平成 24 年度　筑波大学　２次試験前期日程 (数学問題)120 分

- 社会学類 $\boxed{1}$ $\boxed{4}$ 必答 (数 II・B)，及び他教科との選択．
- 国際総合学類　数 II・B 選択の場合は $\boxed{1}$ $\boxed{4}$ 必答．
  数 III・C 選択の場合は $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ から 1 題選択，$\boxed{5}$ $\boxed{6}$ から 1 題選択．
- 教育・障害学類　数 II・B 選択の場合は $\boxed{1}$ $\boxed{4}$ 必答．
  数 III 選択の場合は $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ 必答．数 C 選択の場合は $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ 必答．
- 心理学類 $\boxed{1}$ $\boxed{4}$ 必答，$\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ から 2 題選択．
- 生物学類・生物資源学類・医学・医療学類
  $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ 必答，$\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ から 2 題選択．
- 地球・数学・物理・化学・応用理工・工学システム・情報科学・情報メディア創生学類 $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ 必答，$\boxed{1}$ $\boxed{4}$ から 1 題選択．
- 社会工学類 $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ 必答，$\boxed{1}$ $\boxed{4}$ から 1 題選択，$\boxed{5}$ $\boxed{6}$ から 1 題選択．
- 知識情報・図書館学類 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ から 1 題選択，$\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ から 1 題選択．

$\boxed{\mathbf{1}}$ x の方程式 $|\log_{10} x| = px + q$ (p, q は実数) が 3 つの相異なる正の解をもち，次の 2 つの条件を満たすとする．

(I) 3 つの解の比は，$1 : 2 : 3$ である．

(II) 3 つの解のうち最小のものは，$\dfrac{1}{2}$ より大きく，1 より小さい．

このとき，$A = \log_{10} 2$，$B = \log_{10} 3$ とおき，p と q を A と B を用いて表せ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 曲線 $C : y = \dfrac{1}{x+2}$ $(x > -2)$ を考える．曲線 C 上の点 $\mathrm{P}_1\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ における接線を ℓ_1 とし，ℓ_1 と x 軸との交点を Q_1，点 Q_1 を通り x 軸と垂直な直線と曲線 C との交点を P_2 とおく．以下同様に，自然数 n $(n \geqq 2)$ に対して，点 P_n における接線を ℓ_n とし，ℓ_n と x 軸との交点を Q_n，点 Q_n を通り x 軸と垂直な直線と曲線 C との交点を P_{n+1} とおく．

(1) ℓ_1 の方程式を求めよ．

(2) P_n の x 座標を x_n $(n \geqq 1)$ とする．x_{n+1} を x_n を用いて表し，x_n を n を用いて表せ．

(3) ℓ_n，x 軸，y 軸で囲まれる三角形の面積 S_n を求め，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．

3 曲線 $C: y=\log x\ (x>0)$ を考える．自然数 n に対して，曲線 C 上に点 $\mathrm{P}(e^n,\ n)$，$\mathrm{Q}(e^{2n},\ 2n)$ をとり，x 軸上に点 $\mathrm{A}(e^n,\ 0)$，$\mathrm{B}(e^{2n},\ 0)$ をとる．四角形 APQB を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を $V(n)$ とする．また，線分 PQ と曲線 C で囲まれる部分を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を $S(n)$ とする．

(1) $V(n)$ を n の式で表せ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S(n)}{V(n)}$ を求めよ．

4 四面体 OABC において，次が満たされているとする．

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

点 A，B，C を通る平面を α とする．点 O を通り平面 α と直交する直線と，平面 α との交点を H とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ は垂直であることを示せ．

(2) 点 H は △ABC の垂心であること，すなわち $\overrightarrow{\mathrm{AH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を示せ．

(3) $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=2$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=1$ とする．このとき，△ABC の各辺の長さおよび線分 OH の長さを求めよ．

