平成 20 年度　筑波大学　2 次試験前期日程 (数学問題)120 分

- 社会学類 [1] [4] 必答 (数 II・B)，及び他教科との選択.
- 国際総合学類　数 II・B 選択の場合は [1] [4] 必答.
  数 III・C 選択の場合は [2] [3] から 1 題選択，[5] [6] から 1 題選択.
- 教育・心理・障害学類　数 II・B 選択の場合は [1] [4] 必答.
  数 III 選択の場合は [2] [3] 必答．数 C 選択の場合は [5] [6] 必答.
- 生物学類・生物資源学類・医学・医療学類
  [1] [2] [3] 必答，[4] [5] [6] から 2 題選択.
- 地球・数学・物理・化学類　[2] [3] [5] [6] 必答，[1] [4] から 1 題選択.
- 応用理工・工学システム学類　[2] [3] 必答，[1] [4] [5] [6] から 2 題選択.
- 社会工学類　[2] [3] 必答，[1] [4] から 1 題選択，[5] [6] から 1 題選択.
- 情報科学・情報メディア創生学類
  [2] [3] [5] [6] 必答，[1] [4] から 1 題選択.
- 知識情報・図書館学類
  数 II・B 選択の場合は [1] [4] 必答.
  数 II・C 選択の場合は [1] 必答．[5] [6] から 1 題選択.
  数 III・B 選択の場合は [4] 必答．[2] [3] から 1 題選択.
  数 III・C 選択の場合は [2] [3] から 1 題選択，[5] [6] から 1 題選択.

1 p, q を正の実数とする．x の方程式

$$\log_{10}(px)\cdot\log_{10}(qx)+1=0$$

が 1 より大きい解をもつとき，点 $(\log_{10}p,\ \log_{10}q)$ の存在する範囲を座標平面上に図示せよ.

2 xyz 空間内の点 $\mathrm{P}(1,\ 0,\ 1)$ と，xy 平面上の円 $C : x^2 + (y-2)^2 = 1$ に属する点 $\mathrm{Q}(\cos\theta,\ 2+\sin\theta,\ 0)$ を考える．

(1) 直線 PQ と平面 $z = t$ の交点の座標を $(\alpha,\ \beta,\ t)$ とするとき，$\alpha^2 + \beta^2$ を t と θ で表せ．

(2) 線分 PQ を z 軸のまわりに 1 回転させてできる曲面と平面 $z = 0$，$z = 1$ によって囲まれる立体の体積を θ で表せ．

(3) Q が C 上を一周するとき，(2) で求めた体積の最大値，最小値を求めよ．

3 e は自然対数の底とする．$t > e$ において関数 $f(t)$，$g(t)$ を次のように定める．

$$f(t) = \int_1^e \frac{t^2 \log x}{t-x}dx, \quad g(t) = \int_1^e \frac{x^2 \log x}{t-x}dx$$

(1) $f(t) - g(t)$ を t の 1 次式で表せ．

(2) $1 \leqq x \leqq e$ かつ $t > e$ のとき $\dfrac{1}{t-x} \leqq \dfrac{1}{t-e}$ が成り立つことを用いて，$\lim\limits_{t\to\infty} g(t) = 0$ を示せ．

(3) $\lim\limits_{t\to\infty}\left(f(t) - \dfrac{bt^2}{t-a}\right) = 0$ となる定数 $a,\ b$ を求めよ．

4 二つの数列 $\{a_n\},\ \{b_n\}$ を次の漸化式によって定める．

$$a_1 = 3, \quad b_1 = 1$$
$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(3a_n + 5b_n)$$
$$b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 3b_n)$$

(1) すべての自然数 n について，${a_n}^2 - 5{b_n}^2 = 4$ であることを示せ．

(2) すべての自然数 n について，a_n，b_n は自然数かつ $a_n + b_n$ は偶数であることを証明せよ．

5 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $P = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{pmatrix}$，$D = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$ とする．$AP = PD$ が成り立つとき，$a,\ x,\ y$ を求めよ．ただし $a > 0$ とする．

