平成 18 年度　筑波大学　2 次試験前期日程 (数学問題)120 分

- 社会工学類　[2] [3] [5] [6] 必答.
- 国際総合学類　[2] [3] [5] [6] 必答.
- 情報学類　[1] [2] [3] [4] 必答.　[5] [6] から 1 題選択.
- 工学システム・工学基礎学類　[2] [3] 必答.
  [1] [4] [5] [6] から 2 題選択.
- 医学・医療学類　[1] [2] [3] 必答,　[4] [5] [6] から 2 題選択.
- 図書館情報専門学類　[1] [2] [3] から 2 題選択.
  [4] [5] [6] から 2 題選択.
- 旧課程履修者は，数学 C 分野 [5] [6] [7] から 2 題選択可

1 $f(x) = x^4 + 2x^2 - 4x + 8$ とする.

(1) $(x^2 + t)^2 - f(x) = (px + q)^2$ が x の恒等式となるような整数 $t,\ p,\ q$ の値を一組求めよ.

(2) (1) で求めた $t,\ p,\ q$ の値を用いて方程式 $(x^2 + t)^2 = (px + q)^2$ を解くことにより，方程式 $f(x) = 0$ の解をすべて求めよ.

2 $a \geqq b > 0,\ x \geqq 0$ とし，n は自然数とする．次の不等式を示せ.

(1) $0 \leqq e^x - (1 + x) \leqq \dfrac{x^2 e^x}{2}$

(2) $a^n - b^n \leqq n(a - b)a^{n-1}$

(3) $e^x - \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n \leqq \dfrac{x^2 e^x}{2n}$

3 座標空間において，$|x| \leqq z^2$ を満たす点 $(x,\ y,\ z)$ 全体からなる立体を R とする．点 $(0,\ 0,\ 1)$ を通り x 軸と平行な直線を l とする．l を中心軸とする半径 1 の円柱を C とし，R と C の共通部分を T とする.

(1) $-1 < h < 1$ を満たす定数 h に対して，点 $(0,\ 0,\ 1 + h)$ を通り z 軸に垂直な平面による T の切り口の面積を求めよ.

(2) T の体積を求めよ.

4 座標空間において，原点 O を通り方向ベクトル $(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$ をもつ直線を L_θ とする．点 $\mathrm{A}(2,\ 0,\ 1)$ から直線 L_θ に下ろした垂線と L_θ との交点を P_θ とする．

(1) θ が実数全体を動くとき，P_θ は xy 平面内の円周上を動くことを示し，その中心の座標と半径を求めよ．

(2) θ が $0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとする．三角形 OAP_θ の面積の最大値と，そのときの P_θ の座標を求めよ．

5 行列 $A,\ B$ を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

とする．

(1) 次の式のうち，定義されるものは計算し，定義されないものは「定義されない」とかけ．

(ア) $A + B$

(イ) AB

(ウ) BA

(エ) AA

(2) 2 次正方行列 C が $C(BA) = (BA)C$ を満たすとき，$C = sE + t(BA)$ となる実数 $s,\ t$ が存在することを示せ．ただし，$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．

6 xy 平面において，媒介変数 t を用いて

$$x = 2\left(t + \frac{1}{t} + 1\right), \quad y = t - \frac{1}{t}$$

と表される曲線を C とする．

(1) 曲線 C の方程式を求め，その概形をかけ．

(2) 点 $(a,\ 0)$ を通り曲線 C に接する直線があるような a の範囲と，そのときの接線の方程式をすべて求めよ．

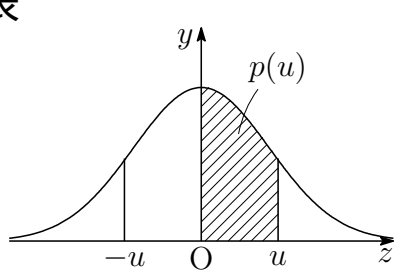
7 投げたとき裏が出やすいと思われるコインがある．このコインについて本当に裏が出やすいかどうか調べてみたい．このコインを投げて表の出る確率を p とし，100 回投げて表の出る回数を X とする．このとき次の問いに答えよ．ただし，必要があれば，次のページの正規分布表を参照し，正規分布による近似を用いてよい．

(1) $p = \frac{1}{2}$ のとき $P(X \leqq 40)$ を四捨五入により小数点以下第 2 位まで求めよ．

(2) $X \leqq a$ であったら「$p < \frac{1}{2}$」，$X > a$ であったら「$p = \frac{1}{2}$」と判断することにする (ただし a は 50 未満の整数)．本当は $p = \frac{1}{2}$ であるのに「$p < \frac{1}{2}$」と判断される確率が 0.10 以下となるような整数 a の最大値を求めよ．

