平成23年度　筑波大学　２次試験前期日程 (数学問題)120分

- 社会学類 $\boxed{1}$, $\boxed{4}$ 必答 (数 II・B)，及び他教科との選択.
- 国際総合学類　数 II・B 選択の場合は $\boxed{1}$, $\boxed{4}$ 必答.
  数 III・C 選択の場合は $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ から 1 題選択，$\boxed{5}$, $\boxed{6}$ から 1 題選択.
- 教育・障害学類　数 II・B 選択の場合は $\boxed{1}$, $\boxed{4}$ 必答.
  数 III 選択の場合は $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ 必答．数 C 選択の場合は $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ 必答.
- 心理学類　$\boxed{1}$, $\boxed{4}$ 必答，$\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ から 2 題選択.
- 生物学類・生物資源学類・医学・医療学類
  $\boxed{1}$ ～ $\boxed{3}$ 必答，$\boxed{4}$ ～ $\boxed{6}$ から 2 題選択.
- 地球・数学・物理・化学・応用理工・工学システム・情報科学・情報メディア創生学類　$\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ 必答，$\boxed{1}$, $\boxed{4}$ から 1 題選択.
- 社会工学類　$\boxed{2}$, $\boxed{3}$ 必答，$\boxed{1}$, $\boxed{4}$ から 1 題選択，$\boxed{5}$, $\boxed{6}$ から 1 題選択.
- 知識情報・図書館学類　$\boxed{1}$ ～ $\boxed{3}$ から 1 題選択，$\boxed{4}$ ～ $\boxed{6}$ から 1 題選択.

1 O を原点とする xy 平面において，直線 $y = 1$ の $|x| \geqq 1$ を満たす部分を C とする.

(1) C 上に点 $\mathrm{A}(t,\ 1)$ をとるとき，線分 OA の垂直二等分線の方程式を求めよ.

(2) 点 A が C 全体を動くとき，線分 OA の垂直二等分線が通過する範囲を求め，それを図示せよ.

2 自然数 n に対し，関数

$$F_n(x) = \int_x^{2x} e^{-t^n}\,dt \quad (x \geqq 0)$$

を考える.

(1) 関数 $F_n(x)$ $(x \geqq 0)$ はただ一つの点で最大値をとることを示し，$F_n(x)$ が最大となるような x の値 a_n を求めよ.

(2) (1) で求めた a_n に対し，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \log a_n$ を求めよ.

$\boxed{\mathbf{3}}$ α を $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とする．円 $C : x^2 + (y + \sin\alpha)^2 = 1$ および，その中心を通る直線 $\ell : y = (\tan\alpha)x - \sin\alpha$ を考える．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 直線 ℓ と円 C の 2 つの交点の座標を α を用いて表せ．

(2) 等式

$$2\int_{\cos\alpha}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx + \int_{-\cos\alpha}^{\cos\alpha} \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

が成り立つことを示せ．

(3) 連立不等式

$$\begin{cases} y \leqq (\tan\alpha)x - \sin\alpha \\ x^2 + (y + \sin\alpha)^2 \leqq 1 \end{cases}$$

の表す xy 平面上の図形を D とする．図形 D を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 数列 $\{a_n\}$ を，

$$a_1 = 1,$$
$$(n+3)a_{n+1} - na_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

によって定める．

(1) $b_n = n(n+1)(n+2)a_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ によって定まる数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) 等式

$$p(n+1)(n+2) + qn(n+2) + rn(n+1) = b_n$$

が成り立つように，定数 p, q, r の値を求めよ．

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を n の式で表せ．

5 実数を成分とする行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を考える．座標平面上の 2 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$, $\mathrm{Q}(u,\ v)$ について等式

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

が成り立つとき，行列 A により点 P は点 Q に移るという．

点 $(1,\ 3)$ は行列 A により点 $(10,\ 10)$ に移り，さらに等式

$$A^2 - 7A + 10E = O$$

が成り立つものとする．ただし，$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ である．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A により点 $(10,\ 10)$ が移る点の座標を求めよ．

