1)^{k-1}}{2n}\int_0^{\pi} \sin u \cos\frac{u + (k-1)\pi}{2n}\, du \\
&= \frac{(-1)^{k-1}}{4n}\int_0^{\pi} \left\{\sin\left(\frac{2n+1}{2n}u + \frac{k-1}{2n}\pi\right) + \sin\left(\frac{2n-1}{2n}u - \frac{k-1}{2n}\pi\right)\right\} du \\
&= \frac{(-1)^k}{2(2n+1)}\left[\cos\left(\frac{2n+1}{2n}u + \frac{k-1}{2n}\pi\right)\right]_0^{\pi} \\
&\qquad + \frac{(-1)^k}{2(2n-1)}\left[\cos\left(\frac{2n-1}{2n}u - \frac{k-1}{2n}\pi\right)\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{(-1)^k}{2(2n+1)}\left\{\cos\left(\pi + \frac{k}{2n}\pi\right) - \cos\frac{k-1}{2n}\pi\right\} \\
&\qquad + \frac{(-1)^k}{2(2n-1)}\left\{\cos\left(\pi - \frac{k}{2n}\pi\right) - \cos\frac{k-1}{2n}\pi\right\} \\
&= \frac{(-1)^{k+1}}{2(2n+1)}\left(\cos\frac{k}{2n}\pi + \cos\frac{k-1}{2n}\pi\right) \\
&\qquad + \frac{(-1)^{k+1}}{2(2n-1)}\left(\cos\frac{k}{2n}\pi + \cos\frac{k-1}{2n}\pi\right) \\
&= (-1)^{k+1}\frac{2n}{4n^2-1}\left(\cos\frac{k}{2n}\pi + \cos\frac{k-1}{2n}\pi\right)
\end{aligned}$$

(2) $\sin(\pi-t)=\sin t$, $\sin 2n(\pi-t)=-\sin 2nt$ より，曲線 C_n の $0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$ の部分と $\frac{\pi}{2} \leqq t \leqq \pi$ の部分は x 軸に関して対称である．

$x=\sin t$, $y=\sin 2nt$ より

$$\begin{aligned}
\frac{S_n}{2} &= \int_0^1 |y|\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |y|\frac{dx}{dt}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin 2nt|\cos t\,dt \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left|\int_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi} \sin 2nt\cos t\,dt\right| = \sum_{k=1}^{n}|I_k| \\
&= \frac{2n}{4n^2-1}\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{k}{2n}\pi+\cos\frac{k-1}{2n}\pi\right) \\
&= \frac{2n}{4n^2-1}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{k}{2n}\pi+1+\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{k}{2n}\pi\right) \\
&= \frac{2n}{4n^2-1}\left(2\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{k}{2n}\pi+1\right) = \frac{2n}{4n^2-1}\cdot\frac{1}{\tan\frac{\pi}{4n}}
\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{S_n=\dfrac{4n}{(4n^2-1)\tan\frac{\pi}{4n}}}$

(3) (2) の結果から

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{16n^2}{(4n^2-1)\pi}\cdot\frac{\frac{\pi}{4n}}{\tan\frac{\pi}{4n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{4}{\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)\pi}\cdot\frac{\frac{\pi}{4n}}{\tan\frac{\pi}{4n}} = \boldsymbol{\frac{4}{\pi}}$$

補足 $n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k}{2n}\pi &= \frac{1}{\sin\frac{\pi}{4n}}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k}{2n}\pi\sin\frac{\pi}{4n} \\
&= \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{4n}}\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{2k+1}{4n}\pi-\sin\frac{2k-1}{4n}\pi\right) \\
&= \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{4n}}\left(\sin\frac{2n+1}{4n}\pi-\sin\frac{\pi}{4n}\right) \\
&= \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{4n}}\left(\cos\frac{\pi}{4n}-\sin\frac{\pi}{4n}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tan\frac{\pi}{4n}}-1\right)
\end{aligned}$$

■

3 (1) △ABC は正三角形であるから，点 P は △ABC の重心である．

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})=\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)\quad\text{よって}\quad\mathbf{P}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}},\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}},\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right)$$

また，点 Q は線分 AB の中点である．

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)\quad\text{よって}\quad\mathbf{Q}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\ \mathbf{0}\right)$$