(2) $(A + tE)^n = 4E$ が成り立つような実数 t と自然数 n の組をすべて求めよ．ただし $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．

6 放物線 $C : y = x^2$ 上の異なる 2 点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$，$\mathrm{Q}(s,\ s^2)$ $(s < t)$ における接線の交点を $\mathrm{R}(X,\ Y)$ とする．

(1) X，Y を t，s を用いて表せ．

(2) 点 P，Q が $\angle \mathrm{PRQ} = \dfrac{\pi}{4}$ を満たしながら C 上を動くとき，点 R は双曲線上を動くことを示し，かつ，その双曲線の方程式を求めよ．

解答例

1 $p,\ q$ を正の実数とする x の方程式

$$\log_{10}(px)\cdot\log_{10}(qx)+1=0$$

について，$t=\log_{10}x$，$a=\log_{10}p$，$b=\log_{10}q$ とおくと

$$(t+a)(t+b)+1=0 \quad \text{ゆえに} \quad t^2+(a+b)t+ab+1=0 \qquad (*)$$

x が 1 より大きい解をもつ，すなわち，t に関する 2 次方程式 $(*)$ が 0 より大きい解をもつときの点 $(a,\ b)$ の存在する範囲を求めればよい．

2 次方程式 $(*)$ の判別式 D は

$$D=(a+b)^2-4(ab+1)=(a-b)^2-4$$

$(*)$ は実数解をもつから，$D\geqq 0$ より

$$(a-b+2)(a-b-2)\geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad b\leqq a-2,\ a+2\leqq b \quad \cdots ①$$

$(*)$ の解 $t=\dfrac{-a-b\pm\sqrt{D}}{2}$ の少なくとも 1 つが正であればよいから

$$-a-b+\sqrt{D}>0 \quad \text{すなわち} \quad \sqrt{D}>a+b \qquad (**)$$

を満たせばよい．

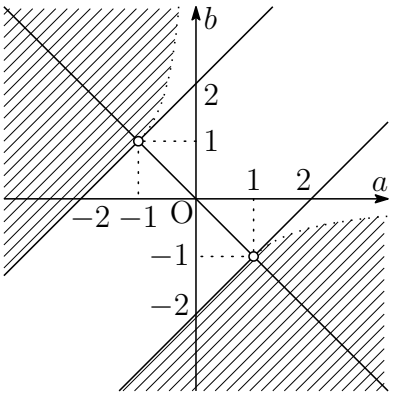
(i) $a+b<0$ のとき，$(**)$ は成立する．

(ii) $a+b\geqq 0$ のとき，$(**)$ の両辺を平方すると

$$(a-b)^2-4>(a+b)^2 \quad \text{整理すると} \quad ab<-1$$

よって，① および，(i) または (ii) を満たす点 $(a,\ b)$ が求める領域である．

ただし，領域は斜線部分で，点線および ○ は除く．



別解 $(*)$ を $f(t)=t^2+(a+b)t+ab+1$ とおく．

(i) $f(0)=ab+1<0$ のとき，正の解をもつ．

(ii) $f(0)=ab+1=0$ のとき，$f(t)=0$ は

$$t^2+(a+b)t=0 \quad \text{ゆえに} \quad t(t+a+b)=0$$

解 $t=-a-b$ が正であるから

$$-a-b>0 \quad \text{ゆえに} \quad a+b<0$$

(iii) $f(0)=ab+1>0$ のとき

$$f(t)=\left(t+\frac{a+b}{2}\right)^2-\frac{1}{4}(a-b)^2+1$$

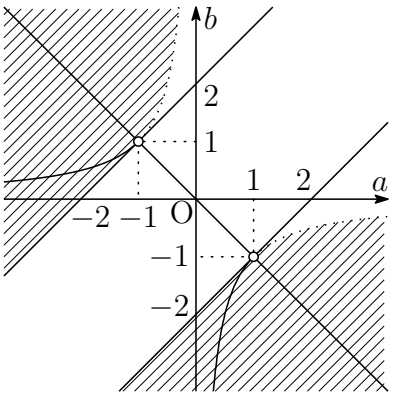
$y=f(t)$ の頂点 $\left(-\dfrac{a+b}{2},\ -\dfrac{1}{4}(a-b)^2+1\right)$ の座標について