(2) 実数 $a,\ b,\ c,\ d$ の値を求めよ．

(3) 次の条件 $(*)$ を満たす直線 ℓ の方程式を求めよ．

$(*)$ 直線 ℓ 上のすべての点が行列 A により ℓ 上の点に移る．

6 d を正の定数とする．2 点 $\mathrm{A}(-d,\ 0)$，$\mathrm{B}(d,\ 0)$ からの距離の和が $4d$ である点 P の軌跡として定まる楕円 E を考える．点 A，点 B，原点 O から楕円 E 上の点 P までの距離をそれぞれ AP，BP，OP と書く．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 楕円 E の長軸と短軸の長さを求めよ．

(2) $\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2$ および $\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}$ を，OP と d を用いて表せ．

(3) 点 P が楕円 E 全体を動くとき，$\mathrm{AP}^3+\mathrm{BP}^3$ の最大値と最小値を d を用いて表せ．

解答例

1 (1) A$(t,\ 1)$．線分 OA の垂直二等分線上に点 P$(x,\ y)$ をとると，

OP^2 = AP^2 より　$x^2+y^2=(x-t)^2+(y-1)^2$

整理すると　$\boldsymbol{2tx+2y-t^2-1=0}$

(2) (1) の結果から，t に関する 2 次方程式

$$t^2-2xt-2y+1=0$$

が $|\,t\,| \geqq 1$ に (少なくとも 1 つ) 解をもつ領域 $(x,\ y)$ を求めればよい．

$f(t)=t^2-2xt-2y+1$ とおくと

$$f(t)=(t-x)^2-x^2-2y+1$$

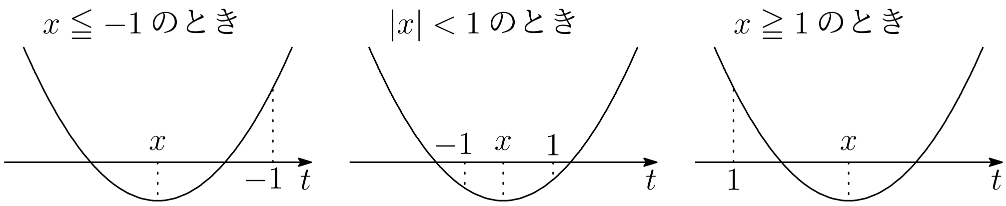
(i) $|x| \geqq 1$ のとき，$-x^2-2y+1 \leqq 0$ より

$$y \geqq -\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$$

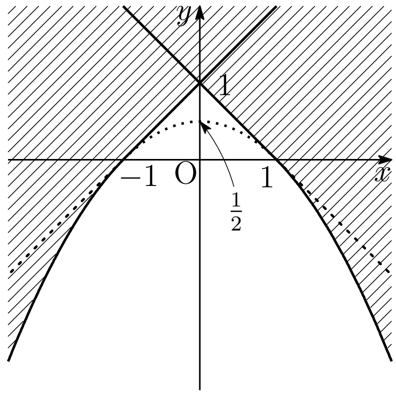
(ii) $|x|<1$ のとき，$f(-1) \leqq 0$ または $f(1) \leqq 0$ より

$$2x-2y+2 \leqq 0 \quad \text{または} \quad -2x-2y+2 \leqq 0$$

ゆえに　$y \geqq x+1$　または　$y \geqq -x+1$



(i)，(ii) より，求める領域は，下の図の斜線部分で境界線を含む．



$\boxed{2}$ (1) $F_n(x) = \displaystyle\int_x^{2x} e^{-t^n}\,dt \quad (x \geqq 0)$ より

$$F_n'(x) = e^{-(2x)^n}(2x)' - e^{-x^n} = \frac{2}{e^{(2x)^n}} - \frac{1}{e^{x^n}}$$
$$= \frac{2 - e^{(2^n-1)x^n}}{e^{(2x)^n}}$$

$F_n'(x) = 0$ とすると　$2 - e^{(2^n-1)x^n} = 0$　ゆえに　$e^{(2^n-1)x^n} = 2$
上の第 2 式の両辺の自然対数をとると

$$(2^n - 1)x^n = \log 2 \qquad (*)$$

$(*)$ を満たす x はただ一つ存在し，これを c とおくと

$$c = \sqrt[n]{\frac{\log 2}{2^n - 1}}$$

このとき，$F_n(x)$ の増減表は

x	0	$\cdots$	c	$\cdots$
$F_n'(x)$		$+$	0	$-$
$F_n(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$

