平成 19 年度　筑波大学　2 次試験前期日程 (数学問題)120 分

- 社会学類 [1] [4] 必答 (数 II・B)，及び他教科との選択.
- 国際総合学類　数 II・B 選択の場合は [1] [4] 必答.
  数 III・C 選択の場合は [2] [3] から 1 題選択，[5] [6] から 1 題選択.
- 教育・心理・障害学類　数 II・B 選択の場合は [1] [4] 必答.
  数 III 選択の場合は [2] [3] 必答．数 C 選択の場合は [5] [6] 必答.
- 生物学類・生物資源学類・医学・医療学類
  [1] [2] [3] 必答，[4] [5] [6] から 2 題選択.
- 地球・数学・物理・化学類　[2] [3] [5] [6] 必答，[1] [4] から 1 題選択.
- 応用理工・工学システム学類　[2] [3] 必答，[1] [4] [5] [6] から 2 題選択.
- 社会工学類　[2] [3] 必答，[1] [4] から 1 題選択，[5] [6] から 1 題選択.
- 情報科学・情報メディア創生学類
  [1] [2] [3] [4] 必答，[5] [6] から 1 題選択.
- 知識情報・図書館学類
  数 II・B 選択の場合は [1] [4] 必答.
  数 II・C 選択の場合は [1] 必答．[5] [6] から 1 題選択.
  数 III・B 選択の場合は [4] 必答．[2] [3] から 1 題選択.
  数 III・C 選択の場合は [2] [3] から 1 題選択，[5] [6] から 1 題選択.

1 xy 平面上に 2 定点 A$(1,\ 0)$ と O$(0,\ 0)$ をとる．また，m を 1 より大きい実数とする.

(1) AP : OP $= m : 1$ を満たす点 P$(x,\ y)$ の軌跡を求めよ.

(2) 点 A を通る直線で，(1) で求めた軌跡との共有点が 1 個のものを求めよ．また，その共有点の座標も求めよ.

2 関数 $f(x) = b + \dfrac{1}{b} - e^{ax} - e^{-ax}$ について，以下の問いに答えよ．ただし，$a > 0,\ b > 1$ とする．

(1) $f(x) \geqq 0$ を満たす x の範囲を求めよ．

(2) 曲線 $y = \sqrt{f(x)}$ と x 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積 V を求めよ．

(3) $a = b\log b$ のとき，(2) で求めた体積 V を $V(b)$ と表す．
このとき，$\lim_{b\to\infty} V(b) = 2\pi$ となることを示せ．

3 (1) $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2\cos^2 x\,dx$ を求めよ．

(2) 定数 a に対して，

$$f(x) = ax\sin x + x + \frac{\pi}{2}$$

とおく．このとき，不等式

$$\int_0^{\pi} \{f'(x)\}^2\,dx \geqq f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

を満たす a の範囲を求めよ．ただし，$f'(x)$ は $f(x)$ の導関数とする．

4 (1) 一般項 a_n が $an^3 + bn^2 + cn$ で表される数列 $\{a_n\}$ において，

$$n^2 = a_{n+1} - a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

が成り立つように，定数 a，b，c を定めよ．

(2) (1) の結果を用いて，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ となることを示せ．

(3) $1,\ 2, \cdots, n$ の相異なる 2 数の積のすべての和を $S(n)$ とする．たとえば，$S(3) = 1\times 2 + 1\times 3 + 2\times 3 = 11$ である．$S(n)$ を n の 4 次式で表せ．

5 $a \neq 0$ とする．$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ に対して，2 次正方行列 P が

$$PA = A + B, \quad PB = A - B$$

を満たしている．

(1) a と b を用いて P を表し，P が逆行列 P^{-1} をもつことを示せ．

(2) $\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = P^{-1}B$ とおく．xy 平面において，点 $(a,\ b)$ が放物線 $x = y^2 + 2$ 上を動くとき，点 $(s,\ t)$ の軌跡を求めよ．ただし，$|y| \leqq 1$ とする．