(3) (2) の a を用いて「$p < \frac{1}{2}$」か「$p = \frac{1}{2}$」かの判断を行うとする．このとき，$p = \frac{2}{5}$ であるのに「$p = \frac{1}{2}$」と判断される確率を四捨五入により小数点以下第 2 位まで求めよ．ただし，$\sqrt{6} \fallingdotseq 2.45$ としてよい．

正　規　分　布　表



u	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

解答例

1 (1) $(x^2+t)^2-f(x)=(px+q)^2$ より

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2+t)^2-(px+q)^2 \qquad (*)\\ &= x^4+(2t-p^2)x^2-2pqx+t^2-q^2 \end{aligned}$$

$f(x)=x^4+2x^2-4x+8$ であるから，同じ次数の項の係数を比較すると

$$2t-p^2=2,\quad -2pq=-4,\quad t^2-q^2=8$$

したがって　　$p^2=2(t-1),\quad pq=2,\quad q^2=t^2-8$

これらを $p^2q^2=(pq)^2$ に代入すると

$$2(t-1)(t^2-8)=2^2 \quad \text{整理すると} \quad t^3-t^2-8t+6=0$$

ゆえに　$(t-3)(t^2+2t-2)=0$　　整数 t は，$t=3$ であるから

$$p^2=4,\quad pq=2,\quad q^2=1 \quad \text{すなわち} \quad (p,\ q)=(2,\ 1),\ (-2,-1)$$

よって，求める 1 組は　　$\boldsymbol{(t,\ p,\ q)=(3,\ 2,\ 1)}$

(2) (1) の結果を $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2+3)^2-(2x+1)^2\\ &= (x^2+2x+4)(x^2-2x+2) \end{aligned}$$

$f(x)=0$ とすると　$(x^2+2x+4)(x^2-2x+2)=0$

これを解いて　　$\boldsymbol{x=-1\pm\sqrt{3}i,\ 1\pm i}$ ■

2 (1) $f(x)=e^x-(1+x)$ とおくと，$x\geqq 0$ において　$f'(x)=e^x-1\geqq 0$

$x\geqq 0$ において $f(x)$ は単調増加で，$f(0)=0$ であるから

$$f(x)\geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad e^x-(1+x)\geqq 0 \qquad (x\geqq 0)$$

$g(x)=\left(\dfrac{x^2}{2}-1\right)e^x+(1+x)$ とおくと

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\frac{x^2}{2}+x-1\right)e^x+1\\ g''(x) &= \left(\frac{x^2}{2}+2x\right)e^x \end{aligned}$$

$x \geqq 0$ において $g''(x) \geqq 0$，$g'(0) = 0$ であるから　$g'(x) \geqq 0 \quad (x \geqq 0)$

さらに，$x \geqq 0$ において $g'(x) \geqq 0$，$g(0) = 0$ であるから

$$g(x) \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad \frac{x^2 e^x}{2} \geqq e^x - (1+x) \qquad (x \geqq 0)$$

よって　　$0 \leqq e^x - (1+x) \leqq \dfrac{x^2 e^x}{2} \qquad (x \geqq 0)$

(2) $a \geqq b > 0$ より

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a-b)\sum_{k=1}^{n} a^{n-k} b^{k-1} \\ &\leqq (a-b)\sum_{k=1}^{n} a^{n-k} a^{k-1} = (a-b)\sum_{k=1}^{n} a^{n-1} = n(a-b)a^{n-1} \end{aligned}$$

別解 $a = b > 0$ のとき　$a^n - b^n = n(a-b)a^{n-1}$

$a > b > 0$ のとき，$h(x) = x^n$ とすると，平均値の定理により

$$\frac{h(a) - h(b)}{a-b} = h'(c) \quad (a > c > b)$$

を満たす c が少なくとも 1 つ存在する．$h'(c) < h'(a)$ であるから

$$\frac{a^n - b^n}{a-b} < na^{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad a^n - b^n < n(a-b)a^{n-1}$$

よって　$a \geqq b > 0$ のとき　　$a^n - b^n \leqq n(a-b)a^{n-1}$

(3) $\dfrac{x}{n} \geqq 0$ に注意して (1) の結果の x を $\dfrac{x}{n}$ に置き換えると

$$0 \leqq e^{\frac{x}{n}} - \left(1 + \frac{x}{n}\right) \leqq \frac{x^2 e^{\frac{x}{n}}}{2n^2} \qquad (*)$$