5 以下の問いに答えよ．

(1) 座標平面において原点のまわりに角 $\theta\ (0<\theta<\pi)$ だけ回転する移動を表す行列を A とする．A が等式 $A^2-A+E=O$ を満たすとき，θ と A を求めよ．ただし，$E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，$O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ である．

(2) 直線 $y=\sqrt{3}x$ に関する対称移動を表す行列 B を求めよ．

(3) 直線 $y=kx$ に関する対称移動を表す行列 C とする．(1)，(2) において求めた行列 A，B に対して $BC=A$ が成り立つとき，k を求めよ．

6 2 つの双曲線 $C: x^2-y^2=1$，$H: x^2-y^2=-1$ を考える．双曲線 H 上の点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ に対して，方程式 $sx-ty=1$ で定まる直線を ℓ とする．

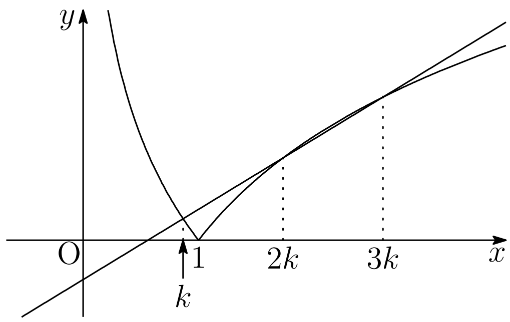
(1) 直線 ℓ は点 P を通らないことを示せ．

(2) 直線 ℓ と双曲線 C は異なる 2 点 Q，R で交わることを示し，△PQR の重心 G の座標を s，t を用いて表せ．

(3) (2) における 3 点 G，Q，R に対して，△GQR の面積は点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ の位置によらず一定であることを示せ．

解答例

1 x の方程式



$$|\log_{10} x| = px + q$$

の 3 解を k，$2k$，$3k$ とおくと $(k > 0)$

$$\begin{aligned} -\log_{10} k &= pk + q & \cdots ① \\ \log_{10} 2k &= 2pk + q & \cdots ② \\ \log_{10} 3k &= 3pk + q & \cdots ③ \end{aligned}$$

② − ① より　$\log_{10} 2k^2 = pk$，　③ − ② より　$\log_{10} \dfrac{3}{2} = pk$　$\cdots$ ④

上の 2 式から　$2k^2 = \dfrac{3}{2}$　このとき，$k > 0$ に注意して　$k = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　$\cdots$ ⑤

⑤ を ④ に代入すると，$\log_{10} \dfrac{3}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} p$ より

$$p = \frac{2}{\sqrt{3}}(\log_{10} 3 - \log_{10} 2) = \boldsymbol{\frac{2}{\sqrt{3}}(B - A)}$$

④，⑤ を ① に代入すると，$-\log_{10} \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \log_{10} \dfrac{3}{2} + q$ より

$$q = 2\log_{10} 2 - \frac{3}{2}\log_{10} 3 = \boldsymbol{2A - \frac{3}{2}B}$$

■

2 (1) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ とおくと　$f'(x) = -\dfrac{1}{(x+2)^2}$

C 上の点 $\mathrm{P}_1\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ における接線 ℓ_1 の傾きは　$f'(0) = -\dfrac{1}{4}$

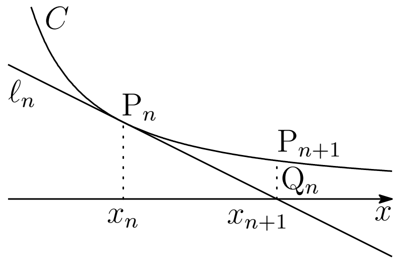
したがって，接線 ℓ_1 の方程式は

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x - 0) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}}$$

(2) C 上の点 $\mathrm{P}_n\left(x_n,\ \dfrac{1}{x_n+2}\right)$ における接線 ℓ_n の傾きは　$f'(x_n)=-\dfrac{1}{(x_n+2)^2}$