6 xy 平面上で，2 次曲線 $C : x^2 + ay^2 + by = 0$ が直線 $L : y = 2x - 1$ に点 P で接している．ただし，$a \neq -\dfrac{1}{4}$ とする．

(1) a と b の関係式を求めよ．

(2) C が楕円，放物線，双曲線となるそれぞれの場合に，b の値の範囲を求めよ．

(3) C が楕円となる場合の接点 P の存在範囲を求め，xy 平面上に図示せよ．

解答例

1 (1) AP : OP $= m : 1$ より $(m > 1)$　　$m^2\mathrm{OP}^2 = \mathrm{AP}^2$　$\cdots$①

A$(1,\ 0)$，O$(0,\ 0)$，P$(x,\ y)$ より

$$\mathrm{AP}^2 = (x-1)^2 + y^2, \quad \mathrm{OP}^2 = x^2 + y^2$$

上の 2 式を ① に代入すると　$m^2(x^2+y^2) = (x-1)^2 + y^2$

整理すると　　$(m^2-1)x^2 + (m^2-1)y^2 + 2x - 1 = 0$

$m > 1$ より，$m^2 - 1 > 0$ であるから

$$x^2 + y^2 + \frac{2}{m^2-1}x - \frac{1}{m^2-1} = 0 \qquad (*)$$

したがって　　$\left(x + \dfrac{1}{m^2-1}\right)^2 + y^2 = \left(\dfrac{m}{m^2-1}\right)^2$

よって，点 P の軌跡は，**中心** $\boldsymbol{\left(-\dfrac{1}{m^2-1},\ 0\right)}$，**半径** $\boldsymbol{\dfrac{m}{m^2-1}}$ **の円.**

別解 線分 AO を $m : 1$ に内分，外分する点は $(m \neq 1)$，それぞれ

$$\left(\frac{1}{m+1},\ 0\right), \quad \left(-\frac{1}{m-1},\ 0\right)$$

P の軌跡はこの 2 点を直径の両端とする円であるから (アポロニウスの円)

$$\left(x - \frac{1}{m+1}\right)\left(x + \frac{1}{m-1}\right) + y^2 = 0$$

これを整理すると，$(*)$ を得る.

(2) $a = \dfrac{1}{m^2-1}$ とおくと $(a > 0)$，$(*)$ は　$x^2 + y^2 + 2ax - a = 0$　$\cdots(**)$

点 A$(1,\ 0)$ を通る直線 $x = 1$ と $(**)$ を連立すると　$y^2 + a + 1 = 0$

これを満たす解はないので，求める接線を $y = k(x-1)\cdots$② とすると

$$x^2 + \{k(x-1)\}^2 + 2ax - a = 0$$

整理すると　　$(k^2+1)x^2 - 2(k^2-a)x + k^2 - a = 0$　$\cdots$③

③ は，重解をもつから，係数について

$$D/4 = (k^2-a)^2 - (k^2+1)(k^2-a) = -(k^2-a)(a+1) = 0$$

$a + 1 \neq 0$ であるから，$k = \pm\sqrt{a}$．③ に代入して　$x = 0$

これと ② により，接点 $(0, -k)$．$k = \pm\dfrac{1}{\sqrt{m^2-1}}$ であるから

接線 $\boldsymbol{y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{m^2-1}}(x-1)}$，**接点** $\boldsymbol{\left(0, \mp\dfrac{1}{\sqrt{m^2-1}}\right)}$ **(複号同順)** ■

2 (1) $f(x)=b+\dfrac{1}{b}-e^{ax}-e^{-ax}$ について，$f(x)\geqq 0$ のとき

$$b+\frac{1}{b}-e^{ax}-e^{-ax}\geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad (e^{ax})^2-\left(b+\frac{1}{b}\right)e^{ax}+1\leqq 0$$

したがって $(e^{ax}-b)\left(e^{ax}-\dfrac{1}{b}\right)\leqq 0$ $b>1$ より $\dfrac{1}{b}\leqq e^{ax}\leqq b$

$$\log\frac{1}{b}\leqq ax\leqq \log b \quad a>0 \text{ より} \quad \boldsymbol{-\frac{1}{a}\log b\leqq x\leqq \frac{1}{a}\log b}$$