$F(x)$ は $x = c$ で最大となるから，$a_n = c$ より　$\boldsymbol{a_n = \sqrt[n]{\dfrac{\log 2}{2^n - 1}}}$

(2) (1) の結果から　$a_n = \dfrac{1}{2}\sqrt[n]{\dfrac{\log 2}{1 - 2^{-n}}}$

したがって　$\log a_n = -\log 2 + \dfrac{1}{n}\log\left(\dfrac{\log 2}{1 - 2^{-n}}\right)$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(\frac{\log 2}{1 - 2^{-n}}\right) = 0$ であるから　$\displaystyle\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = -\log 2}$ ■

$\boxed{3}$ (1) 直線 $\ell : y = (\tan\alpha)x - \sin\alpha$ と $C : x^2 + (y + \sin\alpha)^2 = 1$ の方程式から y を消去すると

$$x^2 + \{(\tan\alpha)x\}^2 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad x^2 = \frac{1}{1 + \tan^2\alpha} = \cos^2\alpha$$

求める交点の座標は，$x = \cos\alpha, -\cos\alpha$ を直線 ℓ の方程式に代入して

$$\boldsymbol{(\cos\alpha,\ 0),\quad (-\cos\alpha, -2\sin\alpha)}$$

(2) $\sqrt{1-x^2}$ は偶関数であるから

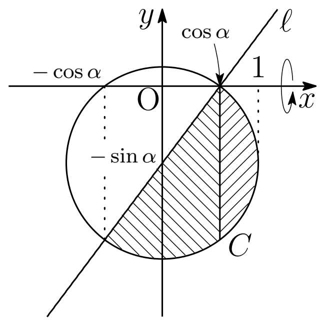
$$
\begin{aligned}
&2\int_{\cos\alpha}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx+\int_{-\cos\alpha}^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\,dx\\
=&2\int_{\cos\alpha}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx+2\int_{0}^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\,dx=2\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx
\end{aligned}
$$

$\displaystyle\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$ は，半径 1 の $\dfrac{1}{4}$ 円の面積に等しいから

$$
2\int_{\cos\alpha}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx+\int_{-\cos\alpha}^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\,dx=2\cdot\frac{\pi\cdot1^2}{4}=\frac{\pi}{2}
$$

(3) $D:\left\{\begin{array}{l} y\leqq(\tan\alpha)x-\sin\alpha \\ x^2+(y+\sin\alpha)^2\leqq 1\end{array}\right.$

D の表す部分は，右の図の斜線部分である．
C の方程式から



$$
y=-\sin\alpha\pm\sqrt{1-x^2}
$$

D を x 軸のまわりに 1 回転させた立体の体積を V とすると

$$
\begin{aligned}
\frac{V}{\pi}&=\int_{-\cos\alpha}^{\cos\alpha}(-\sin\alpha-\sqrt{1-x^2})^2\,dx-\int_{-\cos\alpha}^{\cos\alpha}\{(\tan\alpha)x-\sin\alpha\}^2\,dx\\
&\qquad+\int_{\cos\alpha}^{1}\{(-\sin\alpha-\sqrt{1-x^2})^2-(-\sin\alpha+\sqrt{1-x^2})^2\}\,dx\\
&=2\int_0^{\cos\alpha}(1+\sin^2\alpha-x^2)\,dx+4(\sin\alpha)\int_0^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\,dx\\
&\qquad-\frac{1}{3\tan\alpha}\Big[\,\{(\tan\alpha)x-\sin\alpha\}^3\,\Big]_{-\cos\alpha}^{\cos\alpha}+4(\sin\alpha)\int_{\cos\alpha}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx\\
&=2\Big[\,(1+\sin^2\alpha)x-\frac{1}{3}x^3\,\Big]_0^{\cos\alpha}-\frac{8\sin^3\alpha}{3\tan\alpha}+(4\sin\alpha)\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx\\
&=2(1+\sin^2\alpha)\cos\alpha-\frac{2}{3}\cos^3\alpha-\frac{8}{3}\sin^2\alpha\cos\alpha+4(\sin\alpha)\cdot\frac{\pi}{4}\\
&=\left\{2(1+\sin^2\alpha)-\frac{2}{3}\cos^2\alpha-\frac{8}{3}\sin^2\alpha\right\}\cos\alpha+\pi\sin\alpha\\
&=\frac{4}{3}\cos\alpha+\pi\sin\alpha
\end{aligned}
$$