したがって，接線 ℓ_n の方程式は

$$y-\frac{1}{x_n+2}=-\frac{1}{(x_n+2)^2}(x-x_n) \qquad (*)$$



点 $\mathrm{Q}_n(x_{n+1},\ 0)$ は，この直線上の点であるから

$$-\frac{1}{x_n+2}=-\frac{1}{(x_n+2)^2}(x_{n+1}-x_n) \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{x_{n+1}=2x_n+2}$$

上式より　　　　$x_{n+1}+2=2(x_n+2)$

数列 $\{x_n+2\}$ は，初項 $x_1+2=0+2=2$，公比 2 の等比数列であるから

$$x_n+2=2\cdot2^{n-1} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{x_n=2^n-2}$$

(3) ℓ_n と y 軸との交点の y 座標は，$(*)$ に $x=0$ を代入して

$$y-\frac{1}{x_n+2}=\frac{x_n}{(x_n+2)^2} \quad \text{ゆえに} \quad y=\frac{2x_n+2}{(x_n+2)^2}$$

ℓ_n と x 軸との交点 Q_n の x 座標は　$2x_n+2$

したがって，ℓ_n，x 軸，y 軸で囲まれる三角形の面積 S_n は

$$S_n=\frac{1}{2}(2x_n+2)\times\frac{2x_n+2}{(x_n+2)^2}=2\left(\frac{x_n+1}{x_n+2}\right)^2$$

(2) の結果から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\infty$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}2\left(\frac{x_n+1}{x_n+2}\right)^2=\lim_{n\to\infty}2\left(\frac{1+\frac{1}{x_n}}{1+\frac{2}{x_n}}\right)^2=\mathbf{2}$$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 2 点 $\mathrm{P}(e^n,\ n)$，$\mathrm{Q}(e^{2n},\ 2n)$ を通る直線の方程式は

$$y = \frac{n}{e^{2n}-e^n}(x-e^n)+n$$

したがって，求める立体の体積 $V(n)$ は

$$\begin{aligned}\frac{V(n)}{\pi} &= \int_{e^n}^{e^{2n}}\left\{\frac{n}{e^{2n}-e^n}(x-e^n)+n\right\}^2 dx\\ &= \frac{e^{2n}-e^n}{3n}\Bigg[\left\{\frac{n}{e^{2n}-e^n}(x-e^n)+n\right\}^3\Bigg]_{e^n}^{e^{2n}}\\ &= \frac{e^{2n}-e^n}{3n}\{(2n)^3-n^3\} = \frac{7}{3}n^2(e^{2n}-e^n)\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{V(n) = \dfrac{7\pi}{3}n^2(e^{2n}-e^n)}$

別解 上底の半径 a，下底の半径 b，高さ h の円錐台の体積 V は[1]

$$V = \frac{\pi}{3}h(a^2+ab+b^2)$$

これに $a=n$，$b=2n$，$h=e^{2n}-e^n$ を代入してもよい．

(2) 曲線 $C: y=\log x$ と線分 AP，BQ，x 軸で囲まれる部分を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を $U(n)$ とすると

$$\begin{aligned}\frac{U(n)}{\pi} &= \int_{e^n}^{e^{2n}}(\log x)^2\,dx = \Big[x\{(\log x)^2-2\log x+2\}\Big]_{e^n}^{e^{2n}}\\ &= e^{2n}(4n^2-4n+2)-e^n(n^2-2n+2)\end{aligned}$$

上式および (1) の結果から

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U(n)}{\pi n^2e^{2n}} = \lim_{n\to\infty}\left\{4-\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}-e^{-n}\left(1-\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}\right)\right\} = 4$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{V(n)}{\pi n^2e^{2n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{7}{3}\left(1-e^{-n}\right) = \frac{7}{3}$$

したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{U(n)}{V(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{U(n)}{\pi n^2e^{2n}}\cdot\frac{\pi n^2e^{2n}}{V(n)} = 4\times\frac{3}{7} = \frac{12}{7}$