(2) $k=\dfrac{1}{a}\log b$ とおくと，$e^{ak}=b$, $e^{-ak}=\dfrac{1}{b}$ に注意して

$$\begin{aligned}
V&=\pi\int_{-k}^{k}\left(\sqrt{f(x)}\right)^2dx=\pi\int_{-k}^{k}\left(b+\frac{1}{b}-e^{ax}-e^{-ax}\right)dx\\
&=2\pi\int_{0}^{k}\left(b+\frac{1}{b}-e^{ax}-e^{-ax}\right)dx\\
&=2\pi\left[\left(b+\frac{1}{b}\right)x-\frac{1}{a}e^{ax}+\frac{1}{a}e^{-ax}\right]_0^k\\
&=2\pi\left\{\left(b+\frac{1}{b}\right)k-\frac{e^{ak}}{a}+\frac{e^{-ak}}{a}\right\}\\
&=\boldsymbol{\frac{2\pi}{a}\left\{\left(b+\frac{1}{b}\right)\log b-b+\frac{1}{b}\right\}}
\end{aligned}$$

(3) (2) の結果に $a=b\log b$ を代入することにより

$$\begin{aligned}
V(b)&=\frac{2\pi}{b\log b}\left\{\left(b+\frac{1}{b}\right)\log b-b+\frac{1}{b}\right\}\\
&=2\pi\left(1+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{\log b}+\frac{1}{b^2\log b}\right)
\end{aligned}$$

よって $\displaystyle\lim_{b\to\infty}V(b)=\lim_{b\to\infty}2\pi\left(1+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{\log b}+\frac{1}{b^2\log b}\right)=2\pi$ ■

3 (1) $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2\cos^2 x\,dx = \int_0^{\pi} x^2\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx$

$$= \int_0^{\pi}\frac{x^2}{2}\,dx + \int_0^{\pi}\frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)'dx$$

$$= \left[\,\frac{x^3}{6}\,\right]_0^{\pi} + \left[\,\frac{1}{4}x^2\sin 2x + \frac{1}{4}x\cos 2x - \frac{1}{8}\sin 2x\,\right]_0^{\pi}$$

$$= \boldsymbol{\frac{\pi^3}{6} + \frac{\pi}{4}}$$

(2) $f(x) = ax\sin x + x + \dfrac{\pi}{2}$ より　$f'(x) = a(\sin x + x\cos x) + 1$

$g(x) = \sin x + x\cos x$，$M = \displaystyle\int_0^{\pi} x^2\cos^2 x\,dx = \frac{\pi^3}{6} + \frac{\pi}{4}$ とおくと

$$\int_0^{\pi} g(x)\,dx = \int_0^{\pi}(\sin x + x\cos x)\,dx = \left[\,x\sin x\,\right]_0^{\pi} = 0,$$

$$\int_0^{\pi}\{g(x)\}^2\,dx = \int_0^{\pi}(\sin x + x\cos x)^2 dx$$

$$= \int_0^{\pi}(\sin^2 x + 2x\sin x\cos x + x^2\cos^2 x)\,dx$$

$$= \int_0^{\pi}\left(\frac{1-\cos 2x}{2} + x\sin 2x\right)dx + \int_0^{\pi} x^2\cos^2 x\,dx$$

$$= \left[\,\frac{x}{2}(1-\cos 2x)\,\right]_0^{\pi} + M = M$$

$f'(x) = ag(x) + 1$ であるから，上の結果により

$$\int_0^{\pi}\{f'(x)\}^2\,dx = \int_0^{\pi}\{ag(x)+1\}^2\,dx$$

$$= a^2\int_0^{\pi}\{g(x)\}^2\,dx + 2a\int_0^{\pi} g(x)\,dx + \int_0^{\pi} dx$$

$$= a^2M + \pi$$

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \pi\left(\dfrac{a}{2}+1\right)$ より，$\displaystyle\int_0^{\pi}\{f'(x)\}^2\,dx \geqq f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ を満たすとき

$$a^2M + \pi \geqq \pi\left(\frac{a}{2}+1\right)\quad \text{整理すると}\quad a^2M - \frac{a}{2}\pi \geqq 0$$