よって　　$V=\boldsymbol{\left(\frac{4}{3}\cos\alpha+\pi\sin\alpha\right)\pi}$

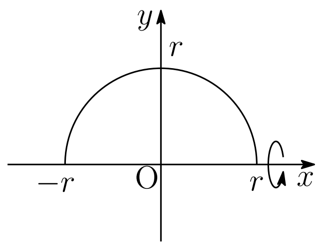
パップス・ギュルダンの定理 (Pappus-Guldinus theorem)

平面上にある図形 D の面積を S とし，D と同じ平面上にあり D を通らない軸の周りで D を一回転させた回転体の体積を V とする．回転させる図形 D の重心 G から回転軸までの距離を h とすると

$$\boldsymbol{V = 2\pi hS}$$

が成立する．

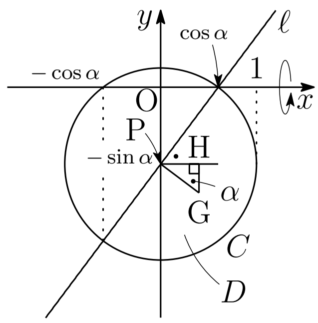
右の半円は，y 軸に関して対称であるから，重心の x 座標は 0 である．また重心の y 座標 h は，x 軸のまわりに 1 回転すると，その立体 (球) の体積 $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ と半円の面積 $S = \dfrac{1}{2}\pi r^2$ により



$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 2\pi h\cdot\frac{1}{2}\pi r^2 \quad \text{ゆえに} \quad h = \frac{4r}{3\pi}$$

発展 半径 1 の半円 C の中心 P から重心 G までの距離は

$$\mathrm{GP} = \frac{4}{3\pi}$$



G から直線 $y = -\sin\alpha$ に垂線 GH を引くと

$$\mathrm{GH} = \mathrm{GP}\cos\alpha = \frac{4\cos\alpha}{3\pi}$$

G から x 軸までの距離を h とすると

$$h = \mathrm{OP} + \mathrm{GH} = \sin\alpha + \frac{4\cos\alpha}{3\pi}$$

領域 D の面積 S は $\dfrac{\pi}{2}$ であるから，パップス=ギュルダンの定理により，求める回転体の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= 2\pi hS = 2\pi\left(\sin\alpha + \frac{4\cos\alpha}{3\pi}\right)\frac{\pi}{2} \\ &= \left(\pi\sin\alpha + \frac{4}{3}\cos\alpha\right)\pi \end{aligned}$$

注意 パップス・ギュルダンの定理は，高校数学の範囲外である．入試では使用できないが，便利な検算法である [1]． ■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf (p.6)

$\boxed{4}$ (1) $(n+3)a_{n+1}-na_n=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}$ の両辺に $(n+2)(n+1)$ を掛けると

$$(n+3)(n+2)(n+1)a_{n+1}-(n+2)(n+1)na_n=1$$

$b_n=(n+2)(n+1)na_n$ より　$b_{n+1}-b_n=1$

また，$b_1=3{\cdot}2{\cdot}1a_1=3{\cdot}2{\cdot}1{\cdot}1=6$ より，$\{b_n\}$ は，初項6，公差1の等差数列であるから

$$b_n=6+(n-1){\cdot}1=\boldsymbol{n+5}$$

(2) $p(n+1)(n+2)+qn(n+2)+rn(n+1)=b_n$ に (1) の結果を代入して

$$p(n+1)(n+2)+qn(n+2)+rn(n+1)=n+5$$

これに $n=0,-1,-2$ をそれぞれ代入すると

$$2p=5,\quad -q=4,\quad 2r=3\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{p=\frac{5}{2},\ q=-4,\ r=\frac{3}{2}}$$

(3) $p(n+1)(n+2)+qn(n+2)+rn(n+1)=b_n$

上式の両辺を $n(n+1)(n+2)$ で割ると

$$\frac{p}{n}+\frac{q}{n+1}+\frac{r}{n+2}=a_n$$

(2) の結果から，$q=-p-r$ であるから

$$a_n=p\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-r\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

