

平成 22 年度 筑波大学 2 次試験前期日程 (数学問題)120 分

- 社会学類 1 4 必答 (数 II・B), 及び他教科との選択.
- 国際総合学類 数 II・B 選択の場合は 1 4 必答.
数 III・C 選択の場合は 2 3 から 1 題選択, 5 6 から 1 題選択.
- 教育・障害学類 数 II・B 選択の場合は 1 4 必答.
数 III 選択の場合は 2 3 必答. 数 C 選択の場合は 5 6 必答.
- 心理学類 1 4 必答, 2 3 5 6 から 2 題選択.
- 生物学類・生物資源学類・医学・医療学類
1 2 3 必答, 4 5 6 から 2 題選択.
- 地球・数学・物理・化学・応用理工・工学システム・情報科学・情報メディア
創生学類 2 3 5 6 必答, 1 4 から 1 題選択.
- 社会工学類 2 3 必答, 1 4 から 1 題選択, 5 6 から 1 題選択.
- 知識情報・図書館学類
数 II・B 選択の場合は 1 4 必答.
数 II・C 選択の場合は 1 必答. 5 6 から 1 題選択.
数 III・B 選択の場合は 4 必答. 2 3 から 1 題選択.
数 III・C 選択の場合は 2 3 から 1 題選択, 5 6 から 1 題選択.

1 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}ax^2$ とおく. ただし $a > 0$ とする.

- (1) $f(-1) \leq f(3)$ となる a の範囲を求めよ.
- (2) $f(x)$ の極小値が $f(-1)$ 以下となる a の範囲を求めよ.
- (3) $-1 \leq x \leq 3$ における $f(x)$ の最小値を a を用いて表せ.

2 3つの曲線

$$C_1 : y = \sin x \quad \left(0 \leq x < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$C_2 : y = \cos x \quad \left(0 \leq x < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$C_3 : y = \tan x \quad \left(0 \leq x < \frac{\pi}{2}\right)$$

について以下の問いに答えよ.

- (1) C_1 と C_2 の交点, C_2 と C_3 の交点, C_3 と C_1 の交点のそれぞれについて y 座標を求めよ.
- (2) C_1, C_2, C_3 によって囲まれる図形の面積を求めよ.

3 n を自然数とし, 1 から n までの自然数の積を $n!$ で表す. このとき以下の問いに答えよ.

- (1) 単調に増加する連続関数 $f(x)$ に対して, 不等式 $\int_{k-1}^k f(x) dx \leq f(k)$ を示せ.
- (2) 不等式 $\int_1^n \log x dx \leq \log n!$ を示し, 不等式 $n^n e^{1-n} \leq n!$ を導け.
- (3) $x \geq 0$ に対して, 不等式 $x^n e^{1-x} \leq n!$ を示せ.

4 点 O を原点とする座標平面上に, 2 点 $A(1, 0), B(\cos \theta, \sin \theta)$ ($90^\circ < \theta < 180^\circ$) をとり, 以下の条件をみたす 2 点 C, D を考える.

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 1, \quad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} = 0, \quad \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 0, \quad \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD} = 1$$

また, $\triangle OAB$ の面積を S_1 , $\triangle OCD$ の面積を S_2 とおく.

- (1) ベクトル $\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$ の成分を求めよ.
- (2) $S_2 = 2S_1$ が成り立つとき, θ と S_1 の値を求めよ.
- (3) $S = 4S_1 + 3S_2$ を最小にする θ と, そのときの S の値を求めよ.

- 5 a を実数とし, $A = \begin{pmatrix} a+1 & a \\ 3 & a+2 \end{pmatrix}$ とする. 2 点 $P(x, y)$, $Q(X, Y)$ について

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

が成り立つとき, P は A により Q に移るという.

- (1) 原点以外の点で, A によりそれ自身に移るものが存在するとき, a を求めよ.
- (2) 次の条件 (*) を満たす a, k を求めよ.
 (*) 直線 $\ell: y = kx + 1$ 上のすべての点は, A により ℓ 上の点に移る.
- (3) (*) をみたす a, k に対し, 直線 ℓ 上の点で, A によりそれ自身に移るものを求めよ.

- 6 直線 $\ell: mx + ny = 1$ が, 楕円 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) に接しながら動くとする.