したがって　$a^2\left(\dfrac{\pi^3}{6}+\dfrac{\pi}{4}\right) - \dfrac{a}{2}\pi \geqq 0$　ゆえに　$a\{(2\pi^2+3)a - 6\} \geqq 0$

よって　　$\boldsymbol{a \leqq 0,\ \dfrac{6}{2\pi^2+3} \leqq a}$　■

4 (1) $a_n = an^3 + bn^2 + cn$ について

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= a(n+1)^3 + b(n+1)^2 + cn - (an^3 + bn^2 + cn) \\ &= a(3n^2 + 3n + 1) + b(2n + 1) + c \\ &= 3an^2 + (3a + 2b)n + (a + b + c) \end{aligned}$$

すべての自然数 n について，$n^2 = a_{n+1} - a_n$ が成立するから

$$3a = 1, \quad 3a + 2b = 0, \quad a + b + c = 0$$

これを解いて　$\boldsymbol{a = \frac{1}{3},\ b = -\frac{1}{2},\ c = \frac{1}{6}}$

(2) (1) の結果から

$$a_n = \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)$$

$a_{n+1} = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$，$a_1 = 0$ であるから

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1 \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \end{aligned}$$

(3) $(1 + 2 + \cdots + n)^2 = \sum_{1 \leqq j,k \leqq n} jk = \sum_{k=1}^{n} k^2 + 2 \sum_{1 \leqq j < k \leqq n} jk$

$1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$，$S(n) = \sum_{1 \leqq j < k \leqq n} jk$ および (2) の結果により

$$\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 2S(n)$$

したがって　$$\begin{aligned} S(n) &= \frac{1}{8}n^2(n+1)^2 - \frac{1}{12}n(n+1)(2n+1) \\ &= \frac{1}{24}n(n+1)\{3n(n+1) - 2(2n+1)\} \\ &= \frac{1}{24}n(n+1)(3n^2 - n - 2) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{24}n(n+1)(n-1)(3n+2)} \end{aligned}$$

■

5 (1) $A=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ に対して $(a\neq 0)$，2 次正方行列 P が

$$PA=A+B,\quad PB=A-B \tag{$*$}$$

を満たしているから

$$P\begin{pmatrix}0 & a\\1 & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & -a\\1+b & 1-b\end{pmatrix} \tag{$**$}$$

$\begin{vmatrix}0 & a\\1 & b\end{vmatrix}=-a\neq 0$, $\begin{vmatrix}a & -a\\1+b & 1-b\end{vmatrix}=2a\neq 0$ であるから，P は正則で，逆行列 P^{-1} をもつ．$(**)$ より

$$\begin{aligned}P&=\begin{pmatrix}a & -a\\1+b & 1-b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & a\\1 & b\end{pmatrix}^{-1}\\&=\begin{pmatrix}a & -a\\1+b & 1-b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{b}{a} & 1\\ \frac{1}{a} & 0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\boldsymbol{-b-1} & \boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{\dfrac{-b^2-2b+1}{a}} & \boldsymbol{b+1}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

(2) $(*)$ より　$A=P^{-1}A+P^{-1}B$，$B=P^{-1}A-P^{-1}B$

上の 2 式から　$A-B=2P^{-1}B$　ゆえに　$B=A-2P^{-1}B$

したがって　$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix}$

点 $(a,\ b)$ は放物線 $x=y^2+2$ $(-1\leqq y\leqq 1)$ 上にあるから

$$-2s=(1-2t)^2+2,\quad -1\leqq 1-2t\leqq 1$$

すなわち　$s=-2t^2+2t-\dfrac{3}{2}$　$(0\leqq t\leqq 1)$

よって　放物線　$\boldsymbol{x=-2y^2+2y-\dfrac{3}{2}}$　$\boldsymbol{(0\leqq y\leqq 1)}$　■