$e^{\frac{x}{n}} > 1 + \dfrac{x}{n} > 0$ に注意して (2) の結果に $a = e^{\frac{x}{n}}$，$b = 1 + \dfrac{x}{n}$ を代入すると

$$0 \leqq e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leqq n\left\{e^{\frac{x}{n}} - \left(1 + \frac{x}{n}\right)\right\} e^{\frac{n-1}{n}x} \qquad (**)$$

$(*)$，$(**)$ より

$$e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leqq n \cdot \frac{x^2 e^{\frac{x}{n}}}{2n^2} \cdot e^{\frac{n-1}{n}x} = \frac{x^2 e^x}{2n}$$

■

3 (1) $R : |x| \leqq z^2$，$C : y^2 + (z-1)^2 \leqq 1$ より，$z = 1 + h$ のとき $(-1 < h < 1)$

$$|x| \leqq (1+h)^2, \quad y^2 + h^2 \leqq 1$$

したがって　$-(1+h)^2 \leqq x \leqq (1+h)^2, \quad -\sqrt{1-h^2} \leqq y \leqq \sqrt{1-h^2}$

このとき，T の切り口の面積を S とすると

$$S = 2(1+h)^2 \cdot 2\sqrt{1-h^2} = \boldsymbol{4(1+h)^2\sqrt{1-h^2}}$$

(2) T の体積を V とすると，(1) の結果から

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^{1} S\,dh = \int_{-1}^{1} 4(1+h)^2\sqrt{1-h^2}\,dh \\ &= 4\int_{-1}^{1} \sqrt{1-h^2}\,dh + 8\int_{-1}^{1} h\sqrt{1-h^2}\,dh + 4\int_{-1}^{1} h^2\sqrt{1-h^2}\,dh \\ &= 8\int_{0}^{1} \sqrt{1-h^2}\,dh + 8\int_{0}^{1} h^2\sqrt{1-h^2}\,dh \end{aligned}$$

$h = \sin\theta$ とすると　$\dfrac{dh}{d\theta} = \cos\theta$

h	$0 \longrightarrow 1$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} V &= 8\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta + 8\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta \\ &= 8\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta + 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\theta\,d\theta \\ &= 4\left[\,\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\,\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\,\theta - \frac{\sin 4\theta}{4}\,\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{\frac{5}{2}\pi} \end{aligned}$$

発展 $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$ を利用すると [1]

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^{1} 4(1+h)^2\sqrt{1-h^2}\,dh = 4\int_{-1}^{1} (1+h)^{\frac{5}{2}}(1-h)^{\frac{1}{2}}\,dh \\ &= 4\cdot\frac{\frac{5}{2}!\frac{1}{2}!}{(\frac{5}{2}+\frac{1}{2}+1)!}\cdot 2^{\frac{5}{2}+\frac{1}{2}+1} = 4\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}!\right)^2\cdot\frac{2^4}{4!} \\ &= 10\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}\pi \end{aligned}$$

■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/Tdai/Tdai_ri_2020.pdf (p.8 を参照)

4 (1) L_θ の方向ベクトルを $\vec{v}=(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$ とすると，P_θ は L_θ 上の点であるから，定数 k を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}_\theta}&=k\vec{v}=(k\cos\theta,\ k\sin\theta,\ 0),\\ \overrightarrow{\mathrm{AP}_\theta}&=\overrightarrow{\mathrm{OP}_\theta}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\ &=(k\cos\theta,\ k\sin\theta,\ 0)-(2,\ 0,\ 1)\\ &=(k\cos\theta-2,\ k\sin\theta,-1)\end{aligned}$$

このとき，$\vec{v}\perp\overrightarrow{\mathrm{AP}_\theta}$ であるから，$\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}_\theta}=0$ より

$$\begin{aligned}\cos\theta(k\cos\theta-2)+\sin\theta\cdot k\sin\theta+0\cdot(-1)&=0\\ k(\cos^2\theta+\sin^2\theta)&=2\cos\theta\\ k&=2\cos\theta\end{aligned}$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OP}_\theta}=(2\cos^2\theta,\ 2\sin\theta\cos\theta,\ 0)=(1+\cos2\theta,\ \sin2\theta,\ 0)$