したがって，$p=\dfrac{5}{2}$，$q=\dfrac{3}{2}$ より

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}a_k&=\frac{5}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)-\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)\\&=\frac{5}{2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)\\&=\frac{5n}{2(n+1)}-\frac{3n}{4(n+2)}=\boldsymbol{\frac{n(7n+17)}{4(n+1)(n+2)}}\end{aligned}$$

■

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $A\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}$，$A^2-7A+10E=O$ より

$$\begin{aligned}A\begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}&=A^2\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=(7A-10E)\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\\&=7A\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}-10E\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\\&=7\begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}-10\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{60}\\\mathbf{40}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

(2) $A\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}$，$A\begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}60\\40\end{pmatrix}$ より

$$A\begin{pmatrix}1&10\\3&10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&60\\10&40\end{pmatrix}$$

$\begin{vmatrix}1&10\\3&10\end{vmatrix}=1\cdot 10-10\cdot 3=-20\neq 0$ であるから

$$\begin{aligned}A&=\begin{pmatrix}10&60\\10&40\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&10\\3&10\end{pmatrix}^{-1}\\&=\frac{1}{-20}\begin{pmatrix}10&60\\10&40\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10&-10\\-3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&2\\1&3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{a=4,\ b=2,\ c=1,\ d=3}$

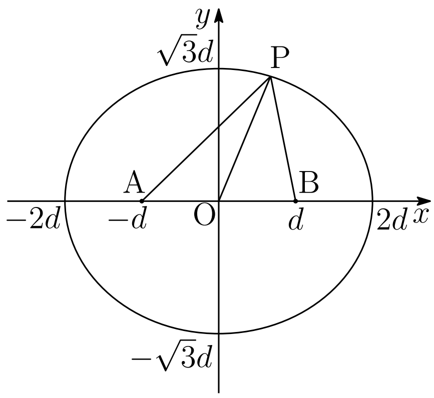
(3) 行列 A の固有方程式は　$\lambda^2-7\lambda+10=0$　これを解いて　$\lambda=2,\ 5$

$$A-2E=\begin{pmatrix}2&2\\1&1\end{pmatrix},\quad A-5E=\begin{pmatrix}-1&2\\1&-2\end{pmatrix}$$

$\lambda=2,\ 5$ に対する固有ベクトルは，それぞれ $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

よって，行列 A による不動直線は　$\boldsymbol{y=-x,\ y=\frac{1}{2}x}$ ■

$\boxed{6}$ (1) 楕円 E の方程式を



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

とおく．2 点 A$(-d,\ 0)$，B$(d,\ 0)$ から楕円 E 上の点 P までの距離の和が $4d$ であるから

長軸の長さ　　$2a=\boldsymbol{4d}$

$a=2d$，$d=\sqrt{a^2-b^2}$ より

$$d=\sqrt{(2d)^2-b^2}\quad \text{ゆえに}\quad b=\sqrt{3}d$$

短軸の長さ　　$2b=\boldsymbol{2\sqrt{3}d}$

(2) 中線定理により　$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2=\boldsymbol{2(\mathrm{OP}^2+d^2)}$

$\mathrm{AP}+\mathrm{BP}=4d$ であるから

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}&=\frac{1}{2}\{(\mathrm{AP}+\mathrm{BP})^2-(\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2)\}\\&=\frac{1}{2}\{(4d)^2-2(\mathrm{OP}^2+d^2)\}=\boldsymbol{7d^2-\mathrm{OP}^2}\end{aligned}$$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}^3+\mathrm{BP}^3&=(\mathrm{AP}+\mathrm{BP})^3-3\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}(\mathrm{AP}+\mathrm{BP})\\&=(4d)^3-3(7d^2-\mathrm{OP}^2)\cdot 4d\\&=12d\cdot\mathrm{OP}^2-20d^3\end{aligned}$$

$\sqrt{3}d\leqq\mathrm{OP}\leqq 2d$ より　$16d^3\leqq\mathrm{AP}^3+\mathrm{BP}^3\leqq 28d^3$

よって　最大値 $\boldsymbol{28d^3}$，最小値 $\boldsymbol{16d^3}$ ■