$S(n)=U(n)-V(n)$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S(n)}{V(n)} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{U(n)}{V(n)}-1\right\} = \frac{12}{7}-1 = \boldsymbol{\frac{5}{7}}$$

■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kyukou/kyukou_2019.pdf $\boxed{1}$ の補足

4 (1) $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおくと，条件から　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})=\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=\vec{c}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$　$\cdots$①

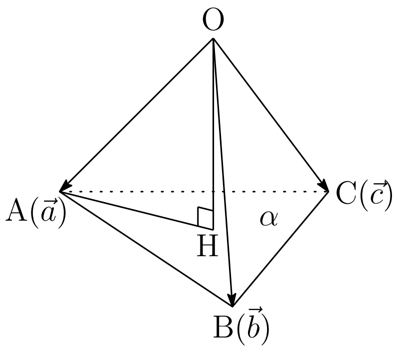
よって　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\alpha$ より　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$

① より　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$

上の 2 式から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}&=(\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0\end{aligned}$$



したがって　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

同様に　$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

よって，点 H は △ABC の垂心である．

(3) $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=2$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=2^2-2\cdot1+2^2=6$$

ゆえに　$\mathrm{AB}=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\boldsymbol{\sqrt{6}}$　同様に　$\mathrm{BC}=\mathrm{CA}=\boldsymbol{\sqrt{6}}$

$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}$ であるから　$\triangle\mathrm{OAH}\equiv\triangle\mathrm{OBH}\equiv\triangle\mathrm{OCH}$

$\mathrm{AH}=\mathrm{BH}=\mathrm{CH}$ であるから，H は正三角形 ABC の外心，すなわち，重心である．$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ であるから

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2&=\frac{1}{9}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a})\\&=\frac{1}{9}(2^2+2^2+2^2+2\cdot1+2\cdot1+2\cdot1)=2\end{aligned}$$

よって　$\mathrm{OH}=|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=\boldsymbol{\sqrt{2}}$　■

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ おくと，$A^2-A+E=O$ より

$$\begin{pmatrix}\cos 2\theta & -\sin 2\theta\\ \sin 2\theta & \cos 2\theta\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

ゆえに　$(2\cos\theta-1)\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ であるから　$2\cos\theta-1=0$

$0<\theta<\pi$ に注意して　$\boldsymbol{\theta=\frac{\pi}{3}}$，　$\boldsymbol{A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}}$

(2) $B\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}$，$B\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ -1\end{pmatrix}$ より

$$B\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -1\end{pmatrix}\quad よって\quad \boldsymbol{B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}}$$

(3) $C\begin{pmatrix}1\\ k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ k\end{pmatrix}$，$C\begin{pmatrix}-k\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k\\ -1\end{pmatrix}$ より

$$C\begin{pmatrix}1 & -k\\ k & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & k\\ k & -1\end{pmatrix}\quad ゆえに\quad C=\frac{1}{1+k^2}\begin{pmatrix}1-k^2 & 2k\\ 2k & k^2-1\end{pmatrix}$$

$BC=A$ より，$C=B^{-1}A$ であるから

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+k^2}\begin{pmatrix}1-k^2 & 2k\\ 2k & k^2-1\end{pmatrix}&=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}\\ &=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

ゆえに　$\dfrac{1-k^2}{1+k^2}=\dfrac{1}{2}$，　$\dfrac{2k}{1+k^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　これを解いて　$\boldsymbol{k=\frac{1}{\sqrt{3}}}$　■

$\boxed{6}$ (1) 点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ は $H : x^2 - y^2 = -1$ 上の点であるから

$$s^2 - t^2 = -1 \quad \cdots ①$$

$\mathrm{P}(s,\ t)$ が $\ell : sx - ty = 1$ 上にあると仮定すると　$s^2 - t^2 = 1$
これは ① に反するので，直線 ℓ は点 P を通らない．

(2) $H : x^2 - y^2 = -1$ 上の点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ について　$t \neq 0$