よって，P_θ は xy 平面上において**中心 (1，0，0)，半径 1** の円周上にある．

(2) 三角形 OAP_θ の面積を S とすると

$$\begin{aligned}(2S)^2&=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OP}_\theta}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}_\theta})^2\\ &=(2^2+0^2+1^2)\{(1+\cos2\theta)^2+(\sin2\theta)^2+0^2\}\\ &\qquad-\{2(1+\cos2\theta)+0\cdot\sin2\theta+1\cdot0\}^2\\ &=(1+\cos2\theta)^2+5\sin^2 2\theta\\ &=5\sin^2 2\theta+\cos^2 2\theta+2\cos2\theta+1\\ &=-4\cos^2\theta+2\cos2\theta+6\\ &=-4\left(\cos2\theta-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{25}{4}\end{aligned}$$

$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，$0\leqq2\theta<\pi$ であるから

$$\cos2\theta=\frac{1}{4},\quad \sin2\theta=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

のとき，すなわち，$\mathbf{P_\theta\left(\dfrac{5}{4},\ \dfrac{\sqrt{15}}{4},\ 0\right)}$ のとき，S は**最大値** $\dfrac{5}{4}$ をとる．■

5 (1) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

(ア) 定義されない

(イ) $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} \mathbf{11} & \mathbf{-3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{7} & \mathbf{-11} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$

(ウ) $\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{8} \\ \mathbf{12} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$

(エ) 定義されない

(2) $C=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ とおくと，$C(BA)=(BA)C$ より

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 12 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 12 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4x+12y & 8x-y \\ 4z+12w & 8z-w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4x+8z & 4y+8w \\ 12x-z & 12y-w \end{pmatrix}$$

成分を比較して整理すると　$z=\dfrac{3}{2}y,\quad w=x-\dfrac{5}{8}y$

したがって　$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}=\left(x-\dfrac{y}{2}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\dfrac{y}{8}\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 12 & -1 \end{pmatrix}$

$s=x-\dfrac{y}{2},\ t=\dfrac{y}{8}$ とおくと　　$C=sE+t(BA)$

補足 一般に 2 次正方行列 $A,\ X$ が $AX = XA$ を満たすとき ($A \neq kE,\ k$ は定数)

$$X = sE + tA$$

となる実数 $s,\ t$ が存在する．

証明 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ とおくと，$AX = XA$ のとき

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ax+bz & ay+cw \\ cx+dz & cy+dw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+cy & bx+dy \\ az+cw & bz+dw \end{pmatrix}$$

成分を比較して整理すると

$$bz = cy, \quad (a-d)y = b(x-w), \quad (a-d)z = c(x-w) \qquad (*)$$

(i) $a \neq d$ のとき，$(*)$ より

$$\begin{aligned}(a-d)X &= (a-d)\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & (a-d)y \\ (a-d)z & 0 \end{pmatrix} \\ &= (a-d)\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b(x-w) \\ c(x-w) & 0 \end{pmatrix} \\ &= x\begin{pmatrix} a-d & b \\ c & 0 \end{pmatrix} - w\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d-a \end{pmatrix} \\ &= x(A-dE) - w(A-aE) = (aw-dx)E + (x-w)A\end{aligned}$$

(ii) $a = d$，$b \neq 0$ のとき，$(*)$ より，$w = x,\ bz = cy$ であるから

$$\begin{aligned}bX &= b\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & by \\ bz & 0 \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & by \\ cy & 0 \end{pmatrix} \\ &= (bx-ay)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} = (bx-ay)E + yA\end{aligned}$$

(iii) $a = d$，$c \neq 0$ のとき，$(*)$ より，$w = x,\ bz = cy$ であるから

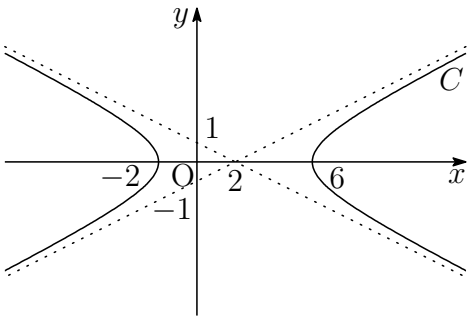
$$\begin{aligned}cX &= c\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & cy \\ cz & 0 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & bz \\ cz & 0 \end{pmatrix} \\ &= (cx-az)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} = (cx-az)E + zA\end{aligned}$$