(2) 点 P に関して点 Q と対称な点を R とすると　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}=2\overrightarrow{\mathrm{OP}}$

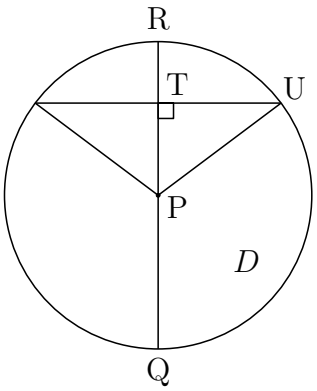
$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=2\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=2\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)=\left(\frac{1}{6},\ \frac{1}{6},\ \frac{2}{3}\right)$$

よって，求める t の値の範囲は　$\mathbf{0\leqq t\leqq\frac{2}{3}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\left(-\frac{1}{6},-\frac{1}{6},\ \frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\ 1\right)$

線分 QR 上の点 T の z 座標が t であるとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OT}}&=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+t\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\ 1\right)\\&=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)+t\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\ 1\right)\\&=\left(\frac{1-t}{2},\ \frac{1-t}{2},\ t\right)\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PT}}=\overrightarrow{\mathrm{OT}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\left(\frac{1-t}{2},\ \frac{1-t}{2},\ t\right)-\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)\\&=\left(\frac{1}{6}-\frac{t}{2},\ \frac{1}{6}-\frac{t}{2},t-\frac{1}{3}\right)=(3t-1)\overrightarrow{\mathrm{QP}}\end{aligned}$$

右の図において $|\overrightarrow{\mathrm{PU}}|=|\overrightarrow{\mathrm{QP}}|=\frac{1}{\sqrt{6}}$ より

$$\begin{aligned}\mathrm{TU}^2=|\overrightarrow{\mathrm{PU}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{PT}}|^2&=|\overrightarrow{\mathrm{QP}}|^2-(3t-1)^2|\overrightarrow{\mathrm{QP}}|^2\\&=\frac{1}{6}\{1-(3t-1)^2\}=t-\frac{3}{2}t^2\end{aligned}$$

よって，求める線分の長さは　$2\mathrm{TU}=\mathbf{2}\sqrt{\boldsymbol{t-\frac{3}{2}t^2}}$

(4) z 軸上に点 $\mathrm{T}'(0,\ 0,\ t)$ をとると，$\angle \mathrm{T}'\mathrm{TU} = 90^\circ$ であるから，求める立体の体積を V とすると

$$\frac{V}{\pi} = \int_0^{\frac{2}{3}} (\mathrm{T}'\mathrm{U}^2 - \mathrm{T}'\mathrm{T}^2)\,dt = \int_0^{\frac{2}{3}} \mathrm{TU}^2\,dt = \int_0^{\frac{2}{3}} \left(t - \frac{3}{2}t^2\right) dt$$
$$= \frac{3}{2}\int_0^{\frac{2}{3}} t\left(\frac{2}{3} - t\right) dt = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{27}$$

よって　　$\boldsymbol{V = \dfrac{2}{27}\pi}$ ■

4 (1) $(*)$ $\begin{cases} a_{n+1} = -b_n - c_n & (n = 1, 2, 3, \cdots) \\ b_{n+1} = -c_n - a_n & (n = 1, 2, 3, \cdots) \\ c_{n+1} = -a_n - b_n & (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$

$(*)$ の 3 式の辺々を加えると

$$a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = -2(a_n + b_n + c_n) \quad \text{すなわち} \quad p_{n+1} = -2p_n$$

$p_1 = a + b + c$ であるから，$p_n = (a + b + c)(-2)^{n-1}$ より

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} p_k = (a + b + c)\cdot\frac{1 - (-2)^n}{1 - (-2)} = \boldsymbol{\frac{1}{3}(a + b + c)\{1 - (-2)^n\}}$$

(2) $(*)$ の第 1 式から第 2 式の辺々を引くと

$$a_{n+1} - b_{n+1} = a_n - b_n \quad \text{ゆえに} \quad a_n - b_n = a - b \quad \cdots ①$$