$$-\frac{a+b}{2}>0 \quad \text{かつ} \quad -\frac{1}{4}(a-b)^2+1 \leqq 0$$

すなわち $\quad a+b<0 \quad$ かつ $\quad b<a-2,\ a+2<b$

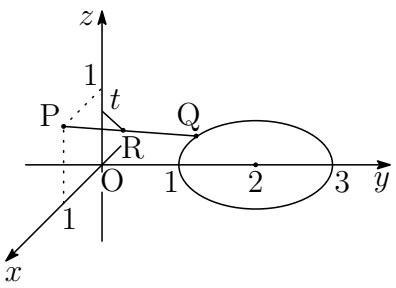
よって，(i)〜(iii) を満たす点 $(a,\ b)$ が求める領域である．

ただし，領域は斜線部分で，点線および ○ は除く．



■

2 (1) P(1, 0, 1)，Q($\cos\theta$, $2+\sin\theta$, 0)．
直線 PQ と平面 $z=t$ の交点 $(\alpha,\ \beta,\ t)$ を R とすると



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}} &= \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + t\overrightarrow{\mathrm{QP}}\\ &= t\overrightarrow{\mathrm{OP}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\end{aligned}$$

このとき　$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 = 2$,　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \cos\theta$

$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2 = \cos^2\theta + (2+\sin\theta)^2 = 5 + 4\sin\theta$

$|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2 = \alpha^2+\beta^2+t^2$

$|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2 = t^2|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 + 2t(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + (1-t)^2|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2$ であるから

$$\alpha^2+\beta^2+t^2 = 2t^2 + 2t(1-t)\cos\theta + (1-t)^2(5+4\sin\theta)$$

$$\boldsymbol{\alpha^2+\beta^2 = 2(3+2\sin\theta-\cos\theta)t^2 - 2(5+4\sin\theta-\cos\theta)t + 5 + 4\sin\theta}$$

(2) 求める立体の体積を V とすると，(1) の結果から

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi} &= \int_0^1 (\alpha^2+\beta^2)\,dt\\ &= 2(3+2\sin\theta-\cos\theta)\int_0^1 t^2\,dt\\ &\qquad - 2(5+4\sin\theta-\cos\theta)\int_0^1 t\,dt + (5+4\sin\theta)\int_0^1 dt\\ &= \frac{2}{3}(3+2\sin\theta-\cos\theta) - (5+4\sin\theta-\cos\theta) + (5+4\sin\theta)\\ &= \frac{1}{3}(6+4\sin\theta+\cos\theta)\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{V = \dfrac{\pi}{3}(6+4\sin\theta+\cos\theta)}$

(3) $\cos\alpha = \dfrac{4}{\sqrt{17}}$，$\sin\beta = \dfrac{1}{\sqrt{17}}$ とすると，(2) の結果から

$$V = \frac{\pi}{3}\{6+\sqrt{17}\sin(\theta+\alpha)\}$$

$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ であるから，$-1 \leqq \sin(\theta+\alpha) \leqq 1$ より，

V は**最大値** $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{3}(6+\sqrt{17})}$，**最小値** $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{3}(6-\sqrt{17})}$ をとる．　■

3 (1) $f(t)=\displaystyle\int_1^e \frac{t^2\log x}{t-x}dx,\quad g(t)=\int_1^e \frac{x^2\log x}{t-x}dx$ より

$$\begin{aligned} f(t)-g(t) &= \int_1^e \frac{(t^2-x^2)\log x}{t-x}\,dx \\ &= t\int_1^e \log x\,dx+\int_1^e x\log x\,dx \\ &= t\Big[\,x(\log x-1)\,\Big]_1^e+\Big[\,\frac{x^2}{2}\Big(\log x-\frac{1}{2}\Big)\,\Big]_1^e \\ &= \boldsymbol{t+\frac{e^2+1}{4}} \end{aligned}$$