- (1) 点 (m, n) の軌跡は楕円になることを示せ.
- (2) C の焦点 $F_1(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ と ℓ との距離を d_1 とし, もう 1 つの焦点 $F_2(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ と ℓ との距離を d_2 とする. このとき $d_1 d_2 = b^2$ を示せ.

解答例

1 (1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}ax^2$ より $f(-1) = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2}a$, $f(3) = 9 - \frac{9}{2}a$

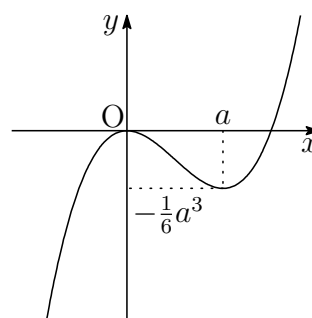
$$f(-1) \leq f(3) \text{ であるとき } -\frac{1}{3} - \frac{1}{2}a \leq 9 - \frac{9}{2}a \text{ これを解いて } a \leq \frac{7}{3}$$

$$a > 0 \text{ であるから, 求める } a \text{ の範囲は } 0 < a \leq \frac{7}{3}$$

(2) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}ax^2$ を微分すると

$$f'(x) = x^2 - ax = x(x - a)$$

x	...	0	...	a	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗



したがって, 極小値は $f(a) = -\frac{1}{6}a^3$

極小値 $f(a)$ が $f(-1)$ 以下となるとき

$$-\frac{1}{6}a^3 \leq -\frac{1}{3} - \frac{1}{2}a \text{ 整理すると } a^3 - 3a - 2 \geq 0$$

したがって $(a+1)^2(a-2) \geq 0$ $a > 0$ に注意して $a \geq 2$

(3) $-1 \leq x \leq 3$ における $f(x)$ の最小値を m とすると

$$0 < a \leq 3 \text{ のとき } m = \min\{f(-1), f(a)\}$$

$$3 < a \text{ のとき } m = \min\{f(-1), f(3)\}$$

(i) $0 < a \leq 3$ のとき, (2) の結果から

$$2 \leq a \leq 3 \iff f(a) \leq f(-1), \quad 0 < a < 2 \iff f(a) > f(-1)$$

(ii) $3 < a$ のとき, (1) の結果から $3 < a \iff f(-1) > f(3)$

$$\text{したがって } m = \begin{cases} f(-1) & (0 < a < 2) \\ f(a) & (2 \leq a \leq 3) \\ f(3) & (3 < a) \end{cases}$$

$$\text{よって } m = \begin{cases} -\frac{1}{3} - \frac{1}{2}a & (0 < a < 2) \\ -\frac{1}{6}a^3 & (2 \leq a \leq 3) \\ 9 - \frac{9}{2}a & (3 < a) \end{cases}$$



- 2 (1) $C_1 : y = \sin x \quad (0 \leq x < \frac{\pi}{2})$,
 $C_2 : y = \cos x \quad (0 \leq x < \frac{\pi}{2})$,
 $C_3 : y = \tan x \quad (0 \leq x < \frac{\pi}{2})$
 C_1, C_2 の方程式から y を消去すると

$$\sin x = \cos x \quad \text{ゆえに} \quad \tan x = 1$$

$0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ より $x = \frac{\pi}{4}$ よって, C_1, C_2 の交点の y 座標は $\frac{1}{\sqrt{2}}$
 C_2, C_3 の方程式から y を消去すると

$$\cos x = \tan x \quad \text{ゆえに} \quad \cos^2 x = \sin x \quad \cdots \textcircled{1}$$

したがって $\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$ $\sin x > 0$ に注意して $\sin x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

C_2, C_3 の y 座標は, ①により $\cos x = \sqrt{\cos^2 x} = \sqrt{\sin x} = \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}$

C_3, C_1 の方程式から y を消去すると

$$\tan x = \sin x \quad \text{ゆえに} \quad \sin x (\cos x - 1) = 0$$

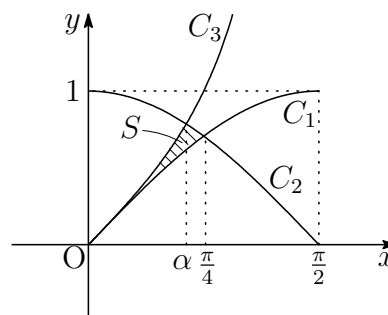
$0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ より, $x = 0$ よって, C_3, C_1 の交点の y 座標は 0