(i)〜(iii) より，$X = sE + tA$ となる実数 $s,\ t$ が存在する． **証終** ■

6 (1) $x=2\left(t+\dfrac{1}{t}+1\right)$, $y=t-\dfrac{1}{t}$ より

$$(x-2)^2-4y^2=4\left(t+\frac{1}{t}\right)^2-4\left(t-\frac{1}{t}\right)^2=16$$

したがって　　$\boldsymbol{C:\dfrac{(x-2)^2}{16}-\dfrac{y^2}{4}=1}$



(2)　(i) 点 $(a,\ 0)$ を通る C の接線で y 軸に平行な直線は

$$a=-2 \text{ のとき 直線 } x=-2,\quad a=6 \text{ のとき 直線 } x=6$$

(ii) 点 $(a,\ 0)$ を通る C の接線で傾きが m の直線を $y=m(x-a)$ とし，これと C の方程式から y を消去して整理すると

$$(1-4m^2)x^2+4(2am^2-1)x-4(m^2a^2+3)=0 \quad \cdots(*)$$

$1-4m^2=0$，すなわち，$m=\pm\dfrac{1}{2}$ のとき，漸近線と平行であるから，C の接線ではない．$m\neq\pm\dfrac{1}{2}$ のとき，2 次方程式 $(*)$ が重解をもつから

$$D/4=4(2am^2-1)^2+(1-4m^2)\cdot4(m^2a^2+3)=0$$

したがって　　$(12+4a-a^2)m^2=4 \quad \cdots(**)$

$(**)$ を満たす a が存在するとき，$12+4a-a^2>0$ より

$$(a+2)(a-6)<0 \quad \text{すなわち} \quad -2<a<6$$

ただし，$m=\pm\dfrac{1}{2}$ は 2 次方程式 $(**)$ の解ではないから　$a\neq2$

(i)，(ii) から求める a の範囲は　$\boldsymbol{-2\leqq a\leqq 6\ (a\neq 2)}$

接線は　$\boldsymbol{a=-2}$ のとき $\boldsymbol{x=-2}$，　$\boldsymbol{a=6}$ のとき $\boldsymbol{x=6}$

$\boldsymbol{-2<a<6\ (a\neq 2)}$ のとき $\boldsymbol{y=\pm\dfrac{2}{\sqrt{12+4a-a^2}}(x-a)}$ ■

7 (1) $n=100$，$p=\dfrac{1}{2}$ とすると，X は 2 項分布 $B(n,\ p)$ に従う．n が十分大きいとき，X は正規分布 $N(np,\ np(1-p))$，すなわち，$N(50,\ 25)$ に従う．

$$Z=\frac{X-50}{5}$$

とおくと，Z は正規分布 $N(1,\ 0)$ に従う．

$$\begin{aligned}P(X\leqq 40)&=P(Z\leqq -2)=P(Z\leqq 0)-P(-2\leqq Z\leqq 0)\\&=\frac{1}{2}-P(0\leqq Z\leqq 2)=0.5-0.4772=0.0228\fallingdotseq \mathbf{0.02}\end{aligned}$$

(2) $X\leqq a$ のとき，$Z\leqq \dfrac{a-50}{5}$ であるから

$$P\left(Z\leqq \frac{a-50}{5}\right)\leqq 0.10$$

を満たす整数 a を求めればよい．$a<50$ に注意して

$$\begin{aligned}P\left(Z\leqq \frac{a-50}{5}\right)&=P\left(Z\geqq \frac{50-a}{5}\right)\\&=P(Z\geqq 0)-P\left(0\leqq Z\leqq \frac{50-a}{5}\right)\\&=0.50-P\left(0\leqq Z\leqq \frac{50-a}{5}\right)\end{aligned}$$

したがって　　$P\left(0\leqq Z\leqq \dfrac{50-a}{5}\right)\geqq 0.40$

正規分布表において，$P(1.28)=0.3997$，$P(1.29)=0.4015$ であるから

$$\frac{50-a}{5}\geqq 1.29\quad \text{ゆえに}\quad a\leqq 43.55$$

よって，求める最大の整数 a は　　$\boldsymbol{a=43}$

(3) $p=\dfrac{2}{5}$ のとき，X は正規分布 $N(40,\ 24)$ に従う．

$$Y=\frac{X-40}{2\sqrt{6}}$$

とおくと，Y は正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う．

$X>43$，すなわち，$Y>\dfrac{3}{2\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}=0.6215$ である確率

$$\begin{aligned}P(Y>0.6125)&=P(Y\geqq 0)-P(0\leqq Y\leqq 0.6125)\\&=0.5-0.2291=0.2709\fallingdotseq \mathbf{0.27}\end{aligned}$$

■