(2) $1\leqq x\leqq e$ かつ $t>e$ のとき $\quad 0<\dfrac{1}{t-x}\leqq\dfrac{1}{t-e},\quad x^2\log x\geqq 0$

したがって $\qquad 0<\dfrac{x^2\log x}{t-x}\leqq\dfrac{x^2\log x}{t-e}$

$$0<\int_1^e \frac{x^2\log x}{t-x}\,dx\leqq\int_1^e \frac{x^2\log x}{t-e}\,dx$$

ゆえに $\qquad 0<g(t)\leqq\dfrac{1}{t-e}\displaystyle\int_1^e x^2\log x\,dx$

$K=\displaystyle\int_1^e x^2\log x\,dx$ とおくと，K は定数であるから

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t-e}\int_1^e x^2\log x\,dx=\lim_{t\to\infty}\frac{K}{t-e}=0$$

よって，はさみうちの原理により $\quad\displaystyle\lim_{t\to\infty}g(t)=0$

(3) (1) の結果から $\quad f(t)=g(t)+t+\dfrac{e^2+1}{4}$

また $\qquad\dfrac{bt^2}{t-a}=\dfrac{b(t^2-a^2)+a^2b}{t-a}=b(t+a)+\dfrac{a^2b}{t-a}$

ゆえに $\quad f(t)-\dfrac{bt^2}{t-a}=g(t)+t+\dfrac{e^2+1}{4}-\left\{b(t+a)+\dfrac{a^2b}{t-a}\right\}$

$$=(1-b)t+\frac{e^2+1}{4}-ab+g(t)-\frac{a^2b}{t-a}$$

$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\left(g(t)-\frac{a^2b}{t-a}\right)=0$ であるから，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\left(f(t)-\frac{bt^2}{t-a}\right)=0$ となるとき

$$1-b=0,\ \frac{e^2+1}{4}-ab=0\quad\text{よって}\quad\boldsymbol{a=\frac{e^2+1}{4},\ b=1}$$

■

4 (1) $a_1 = 3,\ \ b_1 = 1,\ \ a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(3a_n + 5b_n),\ \ b_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n + 3b_n) \quad \cdots (*)$

したがって $\quad {a_{n+1}}^2 - 5{b_{n+1}}^2 = \dfrac{1}{4}(3a_n + 5b_n)^2 - \dfrac{5}{4}(a_n + 3b_n)^2$

$$= {a_n}^2 - 5{b_n}^2$$

${a_1}^2 - 5{b_1}^2 = 3^2 - 5\cdot 1^2 = 4$ および上の漸化式から $\quad {a_n}^2 - 5{b_n}^2 = 4$

(2) 漸化式 $(*)$ より，すべての自然数 n について $\quad a_n > 0,\ b_n > 0 \quad \cdots (**)$

$c_n = a_n + b_n$，$d_n = a_n - b_n$ とすると $\quad c_1 = 4,\ d_1 = 2$

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{1}{2}(3a_n + 5b_n) + \frac{1}{2}(a_n + 3b_n) \\ &= 2a_n + 4b_n = 3(a_n + b_n) - (a_n - b_n) \\ &= 3c_n - d_n \quad \cdots ① \\ d_{n+1} &= a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{2}(3a_n + 5b_n) - \frac{1}{2}(a_n + 3b_n) \\ &= a_n + b_n \\ &= c_n \quad \cdots ② \end{aligned}$$

$c_1,\ d_1$ は偶数であり，①，② より，数列 $\{c_n\},\ \{d_n\}$ は偶数である．

$$a_n = \frac{c_n + d_n}{2},\quad b_n = \frac{c_n - d_n}{2}$$

および $(*)$ から，すべての自然数について a_n，b_n は自然数である．

また，c_n，すなわち，$a_n + b_n$ は偶数である． ■

5 (1) 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ の固有方程式は　$\lambda^2-2\lambda-3=0$

ゆえに　$(\lambda+1)(\lambda-3)=0$　したがって，固有値は　$\lambda=-1,\ 3$

$$A+E=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix},\quad A-3E=\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

固有値 $-1,\ 3$ に対する固有ベクトルは，それぞれ　$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$P=\begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{pmatrix}$，$D=\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$ が $AP=PD$ を満たすから

$$\boldsymbol{a=1,\ x=-1,\ y=3}$$

補足 A は対称行列であるから $({}^tA=A)$，2 つの固有ベクトルは直交する [1].