$\ell : sx - ty = 1$ より　$y = \dfrac{sx-1}{t}$　$\cdots ②$

これと $C : x^2 - y^2 = 1$ から y を消去して

$$x^2 - \left(\frac{sx-1}{t}\right)^2 = 1 \quad ゆえに \quad (t^2 - s^2)x^2 + 2sx - t^2 - 1 = 0$$

① を上式に代入して　$x^2 + 2sx - t^2 - 1 = 0 \quad \cdots (*)$
2 次方程式 $(*)$ の判別式を D とすると

$$D/4 = s^2 - (-t^2 - 1) = s^2 + t^2 + 1 > 0$$

よって，直線 ℓ と双曲線 C は異なる 2 点 Q，R で交わる．

Q，R の x 座標をそれぞれ $\alpha,\ \beta$ とすると，② より

$$\mathrm{Q}\left(\alpha,\ \frac{s\alpha - 1}{t}\right), \quad \mathrm{R}\left(\beta,\ \frac{s\beta - 1}{t}\right)$$

$\alpha,\ \beta$ は方程式 $(*)$ の解であるから，解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = -2s, \quad \alpha\beta = -t^2 - 1 \quad \cdots (**)$$

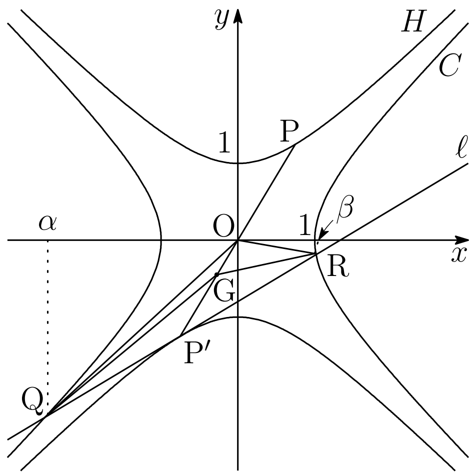
$\triangle$PQR の重心 G の座標を $(x_0,\ y_0)$ とすると，①，$(**)$ より

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{3}(s + \alpha + \beta) = \frac{1}{3}(s - 2s) = -\frac{s}{3} \\ y_0 &= \frac{1}{3}\left(t + \frac{s\alpha - 1}{t} + \frac{s\beta - 1}{t}\right) \\ &= \frac{t^2 + s(\alpha + \beta) - 2}{3t} = \frac{t^2 - 2(s^2 + 1)}{3t} = \frac{t^2 - 2t^2}{3t} = -\frac{t}{3} \end{aligned}$$

よって　$\mathbf{G}\left(-\dfrac{\boldsymbol{s}}{\mathbf{3}}, -\dfrac{\boldsymbol{t}}{\mathbf{3}}\right)$

別解 ℓ は H' 上の点 $\mathrm{P}'(-s, -t)$ における接線である．$\alpha+\beta=-2s$ より，P' は 2 点 Q，R の中点である．G は線分 PP' を $2:1$ に内分する点であるから

$$\mathrm{G}\left(-\frac{s}{3}, -\frac{t}{3}\right)$$



(3) 直線 ℓ の y 切片が $-\dfrac{1}{t}$ であるから　$\triangle\mathrm{OQR}=\dfrac{1}{2|t|}|\beta-\alpha|$

①，(**) より　$$\begin{aligned}(\beta-\alpha)^2 &= (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta \\ &= (-2s)^2-4(-t^2-1) \\ &= 4(s^2+t^2+1)=8t^2\end{aligned}$$

$|\beta-\alpha|=2\sqrt{2}t$ であるから　$\triangle\mathrm{OPQ}=\sqrt{2}$

(2) の結果から，G は線分 OP' を $1:2$ に内分する点であるから

$$\triangle\mathrm{GQR}=\frac{2}{3}\triangle\mathrm{OQR}=\frac{2}{3}\sqrt{2}$$

よって，$\triangle\mathrm{GQR}$ の面積は一定である．■