同様にして　$b_n - c_n = b - c \quad \cdots ②$,　$c_n - a_n = c - a \quad \cdots ③$
また，(1) の結果から　$a_n + b_n + c_n = (a + b + c)(-2)^{n-1} \quad \cdots (**)$
$(**) + ① - ③$ より

$$3a_n = (a + b + c)(-2)^{n-1} + 2a - b - c$$
$$= 3a + (a + b + c)\{(-2)^{n-1} - 1\}$$

よって　　$\boldsymbol{a_n = a + \dfrac{1}{3}(a + b + c)\{(-2)^{n-1} - 1\}}$

同様に　　$\boldsymbol{b_n = b + \dfrac{1}{3}(a + b + c)\{(-2)^{n-1} - 1\}}$

$$\boldsymbol{c_n = c + \frac{1}{3}(a + b + c)\{(-2)^{n-1} - 1\}}$$

(3) $q_n=(-1)^n\{(a_n)^2+(b_n)^2+(c_n)^2\}$，$T_n=\sum_{j=1}^{2n}q_j$ について

(A)　「T_n は正の奇数である」

［1］$n=1$ のとき

$$\begin{aligned}T_1&=-\{(a_1)^2+(b_1)^2+(c_1)^2\}+(-1)^2\{(a_2)^2+(b_2)^2+(c_2)^2\}\\&=-(a^2+b^2+c^2)+(-b-c)^2+(-c-a)^2+(-a-b)^2\\&=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\\&=(a+b+c)^2\end{aligned}$$

$a+b+c$ は奇数であるから，T_1 は正の奇数である．

よって，$n=1$ のとき，(A) は成立する．

［2］$n=k$ のとき，T_k が正の奇数であると仮定すると

$$\begin{aligned}T_{k+1}&=\sum_{j=1}^{2(k+1)}q_j=\sum_{j=1}^{2k}q_j+q_{2k+1}+q_{2k+2}\\&=T_k+q_{2k+1}+q_{2k+2}\end{aligned}\qquad(***)$$

ここで

$$\begin{aligned}q_{2k+1}+q_{2k+2}&=(-1)^{2k+1}\{(a_{2k+1})^2+(b_{2k+1})^2+(c_{2k+1})^2\}\\&\qquad+(-1)^{2k+2}\{(a_{2k+2})^2+(b_{2k+2})^2+(c_{2k+2})^2\}\\&=-\{(a_{2k+1})^2+(b_{2k+1})^2+(c_{2k+1})^2\}+(-b_{2k+1}-c_{2k+1})^2\\&\qquad+(-c_{2k+1}-a_{2k+1})^2+(-a_{2k+1}-b_{2k+1})^2\\&={a_{2k+1}}^2+{b_{2k+1}}^2+{c_{2k+1}}^2\\&\qquad+2a_{2k+1}b_{2k+1}+2b_{2k+1}c_{2k+1}+2c_{2k+1}a_{2k+1}\\&=(a_{2k+1}+b_{2k+1}+c_{2k+1})^2=(p_{2k+1})^2\\&=\{(a+b+c)(-2)^{2k}\}^2=(a+b+c)^2\cdot2^{4k}\end{aligned}$$

$q_{2k+1}+q_{2k+2}$ は，偶数であるから，$(***)$ より，T_{k+1} は奇数となる．

［1］，［2］より，すべての自然数 n について，(A) は成立する． ■

5 (1) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ のとき

$$\left|A^2\right| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{ゆえに} \quad |A|^2 = -1$$

よって，これを満たす行列 A は存在しない．

(2) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ のとき

$$\left|A^2\right| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{ゆえに} \quad |A|^2 = 1 \quad \text{すなわち} \quad |A| = \pm 1$$

(i) $|A| = 1$ のとき，ハミルトン・ケーリーの定理により

$$A^2 - (\mathrm{tr}A)A + E = O \quad \text{ゆえに} \quad (\mathrm{tr}A)A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

したがって $(\mathrm{tr}A)^2|A| = 2$ ゆえに $\mathrm{tr}A = \pm\sqrt{2}$

よって $A = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(ii) $|A| = -1$ のとき，ハミルトン・ケーリーの定理により

$$A^2 - (\mathrm{tr}A)A - E = O \quad \text{ゆえに} \quad (\mathrm{tr}A)A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