- (2) C_2, C_3 の交点の x 座標を α とすると $\cos^2 \alpha = \sin \alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

求める面積を S とすると, 上の図から

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\alpha \tan x \, dx + \int_\alpha^{\frac{\pi}{4}} \cos x \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \, dx \\ &= \left[-\log(\cos x) \right]_0^\alpha + \left[\sin x \right]_\alpha^{\frac{\pi}{4}} + \left[\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= -\frac{1}{2} \log(\cos^2 \alpha) - \sin \alpha + \sqrt{2} - 1 \\ &= -\frac{1}{2} \log\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right) - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} + \sqrt{2} - 1 \\ &= -\frac{1}{2} \log\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right) - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \sqrt{2} \end{aligned}$$

■



- 3** (1) $f(x)$ が単調に増加する連続関数であるから, $k-1 \leq x \leq k$ において

$$f(k) - f(x) \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad \int_{k-1}^k \{f(k) - f(x)\} dx \geq 0$$

$$\text{したがって} \quad \int_{k-1}^k f(x) dx \leq f(k) \int_{k-1}^k dx = f(k)$$

- (2) $n \geq 2$, $f(x) = \log x$ とし, (1) の結果に適用すると

$$\int_1^n \log x dx = \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \log x dx \leq \sum_{k=2}^n \log k = \log n!$$

$$\text{したがって} \quad \int_1^n \log x dx \leq \log n!$$

上式は, $n=1$ のときも成立するから, すべての自然数 n について

$$\int_1^n \log x dx \leq \log n! \quad \cdots (*)$$

$$\begin{aligned} (*) \text{ の左辺は } \int_1^n \log x dx &= \left[x(\log x - 1) \right]_1^n \\ &= n(\log n - 1) + 1 = \log n^n e^{1-n} \end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad \log n^n e^{1-n} \leq \log n! \quad \text{よって} \quad n^n e^{1-n} \leq n!$$

- (3) $g(x) = x^n e^{1-x}$ とおくと ($x \geq 0$)

$$g'(x) = nx^{n-1}e^{1-x} - x^n e^{1-x} = (n-x)x^{n-1}e^{1-x}$$

x	0	$\cdots$	n	$\cdots$
$g'(x)$		+	0	-
$g(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$

$$x \geq 0 \text{ のとき } g(x) \leq g(n) \quad \text{すなわち} \quad x^n e^{1-x} \leq n^n e^{1-n}$$

$$\text{上式および (2) の結果から } x \geq 0 \text{ に対して } x^n e^{1-x} \leq n! \quad \blacksquare$$

4 (1) $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} z \\ u \end{pmatrix}$ とし,

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 1, \quad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} = 0, \quad \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 0, \quad \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD} = 1$$

に適用すると

$$x = 1, \quad z = 0, \quad x \cos \theta + y \sin \theta = 0, \quad z \cos \theta + u \sin \theta = 1$$

$90^\circ < \theta < 180^\circ$ より, $\sin \theta \neq 0$, $\tan \theta \neq 0$ に注意して

$$x = 1, \quad y = -\frac{1}{\tan \theta}, \quad z = 0, \quad u = \frac{1}{\sin \theta}$$

よって $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{\tan \theta} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sin \theta} \end{pmatrix}$

別解 与えられた条件から

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & z \\ y & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$90^\circ < \theta < 180^\circ$ より, $\sin \theta \neq 0$ であるから

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x & z \\ y & u \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sin \theta} \begin{pmatrix} \sin \theta & 0 \\ -\cos \theta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sin \theta} \begin{pmatrix} \sin \theta & 0 \\ -\cos \theta & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2) $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ より $S_1 = \triangle OAB = \frac{1}{2} \sin \theta$

$\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{\tan \theta} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sin \theta} \end{pmatrix}$ より $S_2 = \triangle OCD = \frac{1}{2 \sin \theta}$

$S_2 = 2S_1$ が成り立つとき $\frac{1}{2 \sin \theta} = 2 \cdot \frac{1}{2} \sin \theta$ ゆえに $\sin^2 \theta = \frac{1}{2}$

$90^\circ < \theta < 180^\circ$ に注意して $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ すなわち $\theta = 135^\circ$