6 (1) $C : x^2 + ay^2 + by = 0, \quad L : y = 2x - 1$

C と L の方程式から y を消去すると

$$x^2 + a(2x-1)^2 + b(2x-1) = 0$$

整理すると　　$(4a+1)x^2 - 2(2a-b)x + a - b = 0 \quad \cdots (*)$

$a \neq -\dfrac{1}{4}$ で，C と L は接するから，上の 2 次方程式は重解をもつ．

その判別式を D とすると

$$D/4 = (2a-b)^2 - (4a+1)(a-b) = b^2 + b - a = 0$$

このとき，条件から，$(a,\ b) \neq \left(-\dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{2}\right)$

また，C は 2 次曲線であるから，$(a,\ b) \neq (0,\ 0)$

よって　$\boldsymbol{a = b^2 + b, \quad \left(b \neq -\dfrac{1}{2},\ 0\right)}$

(2) (1) の結果から，2 次曲線 C の方程式は

$$x^2 + b(b+1)x + by = 0 \qquad (**)$$

(i) $b(b+1) = 0$ のとき $(b \neq 0)$，$b = -1$ を $(**)$ に代入すると

$$y = x^2 \quad \text{したがって} \quad \text{放物線}$$

(ii) $b(b+1) \neq 0$ のとき，$(**)$ から

$$x^2 + b(b+1)\left\{y + \frac{1}{2(b+1)}\right\}^2 = \frac{b}{4(b+1)}$$

このとき，$b(b+1)$ と $\dfrac{b}{4(b+1)}$ の符号が一致するから

$b(b+1) > 0$	すなわち　$b < -1,\ 0 < b$ のとき	楕円
$b(b+1) < 0$	すなわち　$-1 < b < 0$ $\left(b \neq -\frac{1}{2}\right)$ のとき	双曲線

よって　C が楕円になるとき　　$\boldsymbol{b < -1,\ 0 < b}$

C が放物線になるとき　$\boldsymbol{b = -1}$

C が双曲線になるとき　$\boldsymbol{-1 < b < 0 \ \left(b \neq -\dfrac{1}{2}\right)}$

(3) C が楕円のとき，その接点の x 座標は，$(*)$ および (1) の結果から

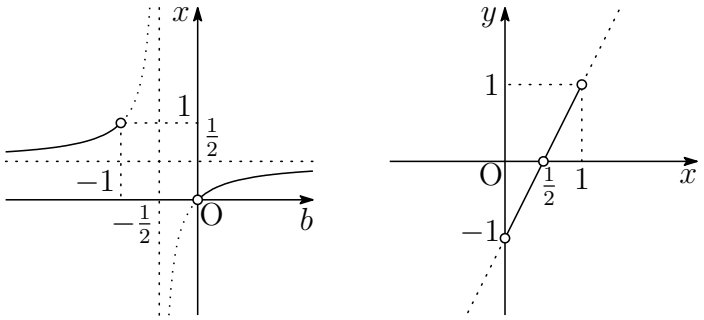
$$x = -\frac{-2(2a-b)}{2(4a+1)} = \frac{2a-b}{4a+1} = \frac{2(b^2+b)-b}{4(b^2+b)+1}$$
$$= \frac{b(2b+1)}{(2b+1)^2} = \frac{b}{2b+1} = -\frac{1}{2(2b+1)} + \frac{1}{2}$$

C が楕円のとき，$b < -1,\ 0 < b$ であるから，接点の x 座標は，左下の図のグラフで示す

$$0 < x < 1 \quad \left(x \neq \frac{1}{2}\right)$$

また，接点 P は L 上の点であるから，その y 座標は　$y = 2x - 1$

よって，接点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の存在範囲は，右下の図の実線部分である．



補足　2 次曲線 $ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ は，$D = ac - b^2$ とすると

$$\text{楕円} \Longrightarrow D > 0, \quad \text{放物線} \Longrightarrow D = 0, \quad \text{双曲線} \Longrightarrow D < 0$$

であるが，逆は成立しない[1]．　■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2010.pdf (p.13 を参照)