したがって $(\mathrm{tr}A)^2|A| = 2$ ゆえに $-(\mathrm{tr}A)^2 = 2$

よって，これを満たす行列 A は存在しない．

(i),(ii) より $\boldsymbol{A = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$

補足 A，B を 2 次の正方行列，k を定数とすると，次式が成立する．

$$|AB| = |A||B|, \quad |A^2| = |A|^2, \quad |kA| = k^2|A|$$

(3) $A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ より，$A^4=-E$ であるから

$$\begin{aligned} &E+A+A^2+A^3+A^4+A^5+A^6+A^7 \\ =&E+A+A^2+A^3+A^4(E+A+A^2+A^3) \\ =&E+A+A^2+A^3-E(E+A+A^2+A^3)=O, \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{2013}A^k=A+A^2+A^3+A^4+A^5+\sum_{k=6}^{2013}A^k$$

このとき　$A^2=(\mathrm{tr}A)A-E,$

$$\begin{aligned} A^3&=(\mathrm{tr}A)A^2-A=(\mathrm{tr}A)\{(\mathrm{tr}A)A-E\}-A \\ &=\{(\mathrm{tr}A)^2-1\}A-(\mathrm{tr}A)E=A-(\mathrm{tr}A)E \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A+A^2+A^3+A^4+A^5&=A+A^2+A^3-E-A \\ &=-E+A^2+A^3 \\ &=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}+A-(\mathrm{tr}A)E \\ &=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\mp\sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &=\left(1\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=6}^{2013}A^k&=A^6\sum_{k=0}^{2007}A^k \\ &=A^6\sum_{k=0}^{250}A^{8k}(E+A+A^2+A^3+A^4+A^5+A^6+A^7)=O \end{aligned}$$

よって，$A=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ のとき (複号同順)

$$\boldsymbol{A+A^2+A^3+\cdots+A^{2013}=\left(1\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}$$

補足 $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix}$ と考えてもよい. ■

6 (1) 楕円 $C : \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ に接する傾き m の直線を $y = mx + k$ とおき，2 式から y を消去すると

$$\frac{x^2}{16} + \frac{1}{9}(mx+k)^2 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \left(m^2 + \frac{9}{16}\right)x^2 + 2mkx + k^2 - 9 = 0$$

このとき，上の第 2 式の係数について

$$D/4 = (mk)^2 - \left(m^2 + \frac{9}{16}\right)(k^2 - 9) = 0$$
$$-\frac{9}{16}k^2 + 9\left(m^2 + \frac{9}{16}\right) = 0$$

これを k について解くと　$k = \pm\sqrt{16m^2+9}$

よって，$\ell_1,\ \ell_1'$ の方程式は　$\boldsymbol{y = mx \pm \sqrt{16m^2+9}}$

(2) 点 $(x_0,\ mx_0 - \sqrt{16m^2+9})$ から直線 $mx - y + \sqrt{16m^2+9} = 0$ までの距離が d_1 に等しいから

$$d_1 = \frac{|\ mx_0 - (mx_0 - \sqrt{16m^2+9}) + \sqrt{16m^2+9}\ |}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = \frac{\boldsymbol{2\sqrt{16m^2+9}}}{\boldsymbol{\sqrt{m^2+1}}}$$

d_2 は上式の m を $-\dfrac{1}{m}$ に置き換えたものであるから

$$\boldsymbol{d_2 = \frac{2\sqrt{9m^2+16}}{\sqrt{m^2+1}}}$$

(3) (2) の結果から

$$(d_1)^2 + (d_2)^2 = \frac{4(16m^2+9)}{m^2+1} + \frac{4(9m^2+16)}{m^2+1} = 100$$

(4) $S = d_1 d_2$ であるから，(3) の結果から

$$\boldsymbol{S = d_1\sqrt{100 - (d_1)^2}}$$

上式から　$S = \sqrt{100(d_1)^2 - (d_1)^4} = \sqrt{50^2 - ({d_1}^2 - 50)^2}$　$\cdots(*)$

${d_1}^2 = 50$ のとき　$\dfrac{4(16m^2+9)}{m^2+1} = 50$　ゆえに　$m = \pm 1$

$(*)$ より，$m = \pm 1$ のとき，S は最大値 **50** をとる．　■