また $S_1 = \frac{1}{2} \sin \theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

(3) 相加平均・相乗平均の大小関係により

$$S = 4S_1 + 3S_2 = 2\sin\theta + \frac{3}{2\sin\theta} \geq 2\sqrt{2\sin\theta \cdot \frac{3}{2\sin\theta}} = 2\sqrt{3}$$

よって、 S は最小値 $2\sqrt{3}$ をとる．上式において等号が成立するとき、 $90^\circ < \theta < 180^\circ$ に注意して

$$2\sin\theta = \frac{3}{2\sin\theta} \quad \text{ゆえに} \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{すなわち} \quad \theta = 120^\circ$$

■

5 (1) A による原点以外の不動点をもつとき、 $\det(A - E) = 0$ であるから

$$a(a+1) - 3a = 0 \quad \text{これを解いて} \quad a = 0, 2$$

(2) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}$ とおくと、次式をみたす実数 α, β が存在する

$$A\vec{u} = \vec{u} + \alpha\vec{v}, \quad A\vec{v} = \beta\vec{v} \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} a+1 & a \\ 3 & a+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & ak+a+1 \\ a+2 & ak+2k+3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ k\alpha+1 & k\beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(1,1) 成分, (2,1) 成分から

$$a = \alpha, \quad a+2 = k\alpha+1 \quad \text{ゆえに} \quad ak = a+1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

① を (1,2) 成分, (2,2) 成分に適用すると

$$2a+2 = \beta, \quad a+2k+4 = k\beta \quad (**)$$

上の 2 式から β を消去すると

$$\begin{aligned} a+2k+4 &= k(2a+2) = 2ak+2k = 2(a+1)+2k \\ &= 2a+2k+2 \end{aligned}$$

$$\text{すなわち} \quad a = 2 \quad \text{これを} \textcircled{1} \text{ に代入して} \quad k = \frac{3}{2}$$

(3) $a = 2$ を (**) の第 1 式に代入して $\beta = 6$

$$\begin{aligned} A(\vec{u} + t\vec{v}) &= \vec{u} + t\vec{v} \quad \text{とおき} (*) \text{ に適用すると} \quad t = -\frac{2}{5} \\ \text{よって, 求める点は} \quad \vec{u} - \frac{2}{5}\vec{v} \quad \text{すなわち} \quad \left(-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right) \end{aligned}$$

■

- 6** (1) 接点を $(a \cos \theta, b \sin \theta)$ とすると $(0 \leq \theta < 2\pi)$, 接線の方程式は

$$\frac{(a \cos \theta)x}{a^2} + \frac{(b \sin \theta)y}{b^2} = 1 \quad \text{すなわち} \quad \frac{\cos \theta}{a}x + \frac{\sin \theta}{b}y = 1$$

上の第2式が $\ell: mx + ny = 1$ に一致するから

$$m = \frac{\cos \theta}{a}, \quad n = \frac{\sin \theta}{b}$$

上の2式から θ を消去すると

$$(*) \quad (am)^2 + (bn)^2 = 1 \quad \text{すなわち} \quad \frac{m^2}{\left(\frac{1}{a}\right)^2} + \frac{n^2}{\left(\frac{1}{b}\right)^2} = 1$$

よって, 点 (m, n) の軌跡は楕円である.

- (2) 焦点 $F_1(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ から直線 $\ell: mx + ny - 1 = 0$ までの距離 d_1 は

$$d_1 = \frac{|-m\sqrt{a^2 - b^2} - 1|}{\sqrt{m^2 + n^2}}$$

焦点 $F_2(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ から直線 $\ell: mx + ny - 1 = 0$ までの距離 d_2 は

$$d_2 = \frac{|m\sqrt{a^2 - b^2} - 1|}{\sqrt{m^2 + n^2}}$$

したがって

$$d_1 d_2 = \frac{|m^2(a^2 - b^2) - 1|}{m^2 + n^2} = \frac{|m^2 a^2 - m^2 b^2 - 1|}{m^2 + n^2}$$

(*) より $m^2 a^2 = 1 - n^2 b^2$ これを上式に代入すると

$$d_1 d_2 = \frac{|1 - n^2 b^2 - m^2 b^2 - 1|}{m^2 + n^2} = \frac{|-(m^2 + n^2)b^2|}{m^2 + n^2} = b^2$$

■