(2) $A=PDP^{-1}$ より，$A+tE=P(D+tE)P^{-1}$ であるから

$$(A+tE)^n=P(D+tE)^nP^{-1}=4E\quad \text{ゆえに}\quad (D+tE)^n=4E$$

したがって

$$(D+tE)^n=\begin{pmatrix} -1+t & 0 \\ 0 & 3+t \end{pmatrix}^n$$
$$=\begin{pmatrix} (-1+t)^n & 0 \\ 0 & (3+t)^n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$-1+t\neq 3+t$ であるから　$-1+t=-(3+t)$　ゆえに　$\boldsymbol{t=-1}$

これから　$(-2)^n=2^n=4$　よって　$\boldsymbol{n=2}$ ■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2003.pdf (p.14 を参照)

6 (1) $C : y = x^2$ より　$y' = 2x$

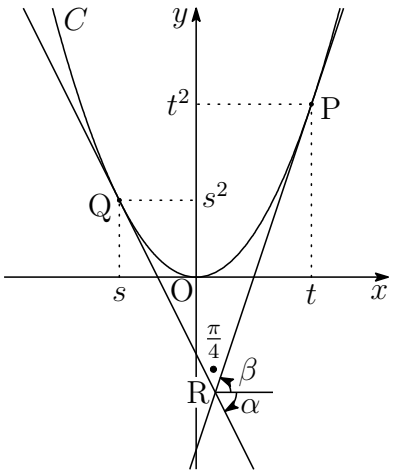
C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ における接線は

$$y - t^2 = 2t(x - t)$$

すなわち　$y = 2tx - t^2$　$\cdots$①

同様に C 上の点 $\mathrm{Q}(s,\ s^2)$ における接線は

$$y = 2sx - s^2 \quad \cdots ②$$



①，② を連立すると

$$2tx - t^2 = 2sx - s^2$$
$$2(t - s)x = t^2 - s^2$$

$t - s \neq 0$ であるから　$x = \dfrac{s + t}{2}$　ゆえに　$y = 2s \cdot \dfrac{s + t}{2} - s^2 = st$

よって　$\boldsymbol{X = \dfrac{s + t}{2},\ Y = st}$

(2) 2 点 $\mathrm{Q}(s,\ s^2)$，$\mathrm{P}(t,\ t^2)$ における接線の偏角を $\alpha,\ \beta$ とすると $(s < t)$

$$\tan\alpha = 2s,\ \ \tan\beta = 2t, \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$$

$\angle \mathrm{PRQ} = \dfrac{\pi}{4}$ より，$\beta - \alpha = \pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3}{4}\pi$ であるから

$$\tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\alpha\tan\beta} = \frac{2t - 2s}{1 + 2s \cdot 2t} = -1$$

ゆえに　$-(1 + 4st) = 2(t - s) > 0$　$\cdots (*)$

$(*)$ の両辺を平方すると

$$(1 + 4st)^2 = 4(t - s)^2 = 4(s + t)^2 - 16st$$

(1) の結果から，$s + t = 2X$，$st = Y$ を代入すると

$(1 + 4Y)^2 = 4X^2 - 16Y$　整理すると　$16X^2 - 16Y^2 - 24Y = 1$

したがって　$X^2 - \left(Y + \dfrac{3}{4}\right)^2 = -\dfrac{1}{2}$

$(*)$ より　$-(1 + 4Y) > 0$　ゆえに　$Y < -\dfrac{1}{4}$

よって，点 R は次の双曲線上を動く．

$$\boldsymbol{x^2 - \left(y + \frac{3}{4}\right)^2 = -\frac{1}{2}, \quad y < -\frac{1}{4}}$$

■